Aufgabe λ28, Maximaler Winkel gesucht

Dr.Friedhelm Götze, Jena

Zeitschrift *Die Wurzel*, Heft 06/2004

Auf einem der beiden Schenkel eines Winkels α, $0° < \alpha < 90°$, sind zwei Punkte A, B markiert mit den vom Scheitelpunkt S aus gemessenen Abständen $a, b\,(a < b)$.
Gesucht wird auf dem anderen Schenkel ein Punkt C, von dem aus die Strecke AB unter maximalem Winkel φ erscheint. Wie lauten bei festem α die Bedingungen für das Verhältnis $a \div b$, die darüber entscheiden, ob φ ein spitzer, rechter oder stumpfer Winkel ist? Zeige, dass der Punkt C mit einer *Zirkel und Lineal* Konstruktion bestimmt werden kann!

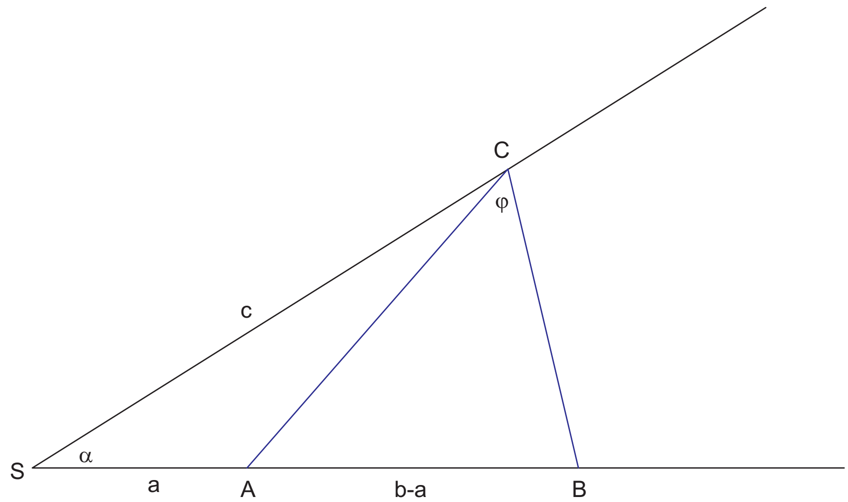

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Lösungsweg

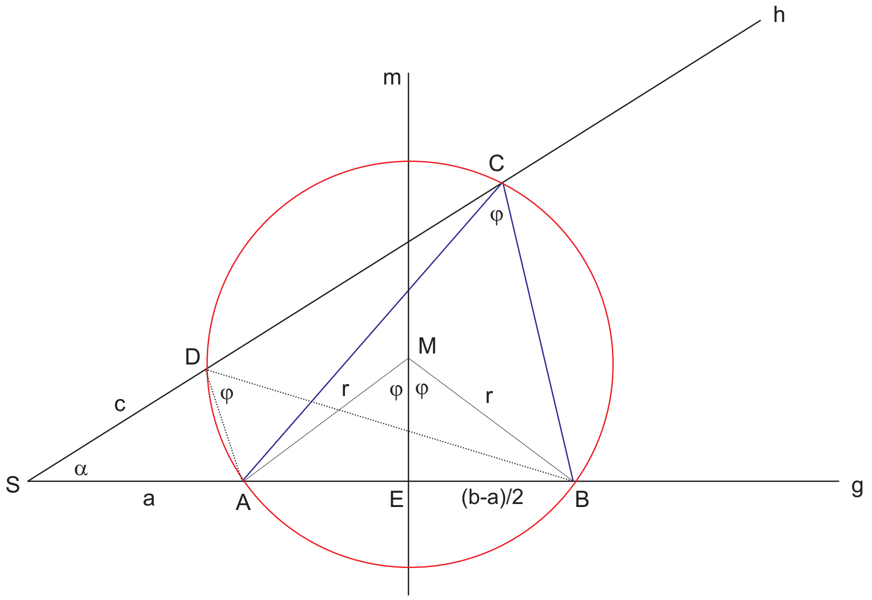

Abbildung 2: Skizze zur Lösung

Sei der untere Schenkel mit g und der obere Schenkel mit h bezeichnet (Abbildung 2). Wir errichten auf der Strecke AB die Mittelsenkrechte m und bezeichnen den Schnittpunkt auf g mit E. Auf m wählen wir den (beweglichen) Punkt M und zeichnen um M den Kreis k mit Radius $r = MA = MB$. Seien C, D die Schnittpunke zwischen dem Kreis k und dem Schenkel h. Nach dem Peripheriewinkelsatz über der Sehne AB gilt:

$$\varphi = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB \tag{1}$$

Weiterhin ist der Zentriewinkel doppelt so groß wie der zugehörige Peripheriewinkel:

$$\sphericalangle AMB = 2 \cdot \varphi \tag{2}$$

Im rechtwinkligen Dreick MEB gilt:

$$\sin \varphi = \frac{b-a}{2\,r} \tag{3}$$

Die Sinusfunktion ist im ersten Quadranten monton steigend.
Die Strecke $AB = (b-a)$ ist konstant. Je kleiner r wird, desto größer wird der Winkel φ. Andererseits muß r so groß sein, dass der Kreis k wenigstens ein Schnittpunkt (Berührungspunkt) mit dem Schenkel h hat. Das Maximum vom Winkel φ wird also genau für den jenigen Kreis k erreicht, der den Schenkel h tangential berührt (Abbildung 3).

