

Raumschiffflug im Fahrstuhlschacht

Die mathematische Knobelei des Monats Januar 2000

Preisrätsel aus Spektrum der Wissenschaft

Der berühmt-berüchtigte Jahrtausendfehler schlägt manchmal genau dort zu, wo niemand damit gerechnet hat. Und so manche notdürftige Reparatur macht die mißliche Lage auch nicht angenehmer. Dann muß man sich halt zu helfen wissen - oder jemanden dabei haben, der den Überblick behält.

Das Rätsel

“Wuhuhuuuuuu!“ Gibt es für Kinder einen schöneren Tag im Jahr als Silvester? Mal abgesehen von Weihnachten und Geburtstag, wegen der Geschenke. Naja, und mit Ausnahme der großen Ferien, wenn keine Schule ist. Vielleicht auch noch der Tag, an dem sie endlich ihren Willen kriegen und die ganze Familie in den Freizeitpark oder ins Disneyland fährt. Vergessen wir mal diese vielen Höhepunkte im Leben eines Dreikäsehochs - schwupps... steht Silvester ganz oben auf der Liste. Weil man da doch so lange aufbleiben darf, wie man will. Selbst die ganz Kleinen. Und sogar Krach machen und rumtoben ist erlaubt. Die Erwachsenen sind eh viel lauter.

“Jeeeeeeh!“ Der zweite Blitz rast aus der Wohnungstür in Richtung Fahrstuhl. “Halt, wartet auf mich!“ Kein Blitz, eher ein Donner. Obwohl mit seinen zehn Jahren ebenfalls gerade über die Marke von einem Meter dreißig gelangt, fällt Jean-Luc eher durch seinen Umfang als durch seine Wendigkeit auf. Mit zwei Händen voller Negerküsse folgt er unbeholfen seinen beiden Freunden. Den Rutsch ins Jahr 2000 hatten die drei mit Salzstangen unter dem Buffettisch seiner Eltern verbracht, nun wollen sie bei Familie Troi, die c Stockwerke tiefer wohnt, auf Dianas Computer SSternengeballerßpielen.

“Liebe Hausbewohner, der gefürchtete Jahr-2000-Fehler hat die Steuerung des Fahrstuhls durcheinander gebracht“, liest William vor, der als erster den Aufzug erreicht und den an der Tür klebenden Zettel entdeckt hat.

“Dem Techniker ist es aber gelungen, eine provisorische Schaltung zu installieren, mit der Sie jede Etage erreichen können. Durch Drücken eines beliebigen Knopfes auf dem linken Bedienungsfeld in der Fahrstuhlkabine fahren Sie elf Stockwerke aufwärts. Die Knöpfe auf der rechten Seite bringen Sie neun Stockwerke nach unten. Mit einer geeigneten Kombination dieser beiden Möglichkeiten erreichen Sie sicher Ihr gewünschtes Ziel. Wir danken für Ihr Verständnis. Die Hausverwaltung. - Habt Ihr das verstanden?“

Seine gerümpfte Nase signalisiert eindeutig Verwirrung. "Ich nicht", stimmt Diana in sein Unverständnis ein, bereit William stets und überhaupt recht zu geben, wo er doch so süß ist. "Laß mich mal sehen", bittet Jean-Luc noch ein wenig außer Atem. Durch seine dicken Brillengläser studiert er kurz den Text. Dann meint er breit grinsend: "Ist ja ganz einfach! Paßt auf: Wir spielen Raumschiff. Ich bin der Navigator, der den riesigen Kreuzer aus seinem engen Trockendock manövrieren muß. Und ihr seid die Steuerleute. Kommt rein in den Fahrstuhl!"

Siegesgewiß tritt er in den Aufzug und winkt den beiden, ihm zu folgen. "Diana, Du gehst an die linke Konsole! Wenn ich sage 'Hoch', dann drückst Du irgendeinen Knopf. Willi, Du stellst Dich an die rechten Schalter und achtest auf das Kommando 'Runter'. Verstanden?" Die beiden nicken. "OK, dann geht es los - Energie!" Und zielsicher steuert Jean-Luc mit der geringstmöglichen Anzahl von Manövern sein schweres Fahrstuhl-Raumschiff um c Stockwerke nach unten, wo ihn seine beiden Freunde begeistert zum "Obernavigator erster Güte" befördern.

