300 Aufgaben

zur Geometrie und zu Ungleichungen

insbesondere zur Vorbereitung auf Mathematik-Olympiaden

Version 2.5 (Dezember 2000)

von

Dr. Eckard Specht

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Naturwissenschaften

© *Kopieren und Vervielfältigung ausdrücklich erlaubt.*

Dieses Dokument kann jederzeit als PostScript-Datei mit `anonymous ftp` vom Server `hydra.nat.uni-magdeburg.de/pub/geometry` heruntergeladen werden. Hier die entsprechenden Linux-Kommandos (Tastatureingaben sind unterstrichen):

```
$ ftp 141.44.46.52
Connected to 141.44.46.52.
220 hydra FTP server (Version wu-2.4(1) Tue Dec 5 20:51:15 CST 1995) ready.
Name (141.44.46.52:blah): anonymous
331 Guest login ok, send your complete e-mail address as password.
Password:<your_complete_email_address>
230 Guest login ok, access restrictions apply.
ftp> cd pub/geometry
250 CWD command successful.
ftp> bin
200 Type set to I.
ftp> get geom_2.5.ps
200 PORT command successful.
150 Opening BINARY mode data connection for geom_2.5.ps (2408182 bytes).
226 Transfer complete.
2108634 bytes received in 0.314 secs (1.0e+33 Kbytes/sec)
ftp> bye
221 Goodbye.
$
```

Online kann man sich die Aufgaben unter

`http://www.math4u.de`

ansehen.

Vorwort

Zu den Gebieten der Mathematik, die von SchülerInnen anscheinend nicht besonders geliebt werden, gehört die *Elementargeometrie*. Obwohl sie zu den ältesten wissenschaftlichen Disziplinen überhaupt zählt, scheint es so, daß eine Vielzahl ihrer Erkenntnisse und bemerkenswerten Entdeckungen seit Euklid (365–300 v. Chr.) im Laufe der Jahrhunderte verloren gegangen sind. Selbst ein Aufblühen im 19. Jahrhundert, in dem zahlreiche und bis dahin unbekannte oder inzwischen wieder vergessene Beziehungen zwischen Punkten, Geraden, Kreisen im Dreieck gefunden wurden, vermochte die Elementargeometrie offenbar nicht als attraktive Wissenschaft in die Neuzeit hinüberzuretten. So spielen in der heutigen Zeit diese, mit Namen großer Geometer belegter Entdeckungen im Allgemeinwissen eigentlich keine Rolle mehr.

Mitunter sieht man Mathematiker etwas geringschätzig auf die Elementargeometrie herabblicken. Sicherlich ist sie nicht so abstrakt wie andere Gebiete, die zudem häufig einen eigenen Kalkül entwickelt haben und dessen Beherrschung die Mathematiker zu Spezialisten macht. Doch gerade das Fehlen dieser systematischen Lösungsmethoden macht sie zu einer hochgradig intuitiven Angelegenheit und für jeden verständlich — auch ohne absolviertes Studium! Sie ist also bestens geeignet, logisches Denkvermögen, Ausdauer und Konzentration zu trainieren, ganz gleich für welchen Wissenschaftszweig oder Altersgruppe auch immer (sogar rüstige Rentner entdecken sie oft für sich neu). Leider Gottes ist sie streng axiomatisch aufgebaut, so daß ihr Hauptinhalt aus *Sätzen* und den notwendig zugehörigen *Beweisen* besteht. Und daß das abschreckend ist, kann man dann auch wieder verstehen :-)

Die vorliegende Aufgabensammlung entstand ursprünglich als Zusammenstellung von Themen, die ich anläßlich der alljährlich im April in Gardelegen stattfindenden Vorbereitungskurse der nominierten Teilnehmer Sachsen-Anhalts an der Deutschen Mathematik-Olympiade in den Klassenstufen 9 und 10 behandelte; später kam auch Material für die Abiturstufe hinzu. In diesen dreieinhalbtägigen Kursen stand vor allem das **Training des Lösens von Aufgaben** und die **Diskussion von Lösungsansätzen** im Vordergrund. Die systematische Vermittlung von Stoffgebieten, wie z. B. Trigonometrie, analytische Geometrie oder Vektorrechnung, war dabei *nicht* vorrangiges Ziel dieser Kurse, obwohl die Erfahrung zeigt, daß auch hier ein Interesse besteht, über den Schulunterricht hinausgehendes Wissen zu erwerben. Aus diesem Grunde wurden auch einige ältere Olympiade-Aufgaben und vor allem historisch interessante geometrische Probleme aufgenommen. Großes Gewicht wurde auf die ausführlichen Lösungen gelegt, wobei eher die Lösungsideen und nicht die strenge Beweisführung im Vordergrund standen.

