Lösungsweg von Klaus Nagel, München

Das Problem wird dadurch erschwert, daß der Käfer an einer Ecke nicht umdreht. Man umgeht das, wenn man zwei Schritte zusammenfaßt, außer wenn das Ziel erreicht wird. Dann kann der Scarabaeus nur am Start $S = (K_1)$, am Ziel $Z = (K_7)$, oder an einem *geraden* Zwischenpunkt $G = (K_3, K_6, K_8)$ sein. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind :

$$\begin{aligned}
P(S \to G) &= 1, \\
P(G \to S) &= \frac{1}{4} \\
P(G \to G) &= \frac{1}{4} \\
P(G \to Z) &= \frac{1}{2} \\
P(Z \to Z) &= 1
\end{aligned}$$

Die Zahl der durchschrittene Kanten bei n Doppelschritten beträgt $2 \cdot n - 1$. Bezeichnet man die Ecken mit den Zahlen von 0 (Start) bis 7 (Ziel), so kann man die 3 Bits als die Koordinaten der Eckpunkte auffassen. Bei einem Doppelschritt ändert sich die Zahl der Einsen um eine gerade Anzahl, außer beim letzten doppelschritt der zum Ziel führt. Diese Darstellung erlaubt auch eine einfache Programmierung in eines Schritts in C:

```
do {Ecke[n]=Ecke[n-1]^1 << (random() 3;} while (Ecke[n]!= Ecke[n-2]);
```

Vom Start(0) kommt der Käfer in einem Doppelschritt zu einer der Ecken 3, 5 oder 6, das sind Ecken mit genua zwei Einsen, die ich wegen der Geraden Anzahl mit G bezeichnet hatte. Von einer Ecke in G gelangt der Käfer unabhängig von der Vorgeschichte in:

- 1/2 der Fälle zum Ziel
- 1/4 der Fälle zum Start
- 1/4 der Fälle zu einer anderen Ecke in G

Ist der Käfer einmal im Ziel, bleibt er auch dort. Für die Untersuchung interessiert nur in welchem Zustand $Z_1 = Start$, $Z_2 = G$, $Z_3 = Ziel$ der Kaefer ist. In G spielt es keine Rolle, in welchem der drei möglichen Eckpunkte er ist.

$a(i, j)$ sei die Wahrscheinlichkeit, daß der Zustand j in einem Doppelschritt in den Zustand i wechselt. Der Vektor $P = (s, g, z)$ beschreibt die Anteile der drei Zustände, $s + g + z = 1$. Insbesondere haben wir den Anfangszustand $P(0) = (1, 0, 0)$ d.h. alles im Startzustand. Mit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a(1,1) & a(1,2) & a(1,3) \\ a(2,1) & a(2,2) & a(2,3) \\ a(3,1) & a(3,2) & a(3,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

der Übergangswahrscheinlichkeiten ergibt sich die Verteilung der Zustände nach einem Doppelschritt als:

$$P(1) = A \cdot P(0) = (0, 1, 0) \tag{1}$$

oder nach n Doppelschritten

$$P(n) = A^n \cdot P(0) \tag{2}$$

Für die Folgen $s(n)$ und $g(n)$ können rekursive Bildungsgesetze notiert werden:

$$s_{n+1} = \frac{g_n}{4}, \quad g_{n+1} = s_n + \frac{g_n}{4} \tag{3}$$

daraus folgt eine homogene Differenzengleichung 2.Ordnung für g_n:

$$g_{n+1} = \frac{1}{4} \cdot (g_n + g_{n-1}), \quad g_0 = 0, \quad g_1 = 1 \tag{4}$$

Die zugehörige, charakteristische Gleichung lautet :

$$m^2 - \frac{1}{4}\, m - \frac{1}{4} = 0 \tag{5}$$

Nullstellen der charakteristischen Gleichung :

$$m_1 = \frac{1}{8}\left(1 - \sqrt{17}\right), \quad m_2 = \frac{1}{8}\left(1 + \sqrt{17}\right) \tag{6}$$

allgemeine Lösung der Differenzengleichung :

$$g_n = c_1\, (m_1)^n + c_2\, (m_2)^n \tag{7}$$

Aus der Anfangsbedingung $g_0 = 0$, $g_1 = 1$ werden die Konstanten c_1, c_2 bestimmt:

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1\, m_1 + c_2\, m_2 = 1 \quad \rightarrow \quad c_1 = -\frac{4}{\sqrt{17}}, \quad c_2 = \frac{4}{\sqrt{17}} \tag{8}$$

Mit c_1 und c_2 erhalten wir die Lösung der Differenzengleichung (7) zu :

$$g_n = -\frac{2^{2-3n}\left(1 - \sqrt{17}\right)^n}{\sqrt{17}} + \frac{2^{2-3n}\left(1 + \sqrt{17}\right)^n}{\sqrt{17}} \tag{9}$$

Die ersten Glieder der Folge sind :

$$g_0 = 0;\ g_1 = 1;\ g_2 = \frac{1}{4};\ g_3 = \frac{5}{16};\ g_4 = \frac{9}{64};\ g_5 = \frac{29}{256};\ g_6 = \frac{65}{1024};\ g_7 = \frac{181}{4096} \tag{10}$$

Die $k-$te Partialsumme über die Folge g_n lautet:

$$\begin{aligned} d_k = \textstyle\sum_{n=0}^{k}(g_n) = -(2^{5-3k}(2^{1+3k}\sqrt{17} + 3(1 - \sqrt{17})^k - \\ \sqrt{17}(1 - \sqrt{17})^k - 3(1 + \sqrt{17})^k - \sqrt{17}(1 + \sqrt{17})^k))/ \\ (\sqrt{17}(-7 + \sqrt{17})(7 + \sqrt{17})) \end{aligned}$$

Schließlich berechnen wir den Grenzwert der Reihe :

$$d = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{2^{2-3n}\left(1-\sqrt{17}\right)^n}{\sqrt{17}} + \frac{2^{2-3n}\left(1+\sqrt{17}\right)^n}{\sqrt{17}} \right] = \frac{-64}{\left(-7+\sqrt{17}\right)\left(7+\sqrt{17}\right)} = 2 \quad (11)$$

Mit diesem Ergebnis können wir den gesuchten Erwartungswert E der Doppelschritte berechnen:

```
E =     einen Schritt fuer alle Kaefer, die zur Zeit 0 nicht im Ziel sind,
      + einen Schritt fuer alle Kaefer, die zur Zeit 1 nicht im Ziel sind,
      + einen Schritt fuer alle Kaefer, die zur Zeit 2 nicht im Ziel sind,
      + ....
```

also

$$E = \sum_{i=0}^{\infty}(1-z_i) = (1-z_0) + (1-z_1) + (1-z_2) + \ldots \quad (12)$$

Die Summe der Übergangswahrscheinlichkeiten im $n-$ten Schritt beträgt

$$z_n + s_n + g_n = 1 \quad \rightarrow \quad 1 - z_n = s_n + g_n \quad (13)$$

Nach Gleichung (3) beträgt:

$$g_n + s_n = g_n + \frac{g_{n-1}}{4} \quad (14)$$

Die Summation über $1 - z_n$ sieht damit wie folgt aus :

$$\begin{aligned}
1 - z_0 &= s_0 + g_0 = 1 + 0 \\
1 - z_1 &= s_1 + g_1 = g_1 + g_0/4 = g_1 + 0 \\
1 - z_2 &= s_2 + g_2 = g_2 + g_1/4 \\
1 - z_3 &= s_3 + g_3 = g_3 + g_2/4 \\
1 - z_4 &= s_4 + g_4 = g_4 + g_3/4 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

$$E = \sum_{i=0}^{\infty}(1-z_i) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} g_i + \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} g_i = 1 + 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 3.5 \quad (15)$$

Das sind die zu erwartenden Doppelschritte. Die zu erwartenden Kanten betragen :

$$K = 2 \cdot E - 1 = 6. \quad (16)$$

Die 1 ist abzuziehen, weil der zum Ziel führende Doppelschritt nur eine Kante durchläuft.