# Drehzahlberechnung einer Videokassette

von Ingmar Rubin

Abbildung 1 zeigt den Aufbau einer Wickelvorrichtung wie sie in Video- oder Tonbandkassetten vorkommt. Während des Abspielens der Kassette wird Bandmaterial der Stärke $h = 0.1\,mm$ kontinuierlich von Rolle $R_1$ nach Rolle $R_2$ transportiert.

Die Geschwindigkeit $v$ ist konstant, und betrage $60\,mm \cdot s^{-1}$.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ betrage $R_1 = 50\,mm$ und $R_2 = 5\,mm$. Die Drehzahlen beider Spulen sind, über der Zeit betrachtet, nicht konstant, da die Wickelradien sich fortlaufend ändern.

1. Ermitteln Sie die Funktionen der Drehzahlen $n_1(t)$ und $n_2(t)$ in Abhängikeit von der Zeit !
2. Stellen Sie das Verhältnis der Drehzahlen $\frac{n_1(t)}{n_2(t)}$ im Intervall $0 \leq t \leq 1250\,s$ graphisch dar !

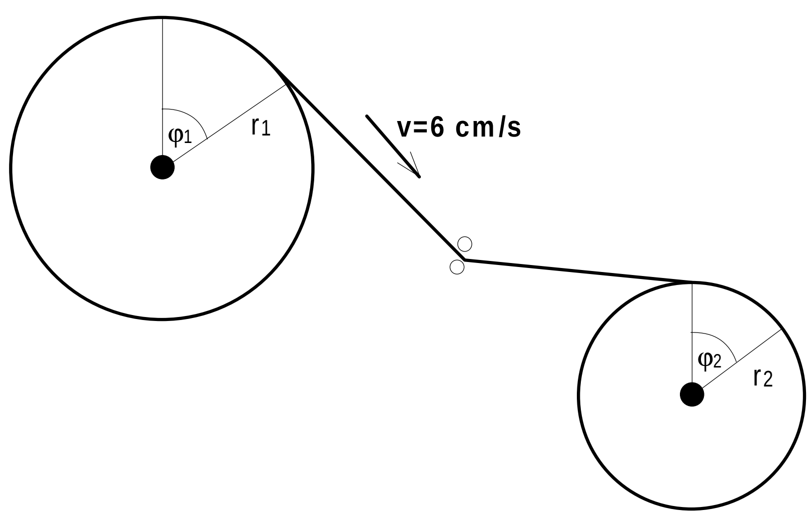


Abbildung 1: Modellaufbau der Wickelvorrichtung

## Lösung

Die Umfangsgeschwindigkeit, als das Produkt von Radius $r$ und Winkelgeschwindigkeit $\omega$ muß für jede der beiden Spulen stets konstant $v$ betragen.

$$v = \omega_1 \cdot r_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} \cdot r_1 = 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot n_1(t) = const \tag{1}$$

$$v = \omega_2 \cdot r_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} \cdot r_2 = 2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot n_2(t) = const \tag{2}$$

Für beide Wickeltrommeln wird das Modell der archimedischen Spirale benutzt. Der Radius $r$ verändert sich proportional zum zurückgelegten Drehwinkel $\omega$ Der Anstieg $a$ je Wicklung entspricht dem Quotienten aus Bandstärke $h$ und dem Winkel $2\pi$. Die Radien $R_1$ und $R_2$ seien der Wickelradius im Zeitpunkt $t = 0$.

$$r_1(\varphi_1) = R_1 - a \cdot \varphi_1 \tag{3}$$

$$r_2(\varphi_2) = R_2 + a \cdot \varphi_2 \tag{4}$$

$$a = \frac{h}{2\pi} \tag{5}$$

Aus den Gleichungen (1) bis (4) erhält man je eine Differentialgleichung für den Drehwinkel $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$.