Obwohl *Ungleichungen* augenscheinlich nicht viel mit Geometrie zu tun haben außer der Tatsache, daß es ein ziemlich eigenständiges Gebiet *geometrischer Ungleichungen* gibt (s. Kapitel G), sind zwei (noch sehr unvollständige) Kapitel hinzugekommen, die dieses Thema näher beleuchten. Gerade in höher angesiedelten Wettbewerben wie der Internationalen Mathematik-Olympiade sind Ungleichungen eine durchaus beliebte Rubrik.

Die vorliegende Broschüre bemüht sich daher, einerseits eine (immer unvollständig bleibende) Faktensammlung zu sein und andererseits auch einige Methoden, Tips und Tricks vorzustellen, die benötigt werden um geometrische Puzzles erfolgreich zu lösen.

Für inhaltliche Anregungen und Verbesserungshinweise bin ich jederzeit dankbar.

Ich wünsche viel Spaß und Erfolg beim Lösen der Aufgaben!

Magdeburg, 23. Dezember 2000

E. Specht
e-mail: specht@hydra.nat.uni-magdeburg.de

Hinweise zur Schreibweise

Es wird eine teilweise vom Schulunterricht abweichende Bezeichnung verwendet:

- AB kann sowohl eine zwischen zwei Punkten A und B gelegene Strecke bezeichnen als auch deren Länge (sonst häufig $|AB|$, $\overline{AB}$ oder sogar $|\overline{AB}|$). Aus dem Kontext geht jedoch i. a. immer hervor, was gerade gemeint ist.
- Eine durch A, B gehende Gerade bezeichnen wir mitunter auch mit $g(A, B)$.
- Wird eine Größe durch eine andere *definiert* (um sie z. B. als Abkürzung zu verwenden), schreiben wir $l \equiv AB$.
- Kreise k sind durch Angabe des Mittelpunktes O und eines Punktes A auf dessen Peripherie eindeutig bestimmt; wir verwenden daher die Schreibweise O_A. Ist dagegen anstelle eines Punktes auf der Peripherie der Radius $r = XY$ als Strecke gegeben, schreiben wir O_r oder O_{XY}.
- Den Flächeninhalt eines Polygons $ABC\ldots Z$ bezeichnen wir kurz mit $[ABC\ldots Z]$; bei Dreiecken notieren wir stets Δ.
- Vektoren erscheinen im Text fett gedruckt und werden in Bildern mit einem Pfeil über dem Symbol gekennzeichnet.

Aufgaben werden einheitlich mit dem Kapitelbuchstaben und einer ein- oder zweistelligen Nummer bezeichnet (z. B. M.41). Gleichungen stehen in runden Klammern und werden kapitelweise bei den Aufgaben beginnend mit 1, bei den Lösungen beginnend mit 101, durchnumeriert. Literaturhinweise werden von eckigen Klammern eingeschlossen.

Besteht eine Aufgabe nur aus einer Aussage *„Blah, blah, blah ...“*, so ist als Lösung immer der Beweis des Satzes gefordert. Gleiches gilt auch für eine einzelne Gleichung oder Ungleichung. Dieses kleine Quadrat „□“ gibt stets das Ende eines Beweises an; es steht also für „w. z. b. w.“ (was zu beweisen war) oder „q. e. d.“ (quod erat demonstrandum). Eine weitere gebräuchliche Abkürzung ist „o. B. d. A.“ (ohne Beschränkung der Allgemeinheit).

Kursiv gesetzte Ländernamen mit Jahreszahlen (z. B. *Peru, 1857*) geben an, daß die betreffende Aufgabe in jenem Jahr eine Olympiadeaufgabe war.

Abkürzungen

AIME — *American Invitational Mathematics Competition*
APMO — *Asian Pacific Mathematical Olympiad*
IMO — *Internationale Mathematik-Olympiade*
IMTS — *International Mathematical Talent Search*
NMC — *Nordic Mathematical Contest*

Inhaltsverzeichnis

A KONSTRUKTIONEN . . . 7
A.1 Euklidische Konstruktionen . . . 8
A.2 Geometrische Örter . . . 9
A.3 Kreiskonstruktionen . . . 11
A.4 Mohr-Mascheronische Konstruktionen . . . 12
A.5 Verschiedene Konstruktionen . . . 13

B DREIECKSKONSTRUKTIONEN . . . 15
B.1 Die Grundaufgaben . . . 16
B.2 Auffinden von Hilfsdreiecken . . . 16
B.3 Berechnung fehlender Stücke . . . 18
B.4 Rekonstruktion aus gegebenen Punkten . . . 18

K KREISE . . . 19
K.1 Winkel und Längen . . . 19
K.2 Inversion am Kreis . . . 20
K.2.1 Eigenschaften der Inversion . . . 21
K.2.2 Anwendungen zur Inversion . . . 23
K.3 Anwendungen . . . 23

D DREIECKE . . . 25
D.1 Klassische Transversalen . . . 25
D.2 Ceva & Menelaus . . . 28
D.3 Extremalaufgaben . . . 31
D.4 Einige Formeln . . . 32
D.5 Lotfußpunktdreiecke . . . 34
D.6 Noch mehr über Dreiecke . . . 35

