Mathematik-Zirkel

Die Beziehung von Stewart und Anwendugen

Autor: Peter Andree

4 Die Beziehung von Stewart und Anwendugen

Inhaltsverzeichnis

4.1 Der Satz von Stewart

Eine leistungsstarke Beziehung für Streckenberechnungen liefert der *Satz von Stewart*, der in den meisten Geometriebüchern verschwiegen wird.

Satz – – Die Beziehung von Stewart
Gegeben wird das Dreieck ABC und $M \in [BC]$. Es gilt die Beziehung

$$|AB|^2 \cdot |MC| + |AC|^2 \cdot |MB| - |AM|^2 \cdot |BC| = |BC| \cdot |MB| \cdot |MC| \tag{1}$$

□

Beweis: Betrachten wir die Abbildung (1). Im weiteren Verlauf wenden wir den allgemeinen *Satz von Pythagoras* in zwei Dreiecken an.

$$\triangle ABM: \qquad |AB|^2 = |AM|^2 + |MB|^2 - 2 \cdot |HM| \cdot |MB| \tag{2}$$
$$\triangle ACM: \qquad |AC|^2 = |AM|^2 + |MC|^2 + 2 \cdot |HM| \cdot |MC| \tag{3}$$

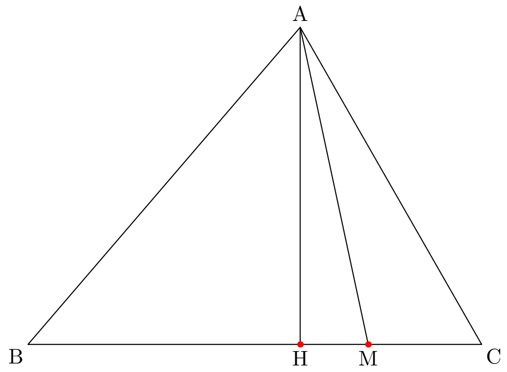

Abbildung 1: Satz von Stewart

Multipliziert man nun die Beziehung (2) mit $|MC|$, die Beziehung (3) mit $|MB|$ und addiert die beiden Ergebnisse, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} |AB|^2 |MC| + |AC|^2 |MB| &= |AM|^2 (|MC| + |MC|) + |MB|^2 |MC| + |MC|^2 |MB| \\ &= |AM|^2 |BC| + |MC| \cdot |MB| (|MC| + |MB|) \\ &= |AM|^2 |BC| + |MC| \cdot |MB| \cdot |BC| , \end{aligned}$$

was zu beweisen galt. □

Damit ist der *Beziehung von Stewart* bewiesen. Um seine Leistungsstärke zu unterstreichen, behandeln wir jetzt einige Anwendungen.

4.2 Länge der Schwerlinien im Dreieck

Es sei unsere Abbildung (1), in der $|AB| = c, |BC| = a$ und $|CA| = b$ und $|BM| \equiv |MC|$, d.h., $|AM|$ ist die Schwerlinie, die wir auch m_a bezeichnen. In (1) eingesetzt, erfolgt

$$c^2 \cdot \frac{a}{2} + b^2 \cdot \frac{a}{2} - |AM|^2 \cdot a = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a \Rightarrow |AM|^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = m_a^2. \tag{4}$$

Analog, können auch die beiden anderen Schwerlinien geschrieben werden.

Satz – Länge der Schwerlinien im Dreieck
In einem Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c gilt für die Länge der Schwerlinien:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \quad m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}, \quad m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \tag{5}$$

□

Bemerkung: Es gilt die Beziehung $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

Satz –
Es sei das Dreieck ABC und der Schwerpunkt S. Es gilt die Beziehung

$$3\left(|SA|^2 + |SB|^2 + |SC|^2\right) = a^2 + b^2 + c^2 \tag{6}$$

□

Beweis: Der Beweis kann als einfache Übung durchgeführt werden □

4.3 Länge der Winkelhalbierenden im Dreieck

Es sei nun $|AM|$ die Winkelhalbierende, auch w_a bezeichnet. Aus dem Satz der Winkelhalbierenden folgt

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|MB|}{|MC|} \Rightarrow \frac{|AB|}{|AC| + |AB|} = \frac{|MB|}{|MC| + |MB|} \Rightarrow \frac{c}{b+c} = \frac{|MB|}{a} \Rightarrow |MB| = \frac{ac}{b+c}.$$

Analog ergibt sich $|MC| = \dfrac{ab}{b+c}$. Mit den berechneten Strecken lautet die *Beziehung von Stewart*:

$$c^2 \cdot \frac{ab}{b+c} + b^2 \cdot \frac{ac}{b+c} - |AM|^2 \cdot a = \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ac}{b+c} \cdot a \Rightarrow |AM|^2 = bc\left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]$$

Satz – Länge der Winkelhalbierenden
In einem Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c gilt für die Länge der Winkelhalbierenden:

$$w_a^2 = bc\left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right], \quad w_b^2 = ac\left[1 - \left(\frac{b}{a+c}\right)^2\right], \quad w_c^2 = ab\left[1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right] \tag{7}$$

□

Bemerkung: Es sei $[AE]$, $E \in (BC)$, die Winkelhalbierende des Außenwinkels von $\angle A$. Dann ergibt

$$|AE|^2 = bc\left[\left(\frac{a}{c-b}\right)^2 - 1\right].$$

4.4 Länge der Höhen im Dreieck

Satz – Länge der Höhen
In einem Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c bezeichnen wir

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

den halben Umfang. Für die Länge der Höhen gilt:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$
$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$
$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

□

Beweis: Der Beweis kann als Übungsaufgabe gemacht werden. □

Bemerkung: Aus den Höhenlängen kann sofort die *Formel von Heron* für die Dreiecksfläche abgeleitet werden:

$$A_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$