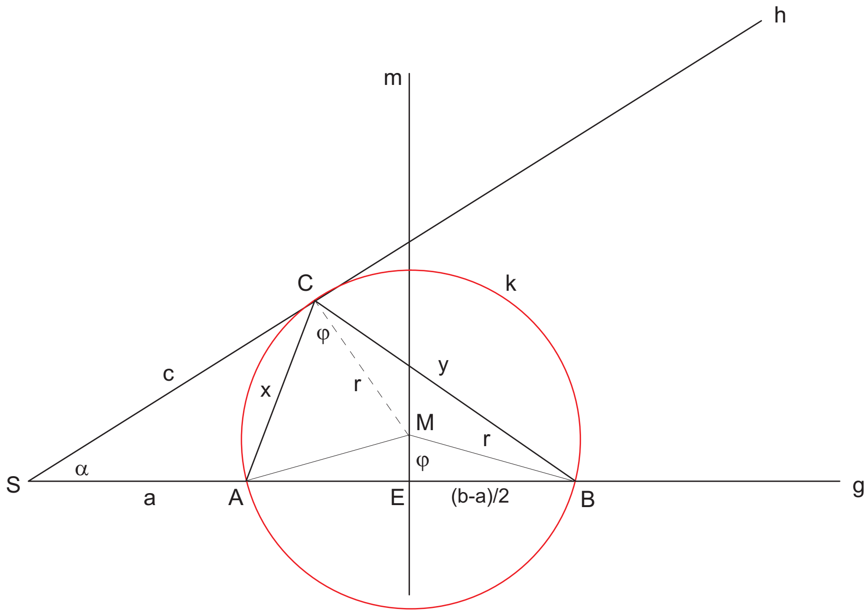

Abbildung 3: maximaler Winkel φ für den Berührungskreis k an h

Für Abbildung 3 gilt der *Sekanten-Tangensatz*

$$SA \cdot SB = SC^2 \quad \rightarrow \quad a \cdot b = c^2 \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{a \cdot b} \tag{4}$$

Der maximale Winkel φ wird mit dem Kosinusatz im Dreick ACB berechnet. An Stelle von c setzen wir das Ergebnis aus (4).

$$x^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos\alpha = a^2 + a\,b - 2\,a\sqrt{a\,b}\,\cos\alpha \tag{5}$$

$$y^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha = b^2 + a\,b - 2\,b\sqrt{a\,b}\,\cos\alpha \tag{6}$$

$$\cos\varphi = \frac{x^2 + y^2 - (b-a)^2}{2\,x\,y} = \frac{2\,a\,b - \sqrt{a\,b} \cdot (a+b) \cdot \cos\alpha}{2\,x\,y} \tag{7}$$

Aus der Zählerfunktion können wir eine Klassifizierung für φ vornehmen, wobei wir das Verhältnis $t = a \div b$ einführen:

$$\frac{2\sqrt{t}}{1+t} > \cos\alpha \quad \rightarrow \quad spitzer\,Winkel \tag{8}$$

$$\frac{2\sqrt{t}}{1+t} = \cos\alpha \quad \rightarrow \quad rechter\,Winkel \tag{9}$$

$$\frac{2\sqrt{t}}{1+t} < \cos\alpha \quad \rightarrow \quad stumpfer\,Winkel \tag{10}$$

Geometrische Konstruktion von $c = \sqrt{a \cdot b}$

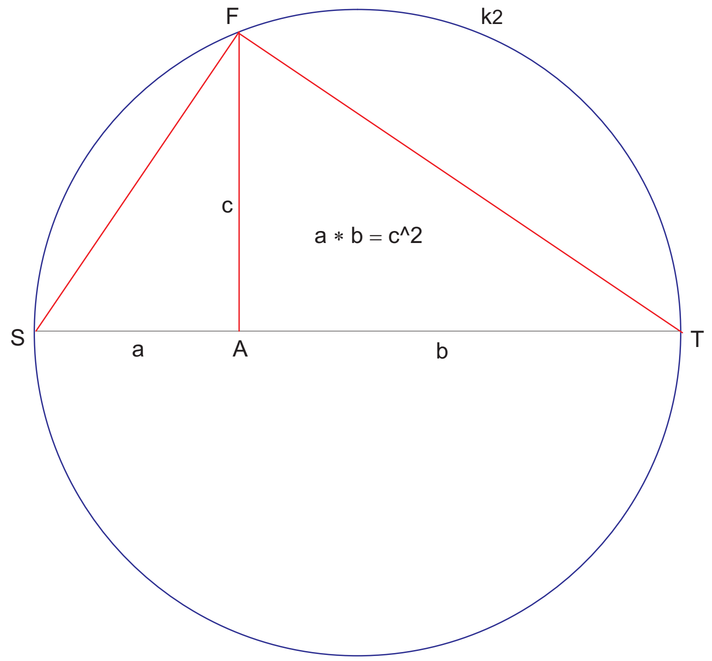

Abbildung 4: Konstruktion der Strecke $c = \sqrt{a \cdot b}$ mit dem Höhensatz

Wir zeichnen die Strecke $ST = a+b$. Über ST zeichnen wir den Hilfskreis k_2 mit Durchmesser ST. Von S tragen wir die Strecke $a = SA$ ab. In A errichten wir die Senkrechte und bezeichnen den Schnittpunkt mit k_2 mit F. Das Dreieck SFB ist nach dem *Thalessatz* rechtwinklig und es gilt der Höhensatz:

$$SA \cdot AT = AF^2 \quad \rightarrow \quad a \cdot b = AF^2 = c^2, \quad c = \sqrt{a \cdot b} \tag{11}$$

Die so konstruierte Strecke c tragen wir auf dem Schenkel h von S aus ab, so dass gilt $c = SC$. Das Dreieck ACB ist das gesuchte Dreieck mit maximalen Winkel $\sphericalangle ACB = \varphi$.