V VIERECKE . . . 37
V.1 Allgemeine Vierecke . . . 38
V.2 Trapeze, Parallelogramme, Rhomben etc. . . . 38
V.3 Sehnenvierecke . . . 39
V.4 Tangentenvierecke . . . 39
V.5 Sehnentangentenvierecke . . . 40

M METHODEN . . . 41
M.1 Vektorrechnung . . . 41
M.2 „Winkel jagen“ . . . 42
M.3 Verwandlung von Figuren . . . 43
M.4 Das Flächenprinzip . . . 44

W WETTBEWERBSAUFGABEN 49
W.1 Deutsche Mathematik-Olympiade 50
W.2 Nationale Wettbewerbe 53
W.3 Internationale Wettbewerbe 54
W.4 Crux Mathematicorum 55

U UNGLEICHUNGEN 57
U.1 Fundamentale Ungleichungen 58
U.2 Einfache Tips und Tricks 61
U.2.1 „Teile und (be)herrsche“ 62
U.2.2 Die Arbeitspferde: AM-GM und Cauchy-Schwarz 63
U.2.3 AM-HM Kandidaten 65
U.2.4 Ungleichungen unter Nebenbedingungen 65
U.3 Elementare symmetrische Funktionen 66
U.4 Weitere Ungleichungen 68

G GEOMETRISCHE UNGLEICHUNGEN 71
G.1 Ungleichungen im Dreieck 71
G.1.1 Ungleichungen für die Seitenlängen 72
G.1.2 Ungleichungen für die Winkel 73
G.1.3 Ungleichungen für die Radien 73
G.1.4 Ungleichungen für die Seiten- und Winkelhalbierenden 73
G.2 Ungleichungen in Vierecken 73

X HINWEISE 75

Y LITERATUR 79
Y.1 Bücher 79
Y.2 Zeitschriften-Artikel 82
Y.3 Zeitschriften 82
Y.4 WWW-Adressen 82

A

KONSTRUKTIONEN

Eines der ältesten Spiele der Welt ist das Spiel mit Zirkel und Lineal. Die zugehörigen Spielregeln wurden vor langer Zeit von PLATO aufgestellt und legen fest, daß das Lineal nur dazu benutzt werden darf, um gerade Linien durch gegebene Punkte zu ziehen. Mit dem Zirkel dürfen nur Kreise gezeichnet werden, die einen vorgegebenen Punkt als Mittelpunkt haben und durch einen weiteren Punkt gehen. Manchen Spielern ist das zu einfach, sie erlegen sich daher Einschränkungen auf, wie z. B. ein fest eingestellter Zirkel. Etwas Verwegene dagegen benutzen allein das Lineal, nachdem sie einen einzigen Kreis gezeichnet haben. Oder sie verzichten ganz auf das Lineal und benutzen allein einen Zirkel. Andere Spieler wiederum verwenden andere Hilfsmittel, etwa das markierte Lineal (ein Lineal mit zwei Marken an seiner Kante) oder Streichhölzer. Wer mehr dazu wissen will, dem sei [Bie52], [Mar98] oder [Sma98] empfohlen.

Das Ziel all dieser Spiele ist es, geometrische Konstruktionen auszuführen, in deren Ergebnis Figuren mit bestimmten Eigenschaften vorliegen. Um die geforderten Eigenschaften nachzuweisen, müssen wir oft die Algebra, Analytische Geometrie oder die Vektorrechnung bemühen. Es gibt umfangreiche mathematische Theorien, aus denen folgt, welche Figuren mit welchen Hilfsmitteln konstruiert werden können und welche nicht. Die berühmtesten drei antiken Probleme, die sich *nicht* mit Zirkel und Lineal in einer endlichen Anzahl von Schritten lösen lassen, kennt jeder:

1. **Die Dreiteilung eines beliebigen Winkels.** Gegeben sei ein *beliebiger* ebener Winkel. Man teile ihn mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile.
2. **Die Verdopplung des Würfels (Delianisches Problem).** Gegeben sei eine Strecke der Länge 1. Man konstruiere daraus mit Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge $\sqrt[3]{2}$.
3. **Die Quadratur des Kreises.** Gegeben sei eine Strecke der Länge 1. Man konstruiere daraus mit Zirkel und Lineal ein Quadrat mit dem Flächeninhalt π.

Es gab in der Vergangenheit zahlreiche Versuche (und es gibt sie noch heute), die behaupten, eine Lösung dieser klassischen Probleme gefunden zu haben, obwohl *bewiesen* ist, daß es nicht gehen kann. Zu diesem Thema gibt es eine recht unterhaltsame Literatur [Cou62], [Dun94, p. 237–247], [Dud92] und viele interessante Links [WWW.1–3].