$$v = \frac{d\varphi_1}{dt} \cdot (R_1 - a \cdot \varphi_1) \tag{6}$$

$$v \cdot \int dt = \int (R_1 - a \cdot \varphi_1) \cdot d\varphi_1 \tag{7}$$

$$v \cdot t + C_1 = R_1 \cdot \varphi_1 - \frac{1}{2} \cdot a(\varphi_1)^2 \tag{8}$$

$$AB: \quad \varphi_1(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0 \tag{9}$$

$$v = \frac{d\varphi_2}{dt} \cdot (R_2 + a \cdot \varphi_2) \tag{10}$$

$$v \cdot \int dt = \int (R_2 + a \cdot \varphi_2) \cdot d\varphi_2 \tag{11}$$

$$v \cdot t + C_2 = R_2 \cdot \varphi_2 + \frac{1}{2} \cdot a(\varphi_2)^2 \tag{12}$$

$$AB: \quad \varphi_2(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0 \tag{13}$$

Die Gleichungen (8) und (12) werden mit der quadratischen Lösungsformel explizit nach $\varphi(t)$ aufgelöst. Von den zwei möglichen Lösungen, wird die gewählt, welche die Anfangsbedingung erfüllt.

$$\varphi_1(t) = \frac{R_1}{a} - \sqrt{\left(\frac{R_1}{a}\right)^2 - \frac{2vt}{a}} \tag{14}$$

$$\varphi_2(t) = -\frac{R_2}{a} + \sqrt{\left(\frac{R_2}{a}\right)^2 + \frac{2vt}{a}} \tag{15}$$

Die gesuchten Funktionen der Drehzahlen $n(t)$ berechnen sich aus dem Differentialquotienten $\frac{d\varphi}{dt}$

$$n_1 \cdot 2 \cdot \pi = \frac{d\varphi_1}{dt} \quad \rightarrow \quad n_1(t) = \frac{v}{2\pi\sqrt{(R_1)^2 - 2avt}} \tag{16}$$

$$n_2 \cdot 2 \cdot \pi = \frac{d\varphi_2}{dt} \quad \rightarrow \quad n_2(t) = \frac{v}{2\pi\sqrt{(R_2)^2 + 2avt}} \tag{17}$$

Abschließend soll das Verhältnis der beiden Drehzahlfunktionen über der Zeit betrachtet werden. Die Konstante $a$ ersetzen wir mittels Gleichung (5):

$$w = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{\pi \cdot (R_2)^2 + h \cdot v \cdot t}}{\sqrt{\pi \cdot (R_1)^2 - h \cdot v \cdot t}} \tag{18}$$

Als numerische Beispielwerte setzen wir:

$$R_1 = 50\,mm, \quad R_2 = 5\,mm, \quad v = 60\frac{mm}{s}, \quad h = \frac{1}{10}\,mm \tag{19}$$

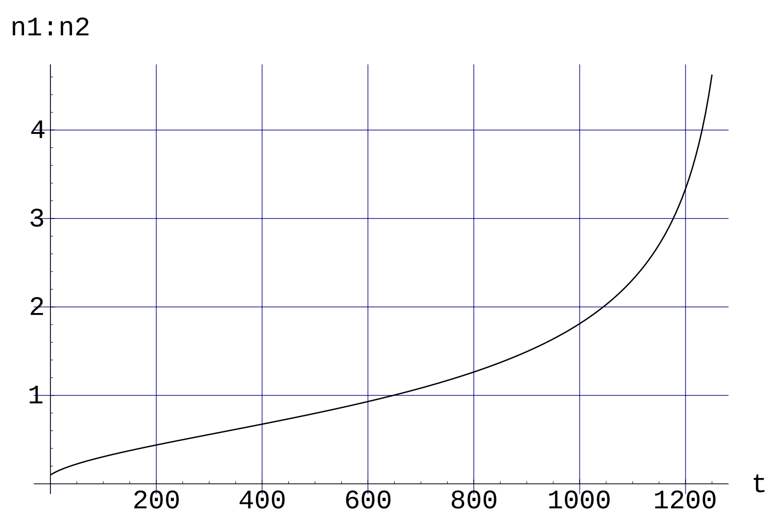


Abbildung 2: Verhältnis der Drehzahlen $n_1(t) : n_2(t)$ über der Zeit