Viereck contra Dreieck

Eine Rätselaufgabe von Ingmar Rubin, Berlin

30. Juli 2001

Gabi, Petra und Thomas fertigen in der Mathematik AG verschiedene Polygone aus einem Modellbaukasten an. Die Streben besitzen an ihren Enden Drehgelenke über die sie mit weiteren Streben verbunden werden. Gabi hat ein Dreieck mit unterschiedlichen Seitenlängen a, b, c zusammengestellt. Thomas hat das Modell eines allgemeinen Vierecks aus Streben mit gößer werdender Länge angefertigt ($a < b < c < d$).

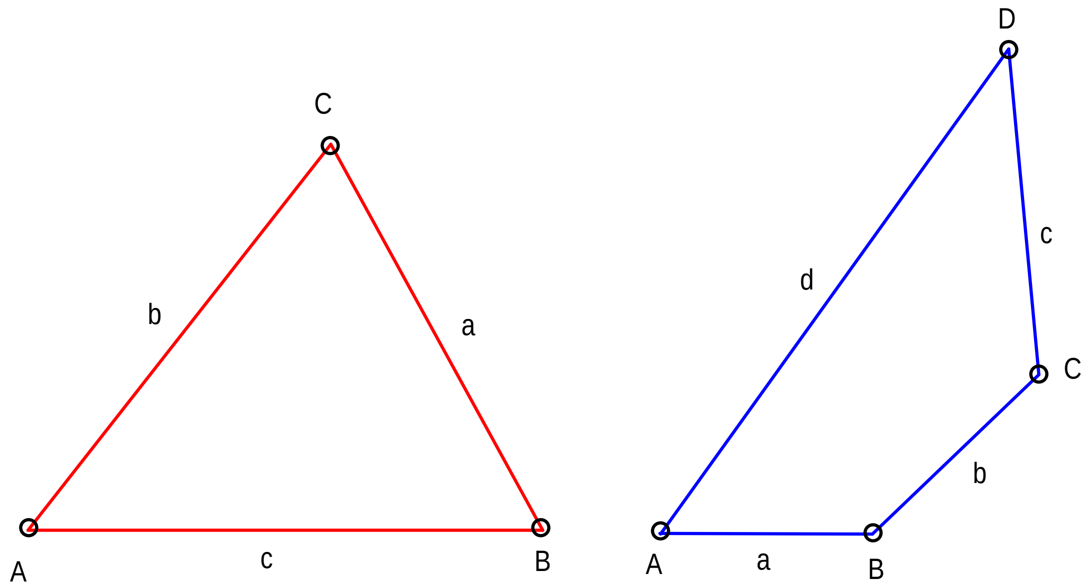

Abbildung 1: Bild zur Aufgabenstellung

Während das Dreieck unbeweglich ist (alle Innenwinkel sind fest) kann das Viereck in beliebig viele Positionen verstellt werden. Zu jedem Polygon soll nun eine Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes notiert werden. Petra kennt vom Dreieck die *Flächenforeml von Heron* wonach alle Dreiecke mit konstanten Seitenlängen den gleichen Flächeninhalt besitzen.

$$A_{\triangle} = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}, \qquad s = \frac{a+b+c}{2} \tag{1}$$

Beim allgemeinen Viereck ist die Situation komplizierter. Lehrer Karl gibt seinen Mathematikassen folgende Aufgaben auf den Heimweg :

1. Bestimme von allen Vierecken $ABCD$ mit den Seitenlängen $a < b < c < d$ das jenige welches maximalen Flächeninhalt besitzt !
2. Berechne für die Seitenlängen $a = 3\,cm$, $b = 4\,cm$, $c = 5\,cm$ und $d = 8\,cm$ den maximalen Flächeninhalt des Vierecks !
3. Konstruiere das maximale Viereck mit Zirkel und einem skalierten Lineal.

Punktezahl = 8

Die verallgemeinerte Flächenformel von *Brahmagupta*

Mit s bezeichne wir den halben Umfang des Vierecks $ABCD$, d.h.

$$s = \frac{a+b+c+d}{2} \tag{2}$$

Die verallgemeinerte Flächenformel von *Brahmagupta* lautet dann:

$$F = \sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d) - a\,b\,c\,d\,\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)^2} \tag{3}$$

Auch ohne Differentialrechnung erkennt man: F wird ganau dann maximal, wenn gilt :

$$0 = a\,b\,c\,d\,\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \beta+\delta = 180^\circ \tag{4}$$

Die Bedingung, das zwei sich gegenüberliegende Winkel im Viereck zu 180° ergänzen, erfüllt das Sehnenviereck. In diesem Fall liegen die vier Punkte $ABCD$ auf einem Kreis.

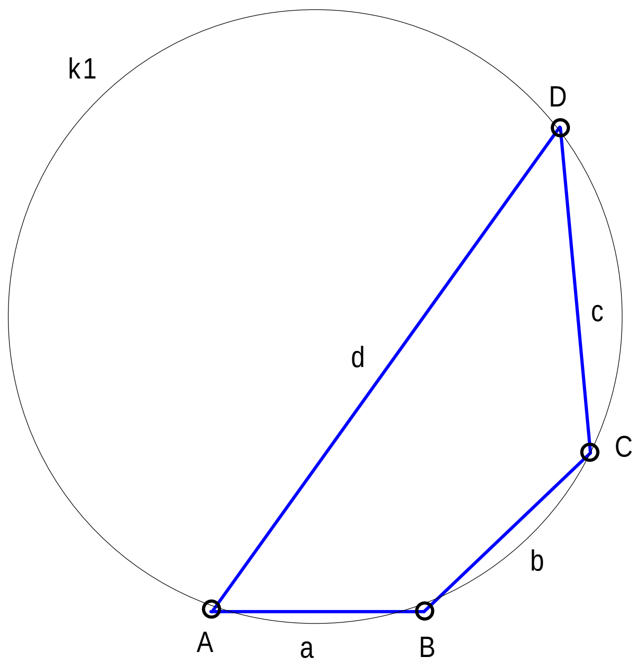

Abbildung 2: Bild zur Aufgabenstellung

Der maximale Flächeninhalt beträgt damit:

$$F = \sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)} = 2\,\sqrt{105}\,cm^2 \approx 23.4187\,cm^2 \tag{5}$$

Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Wir berechnen zunächst den Umkreisradius des Sehnevierecks $ABCD$:

$$r_u = \frac{1}{4\,F}\sqrt{(ab+cd)\,(ac+bd)\,(ad+bc)} \tag{6}$$

Mit der Flächenformel (4) erhalten wir:

$$r_u = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)\,(ac+bd)\,(ad+bc)}{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6721}{105}} \approx 4.0003cm \tag{7}$$

Mit der Kenntnis vom Umkreisradius sieht die Konstruktion des Sehnenvierecks wie folgt aus:

- Zeichne einen Kreis k mit dem Radius $r_u = 4\,cm$,
- markiere auf k den Punkt A,
- trage von A aus die Strecke $a = 3\,cm$ auf k ab und bezeichne den Enpunkt mit B,
- trage von B aus die Strecke $b = 4\,cm$ auf k ab und bezeichne den Endpunkt mit C,
- trage von C aus die Strecke $c = 5\,cm$ auf k ab und bezeichne den Endpunkt mit D,
- verbinde den Punkt A mit D

Das so konstruierte Sehnenviereck $ABCD$ entspricht dem gesuchten Viereck mit maximalen Flächeninhalt.