A.1 Euklidische Konstruktionen

Um ebene Geometrie oder *Planimetrie* erfolgreich betreiben zu können, benötigen wir das dazu notwendige grundlegende Handwerkszeug. Darunter verstehen wir all diejenigen Konstruktionsaufgaben, die den meisten von uns aus der Schule bekannt sind und auf die bei der Lösung schwierigerer Aufgaben immer wieder zurückgegriffen wird. Man nennt sie auch die *Grundaufgaben der Planimetrie*. Dabei setzen wir nach PLATO voraus, daß uns als Hilfsmittel lediglich ein Lineal (ohne Maßeinteilung) und ein Zirkel zur Verfügung stehen. Darüber hinaus gibt es auch geometrische Konstruktionen, die mit eingeschränkteren Hilfsmitteln zu bewerkstelligen sind, wie etwa allein mit einem Zirkel; wir verweisen hier auf Abschnitt A.4.

Die folgenden Aufgaben, die also gewissermaßen das Fundament aller Fertigkeiten bei geometrischen Konstruktionen darstellen, können daher von geübten Lesern ruhig übersprungen werden.

A.1 **Errichten der Senkrechten.** In einem Punkt P auf einer Geraden g ist die Senkrechte zu errichten.

A.2 **Mittelsenkrechte.** Man konstruiere die Mittelsenkrechte einer gegebenen Strecke AB.

A.3 **Fällen des Lotes.** Gegeben sei eine Gerade g und ein Punkt P, der nicht auf g liegt. Man fälle das Lot von P auf g.

A.4 **Parallele zu einer Geraden.** Gegeben sei eine Gerade g und ein Punkt P, der nicht auf g liegt. Man konstruiere diejenige Gerade, die durch P geht und parallel zu g verläuft.

A.5 **Winkelhalbierende.** Gesucht ist die Winkelhalbierende eines beliebigen ebenen Winkels.

A.6 **Abtragen eines Winkels.** Man trage an eine gegebene Gerade g in einem bestimmten Punkt einen gegebenen Winkel ab.

Es gibt noch weitere Aufgaben, die ebenfalls als „Grundbausteine“ geometrischer Konstruktionen betrachten werden können, so wie sie in komplexeren Lösungen immer wieder auftreten. Wir betrachten hier nur eine Auswahl:

A.7 **Drehen einer Strecke.** Eine gegebene Strecke AB ist um einen Punkt P und um einen bestimmten Winkel α zu drehen.

A.8 **Kreis durch drei Punkte.** Es ist ein Kreis zu beschreiben, der durch drei Punkte A, B, C einer Ebene geht, die nicht sämtlich auf einer Geraden liegen.

A.9 **Anlegen der Tangenten.** Von einem außerhalb eines Kreises liegenden Punkt sind die Tangenten an den Kreis zu legen.

A.10 **Gemeinsame Tangenten zweier Kreise.** Von zwei gegebenen Kreisen sind die gemeinsamen Tangenten zu bestimmen.

A.11 **Vierte Proportionale.** Gesucht ist die *vierte Proportionale* q dreier gegebener Strecken m, n und p; das heißt, es soll gelten:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}.$$

A.12 **Teilen einer Strecke.** Wie läßt sich eine gegebene Strecke a) innerlich, b) äußerlich in einem rationalen Verhältnis $m : n$ $(m, n > 0)$ teilen?

A.13 **Stetige Teilung (Goldener Schnitt).** Eine Strecke AB ist durch einen auf ihr liegenden Punkt C so zu teilen, daß der größere Abschnitt AC die mittlere Proportionale aus dem kleineren Abschnitt CB und der gesamten Strecke AB wird: $AC : CB = AB : AC$.

A.14 **Mittelwerte. Mittlere Proportionale.** Man konstruiere a) das arithmetische, b) das geometrische und c) das harmonische Mittel zweier Strecken l_1 und l_2.

A.15 **Quadratische Gleichung.** Wie lassen sich mit Zirkel und Lineal die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 \pm px \pm q = 0 \qquad \text{mit} \qquad x > 0$$

konstruieren, wenn $p > 0$ eine gegebene Länge und $q > 0$ ein gegebener Flächeninhalt (etwa durch die Kantenlänge $a \equiv \sqrt{q}$ eines Quadrates) ist?

A.2 Geometrische Örter

Oft werden bei der Lösung geometrischer Aufgaben Punkte in der Ebene gesucht, die auf einer gewissen (geraden oder „krummen“) Linie liegen und gleichzeitig eine bestimmte Bedingung erfüllen. Gibt es außerhalb dieser Linie keinen weiteren Punkt, der die geforderte Eigenschaft besitzt, so nennt man diese Linie den *geometrischen Ort* aller Punkte, die gerade jene Bedingung erfüllen. Einfache Beispiele für geometrische Örter sind:

1. Der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt dieser Ebene einen bestimmten Abstand haben, ist der Kreis um den gegebenen Punkt mit dem Abstand als Radius.
2. Der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, die von zwei gegebenen Punkten gleich weit entfernt sind, ist die Mittelsenkrechte auf deren Verbindungsstrecke.
3. Der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, die von einer gegebenen Geraden einen vorgegebenen Abstand haben, ist das Parallelenpaar zur gegebenen Geraden in diesem Abstand.
4. Der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, die von zwei festen Parallelen gleichen Abstand haben, ist die Mittelparallele zu den beiden gegebenen Parallelen.
5. Der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, die von zwei sich schneidenden Geraden den gleichen Abstand haben, sind die beiden (senkrecht aufeinanderstehenden) Winkelhalbierenden der durch die Geraden gebildeten Winkel.