Mit welchen Formeln läßt sich berechnen, wie oft William und Diana auf die Knöpfchen drücken mußten? (Punktezah=6)

Auflösung des Rätsels

Jean-Luc mußte die folgende Gleichung in ganzen Zahlen lösen:

$$ax + by = c, \quad a, b, c, x, y \in \mathbb{Z} \quad a = 11, \quad b = -9 \quad (1)$$

Es handelt sich um eine lineare Diophantische Gleichung mit zwei Unbekannten. Bei gegebenen c könnte man nun durch probieren versuchen ein spezielles Lösungspaar (x, y) zu finden, welches die Gleichung erfüllt.

In der Aufgabenstellung ist aber nach einer allgemeinen Lösung gefragt, die für beliebiges $c < 0$ eine Lösung liefert.

Für Diophantische Gleichungen gilt der folgende Satz /1/:

Satz Vorgelegt sei die lineare Diophantische Gleichung in n -Unbekannten:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \dots a_nx_n = c \quad (2)$$

Für ganze a_i, c , nicht alle $a_i = 0$, ist die diophantische Gleichung genau dann lösbar, wenn der $GGT(a_1 \dots a_n)$ in c aufgeht.

Für unseren Aufgabe gilt $GGT(11, -9) = 1$, d.h. die Gleichung ist für jedes $c \in \mathbb{Z}$ lösbar.

Für Diophantische Gleichungen mit zwei Unbekannten gilt der spezielle Lösungsalgorithmus:

Satz Seien a, b, c ganze Zahlen mit $a, b \neq 0$, sei $GGT(a, b) = d$ wobei d teilt c gelte und für die ganzen Zahlen x_0, y_0 gelte:

$$ax_0 + by_0 = d \quad (3)$$

Dann hat die lineare diophantische Gleichung

$$aX + bY = c \quad (4)$$

genau die ganzzahligen Lösungen:

$$\left(\frac{cx_0 + bt}{d}, \frac{cy_0 - at}{d} \right), \quad t \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

Die Lösung des Problems hat sich reduziert auf die Ermittlung des Lösungspaares x_0, y_0 für Gleichung (2). Man kann diese Gleichung über den *Euklidischen Algorithmus* nach /1/ algorithmisch lösen. Bei großen a, b hilft nur dieser Weg. In unserem einfachen Fall kann durch "Hinsehen" leicht das Lösungspaar ermittelt werden:

$$11x_0 - 9y_0 = 1 \quad \rightarrow \quad x_0 = 5, y_0 = 6 \quad (6)$$

Mit $d = 1, a = 11, b = -9$ und $x_0 = 5, y_0 = 6$ lautet die Lösungsmenge der Diophantischen Gleichung:

$$\left(\frac{c \cdot 5 - 9 \cdot t}{1}, \frac{c \cdot 6 - 11 \cdot t}{1} \right), \quad t \in \mathbb{Z} \quad (7)$$

Bei c Stockwerken abwärts muß William W -mal die Taste drücken und Diana D -mal drücken:

$$W = c \cdot 5 - 9 \cdot t, \quad D = c \cdot 6 - 11 \cdot t \quad (8)$$

Der Lösungsparameter t muß dabei so gewählt werden, das W und D die minimale, positive Lösungsmenge ergeben. Da $c < 0$ ist (laut Aufgabenstellung soll abwärts gefahren werden), muß immer $t < 0$ gewählt werden. Wir wollen die Bestimmung von t an zwei Beispielen zeigen.

Ein Stockwerk abwärts, $c = -1$

$$W = -1 \cdot 5 - 9 \cdot t \quad \rightarrow \quad t = -1, W = 4 \quad (9)$$

$$D = -1 \cdot 6 - 11 \cdot t, \quad \rightarrow \quad t = -1, D = 5 \quad (10)$$

Probe

$$W \cdot a + D \cdot b = c \quad 4 \cdot 11 + 5 \cdot (-9) = 44 - 45 = -1 \quad (11)$$

Um ein Stock abwärts zu fahren muß William 4 mal drücken (4 x 11 Stockwerke aufwärts) und Diana 5 mal drücken (5 x 9 Stockwerke abwärts).

Vier Stockwerke abwärts, $c = -4$

$$W = -4 \cdot 5 - 9 \cdot t \quad \rightarrow \quad t = -3, W = 7 \quad (12)$$

$$D = -4 \cdot 6 - 11 \cdot t, \quad \rightarrow \quad t = -3, D = 9 \quad (13)$$

Probe

$$W \cdot a + D \cdot b = c \quad 7 \cdot 11 + 9 \cdot (-9) = 77 - 81 = -4 \quad (14)$$

Um vier Stock abwärts zu fahren muß William 7 mal drücken (7 x 11 Stockwerke aufwärts) und Diana 9 mal drücken (9 x 9 Stockwerke abwärts).