6. **Thales-Kreis.** Der geometrische Ort der Scheitelpunkte aller rechten Winkel, deren Schenkel durch zwei feste Punkte A und B gehen, ist der Kreis über der Strecke AB als Durchmesser.

Ein geometrischer Ort kann aber auch ein einzelner Punkt oder ein flächenhaftes Gebiet der Ebene sein, je nachdem, wieviel Bedingungen gestellt werden. Allgemein ist festzustellen: Je mehr Bedingungen zu erfüllen sind, desto niedriger ist die Zahl der Freiheitsgrade und damit die Dimension des geometrischen Ortes.

Der Vorteil, den der Begriff geometrischer Ort bietet, besteht in der einfachen Umsetzung von Bedingungen, die bestimmte Punkte erfüllen sollen, in eine *Konstruktionsvorschrift*. Dabei können durchaus mehrere Bedingungen miteinander verknüpft sein. Der zweifellos am häufigsten auftretende Fall ist der, daß Bedingung X *und* Bedingung Y zu erfüllen sind und somit der gesuchte geometrische Ort der *Schnittpunkt* $X \cap Y$ (im Sinne eines mengentheoretischen Durchschnitts) beider einzelner Orte ist. Wird z. B. ein Punkt P gesucht, der von zwei gegebenen Punkten A und B den Abstand $r \equiv AB$ hat, so kann mit Hilfe obiger Aussagen sofort gefolgert werden, daß P der Schnittpunkt der beiden Kreise $k_1 \equiv A_r$ und $k_2 \equiv B_r$ sein muß. Weiterhin ist damit auch klar, daß stets zwei Punkte P und P' existieren, die diese Bedingung erfüllen, nämlich diejenigen, für die die Dreiecke ABP und ABP' gleichseitig sind.

Weitere geometrische Örter werden wir in den folgenden Aufgaben betrachten:

A.21 **Konstanter Sehwinkel.** Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte P einer Ebene, von denen aus eine gegebene Strecke AB unter einem konstanten, gegebenen Winkel erscheint, d. h., es sei $\measuredangle APB \equiv \alpha = \text{const}$.

A.22 **Kreis des Apollonius.** Gesucht ist derjenige geometrische Ort aller Punkte P einer Ebene, für den der Quotient der Abstände zu zwei fest vorgegebenen Punkten A und B einen konstanten Wert $PA/PB \equiv q = \text{const}$ annimmt.

A.23 Gesucht ist derjenige geometrische Ort aller Punkte P einer Ebene, für den die Summe der Quadrate der Abstände zu zwei fest vorgegebenen Punkten A und B einen konstanten Wert $PA^2 + PB^2 \equiv e^2 = \text{const}$ annimmt.

A.24 **Isoscelizer.**† Gegeben seien zwei nichtparallele Geraden sowie ein beliebiger Punkt P in der Ebene, der nicht mit dem Schnittpunkt beider Geraden zusammenfällt. Welches ist der geometrische Ort aller derjenigen Punkte, für die die Summe der Abstände zu den Geraden gleich der Abstandssumme von P zu den Geraden ist?

†Leider gibt es hierfür kein vernünftiges deutsches Wort: „Gleichschenkligmacher“ wäre eine mögliche Übersetzung. Wir belassen es daher bei dem englischsprachigen Begriff.

A.25 Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller von A ausgehenden Sehnen eines Kreises M_A?

A.26 Ein Boot mit Schmugglern bewegt sich in Küstennähe senkrecht auf das Ufer zu. Zu einem bestimmten Zeitpunkt wird es von einem Patrouille-Schnellboot† geortet. Welchen Kurs muß letzteres zum Aufbringen steuern, wenn die Positionen und die (als konstant vorausgesetzten) Geschwindigkeiten beider Boote bekannt sind?

†Nehmen wir spaßenshalber einmal an, der Zoll habe das schnellere Boot.

A.27 Gesucht ist derjenige geometrische Ort aller Punkte P einer Ebene, für den der Quotient der Abstände zu zwei gegebenen Geraden g und h einen konstanten Wert q hat.

A.3 Kreiskonstruktionen

Die wohl bekanntesten Kreiskonstruktionen gehen auf antike Zeiten zurück; man faßt sie auch unter dem Namen *„Berührungsproblem des Apollonius“* zusammen. Die Aufgabe besteht darin, Kreise zu finden, die drei gegebene Kreise berühren. Dabei ist zugelassen, daß die gegebenen Kreise auch in Punkte oder Geraden entartet sein können. Insgesamt ergeben sich zehn verschiedene Fälle der Kombination von vorgegebenen Stücken P (Punkt), G (Gerade) und K (Kreis):

1. drei Punkte (PPP),
2. zwei Punkte und eine Gerade (PPG),
3. ein Punkt und zwei Geraden (PGG),
4. drei Geraden (GGG),
5. zwei Punkte und ein Kreis (PPK),
6. ein Punkt, eine Gerade und ein Kreis (PGK),
7. ein Punkt und zwei Kreise (PKK),
8. zwei Geraden und ein Kreis (GGK),
9. eine Gerade und zwei Kreise (GKK) und
10. drei Kreise (KKK).

Wir beginnen mit den ersten vier Fällen:

A.31 **Berührungsproblem des Apollonius (PPP).** Gesucht sind Kreise, die durch drei gegebene Punkte P_1, P_2 und P_3 gehen.

A.32 **Berührungsproblem des Apollonius (PPG).** Gesucht sind Kreise, die durch zwei gegebene Punkte P_1 und P_2 gehen und die Gerade g berühren.

A.33 **Berührungsproblem des Apollonius (PGG).** Gesucht sind Kreise, die durch einen gegebenen Punkt P gehen und zwei Geraden g_1 und g_2 berühren.

A.34 **Berührungsproblem des Apollonius (GGG).** Gesucht sind Kreise, die drei gegebene Geraden g_1, g_2 und g_3 berühren.

Die nachfolgende Tabelle A.1 enthält eine Zusammenfassung der Lösungsmöglichkeiten des Berührungsproblems des Apollonius ($w(g_1, g_2)$ bedeutet für $g_1 \nparallel g_2$ die Winkelhalbierende und für $g_1 \parallel g_2$ die Mittelparallele beider Geraden).

Tabelle A.1. Anzahl der Lösungen beim Berührungsproblem des Apollonius

Gegeben	Bedingung	Anzahl
P_1, P_2, P_3	Punkte nicht kollinear	1
	Punkte kollinear	0
P_1, P_2, g	$P_1, P_2 \notin g$ und $h(P_1, P_2) \nparallel g$	2
	$P_1, P_2 \notin g$ und $h(P_1, P_2) \parallel g$	1
	genau ein Punkt auf g	1
	beide Punkte auf g	0
	beide Punkte in unterschiedlichen Halbebenen	0
P, g_1, g_2	$g_1 \nparallel g_2$ und P nicht auf einer Geraden	2
	$g_1 \parallel g_2$ und P zwischen beiden Geraden	2
	P auf genau einer Geraden	1
	$P = (g_1 \cap g_2)$	0
	$g_1 \parallel g_2$ und P nicht zwischen beiden Geraden	0
g_1, g_2, g_3	3 Schnittpunkte der drei Geraden	4
	genau zwei Geraden parallel	2
	alle drei Geraden parallel	0
	nur ein Schnittpunkt der drei Geraden	0

A.4 Mohr-Mascheronische Konstruktionen

In gewohnter Weise verstehen wir unter der Aufgabe, eine geometrische Konstruktion durchzuführen, diese mit den Hilfsmitteln Zirkel und Lineal zu bewerkstelligen. Es erscheint aber durchaus angebracht danach zu fragen, ob dieselben Aufgaben nicht ebenso mit *nur einem* dieser Geräte gelöst werden können.

Dieser Abschnitt beschäftigt sich damit, diejenigen geometrischen Konstruktionen zu erörtern, für die ausschließlich der *Zirkel* zugelassen ist. Als erster nahm sich Georg Mohr dieser Problemstellung an. Sein 1672 erschienenes Buch *„Euclidis Danicus“* war jedoch lange Zeit verschollen, bis es 1927 von J. Hjelmslev in einer Kopenhagener Buchhandlung wieder aufgefunden wurde. Aus diesem Grunde wird häufig der italienische Mathematiker Lorenzo Mascheroni als Wegbereiter der „Geometrie des Zirkels“ angesehen, der ohne Kenntnis von Mohrs Ideen im Jahre 1797 sein Werk *„La geometria del compasso“* veröffentlichte. Als Literatur zu diesem Thema sei [Bie52], [Enr07], [Mar98] empfohlen.

Analysieren wir einmal die einzelnen Schritte, die bei einer herkömmlichen Konstruktion mit Zirkel und Lineal auszuführen sind, so erkennen wir, daß jeder Schritt in eine der drei folgenden *Grundkonstruktionen* zerfällt:

1. die Schnittpunkte zweier Kreise zu bestimmen,
2. die Schnittpunkte einer Geraden und eines Kreises zu finden und
3. den Schnittpunkt zweier Geraden zu ermitteln.

Demgemäß haben wir lediglich zu zeigen, daß sich die beiden Grundkonstruktionen *2* und *3* mit dem Zirkel allein bewerkstelligen lassen. Da selbstverständlich mit dem Zirkel keine Gerade gezogen werden kann, gilt in diesem Abschnitt eine solche als gegeben oder bestimmt, wenn zwei ihrer Punkte bekannt sind.

Bevor wir zu den beiden Grundkonstruktionen kommen, müssen noch einige Vorarbeiten erledigt werden:

A.41 Durch einen Punkt A ist die Parallele zu einer Geraden BC zu ziehen.

A.42 Es ist eine gegebene Strecke OA zu verdoppeln, zu verdreifachen usw.

A.43 Ein gegebener Punkt C ist bezüglich einer Geraden AB zu spiegeln.

A.44 Es ist ein Kreisbogen zu halbieren.

A.45 Gesucht ist die vierte Proportionale q zu drei gegebenen Strecken m, n und p.

Nach diesen „aufwärmenden“ Übungen sollte es gelingen, auch Schnittpunkte von Geraden und Kreisen und von Geraden untereinander zu finden. Wir unterscheiden dabei zweckmäßigerweise bei der obigen Grundaufgabe *2* zwischen nichtzentralen und zentralen Geraden sowie bei der Grundaufgabe *3*, ob die Geraden senkrecht aufeinander stehen oder nicht.

A.46 Es sind die gemeinsamen Punkte eines Kreises und einer nicht durch seinen Mittelpunkt gehenden (nichtzentralen) Gerade zu finden.

A.47 Es sind die gemeinsamen Punkte eines Kreises und einer durch seinen Mittelpunkt gehenden (zentralen) Gerade zu finden.

A.48 Es ist der gemeinsame Punkt zweier nicht zueinander senkrechter Geraden zu bestimmen.

A.49 Es ist der gemeinsame Punkt zweier senkrecht aufeinander stehender Geraden zu bestimmen, oder gleichwertig damit: Es ist der Fußpunkt des von einem Punkt auf eine Gerade gefällten Lotes zu bestimmen.

A.50 Man konstruiere den Mittelpunkt einer Strecke.

A.5 Verschiedene Konstruktionen

Abschließend zum Thema Konstruktionen geben wir noch einige „Klassiker“ an.

A.61 Von einem Winkel sind Teile beider Schenkel gegeben; sein Scheitel sei nicht zugänglich. Gesucht ist die Winkelhalbierende.

A.62 In einen Kreissektor ist ein Kreis einzubeschreiben.

A.63 C sei die Mitte der Strecke AB. Über AB, AC und BC als Durchmesser werden Halbkreise nach derselben Seite errichtet. Es soll der Kreis konstruiert werden, welcher die drei Halbkreise berührt.

A.64 In einem Trapez $ABCD$ ist eine Gerade parallel zu den Grundseiten AB und CD zu konstruieren, die das Trapez halbiert.

A.65 Es ist ein Quadrat zu zeichnen, dessen (ggf. verlängerte) Seiten durch vier gegebene Punkte gehen.

A.66 Es ist ein Kreis zu beschreiben, der durch die Punkte A, B geht und aus der Geraden g eine Sehne der Länge s herausschneidet.

A.67 Es ist ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben, dessen Ecken auf drei Parallelen liegen.

A.68 Gegeben sei eine Gerade g sowie zwei nicht auf ihr, aber in derselben Halbebene liegende Punkte A und B. Gesucht sind diejenigen Punkte C auf g, für die CB die Winkelhalbierende von CA und g ist.

A.69 Es ist ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben, dessen Ecken auf den Umfängen dreier konzentrischer Kreise liegen.

A.70 **Zauberspiegel**[†]**.** Gegeben seien zwei feste Punkte A und B sowie eine Gerade g. Gesucht ist derjenige Punkt X auf g, für den der Strahlenverlauf bei einer Reflexion $A \to X \to B$ gerade so ist, daß der Einfallswinkel doppelt so groß wie der Ausfallswinkel ist.

[†](nach einer Idee inkl. Lösung von JOHANNES WUTSCHER)

A.71 Gegeben sind zwei Kreise k_1, k_2 und eine Gerade g. Ein Quadrat ist so zu zeichnen, daß zwei Gegenecken auf die Peripherien von k_1 und k_2, die beiden anderen auf g fallen.

A.72 Gegeben seien zwei feste Punkte A und B sowie eine Gerade g; auf ihr ist S so zu bestimmen, daß $AS + SB$ gleich einer gegebenen Strecke s wird.

B

DREIECKSKONSTRUKTIONEN

Die drei Seiten und die drei Winkel eines Dreiecks nennt man üblicherweise die sechs *Bestimmungsstücke* desselben. Daneben gibt es eine Vielzahl weiterer Stücke, wie z. B. die Längen der Höhen, Seiten- und Winkelhalbierenden, In- und Umkreisradius usw., die ebenfalls charakteristische Größen eines Dreiecks darstellen. Die Abhängigkeit der Dreiecksstücke voneinander macht es nun unmöglich, die Größe der einzelnen Stücke beliebig, also unabhängig voneinander festzusetzen und daraus ein Dreieck herstellen zu wollen. Es stellt sich vielmehr heraus, daß schon *drei* von den sechs Bestimmungsstücken das ganze Dreieck festlegen und somit alle übrigen Stücke mitbestimmen. Als einzige Ausnahme gilt die Vorgabe von drei Winkeln, da durch zwei Winkel der dritte bereits mitbestimmt ist, in Wirklichkeit also nur zwei Stücke festgelegt sind.

Wir wiederholen im Abschnitt B.1 zunächst die allseits bekannten Kongruenzsätze, um anschließend im Abschnitt B.2 auf die gebräuchlichste Methode des Auffindens von Hilfsdreiecken einzugehen. Die Abschnitte B.3 und B.4 sind noch sehr unvollständig, werden aber in Zukunft noch kräftig erweitert. Ein geplanter Abschnitt über *nicht mit Zirkel und Lineal durchführbare* Dreieckskonstruktionen wird das Kapitel später abrunden.

B.1 Die Grundaufgaben

Die einfachsten Fälle von Dreieckskonstruktionen liegen vor, wenn nur Bestimmungsstücke vorgegeben werden. Diese werden auch die *vier Grundaufgaben für das Dreieck* genannt, und man faßt deren Inhalt in den *Kongruenzsätzen* zusammen. Wir wiederholen sie an dieser Stelle:

B.1 **Kongruenzsatz SWS.** Es ist ein Dreieck zu zeichnen, von dem zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

B.2 **Kongruenzsatz WSW.** Es ist ein Dreieck zu zeichnen, von dem eine Seite und zwei Winkel gegeben sind.

B.3 **Kongruenzsatz SSS.** Es ist ein Dreieck zu zeichnen, dessen drei Seiten gegeben sind.

B.4 **Kongruenzsatz SSW.** Es ist ein Dreieck zu zeichnen, von dem zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel gegeben sind.

Alle anderen Dreieckskonstruktionen sind weniger geläufig und werden daher gern als „Knobelaufgaben“ gestellt oder zum Ärgern von Schülern (oder Lehrern!) verwendet. Es wird in den folgenden Abschnitten der Versuch unternommen, etwas Systematik in dieses Gebiet zu bringen.

B.2 Auffinden von Hilfsdreiecken

Kommen unter den drei Stücken, die zur Konstruktion eines Dreiecks gegeben sind, auch andere Stücke als Seiten und Winkel vor, so kann man zur Lösung der Aufgabe einen Weg einschlagen, den man als die *Lösung durch Hilfsdreiecke* bezeichnet. Man zeichnet zunächst ein beliebiges Dreieck und hebt darin die jeweils gegebenen Stücke kräftig hervor. Hierbei gelangt man im allgemeinen zu weiteren Dreiecken und untersucht, ob unter diesen neuen Dreiecken eines ist, das man mit Hilfe der gegebenen Stücke nach einer der soeben behandelten Grundaufgaben konstruieren kann. Schließlich überlegt man, wie nach Konstruktion dieses Hilfsdreiecks das verlangte Dreieck hergestellt werden kann. Diesen Teil der Lösung nennt man die *Analysis*. Darauf folgen dann: die *Konstruktion*, die auf Grund der in der Analysis angestellten Überlegungen ausgeführt wird, die *Behauptung*, daß die Konstruktion wirklich das verlangte Dreieck geliefert hat, und der *Beweis* für die Richtigkeit der Behauptung. Als letzter Teil folgt die *Determination* (nähere Bestimmung). In dieser wird untersucht, in welchen Fällen die Aufgabe nicht lösbar ist, und ermittelt, ob die möglichen Lösungen das Dreieck eindeutig oder eventuell mehrdeutig bestimmen.

Als Beispiele für ausführliche Lösungen mit allen ihren Schritten Analysis, Konstruktion, Behauptung, Beweis und Determination mögen folgende Aufgaben dienen, wobei die zweite eine ältere Olympiadeaufgabe ist, deren Aufgaben- und Lösungstext weitestgehend original übernommen wurde.

B.11 Gesucht ist ein Dreieck, von dem zwei Seiten b, c und die Höhe h_c auf die eine von ihnen gegeben sind.

B.12 Konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C aus $m_a = 6\,\text{cm}$, $m_b = 8\,\text{cm}$. Dabei seien m_a die Länge der Seitenhalbierenden von BC und m_b die der Seitenhalbierenden von AC. Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion. Untersuchen Sie, ob ein derartiges Dreieck ABC mit den gegebenen Längen m_a, m_b existiert und bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist. (*13. Mathematik-Olympiade 1973/74, Klasse 10, Stufe 4*)

Es gibt natürlich eine Unmenge möglicher Kombinationen von drei Stücken, durch deren Vorgabe ein Dreieck konstruiert werden kann. Eine umfassende Zusammenstellung findet der interessierte Leser in [Her86]. Aus Platzgründen wird in den weiteren Lösungen auf die Darlegung des vollständigen Lösungsweges von Analysis bis Determination verzichtet und meist nur die Lösungsidee mit der Konstruktionsbeschreibung angegeben. Es sei

jedoch noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die obigen fünf Schritte bei der schriftlichen Lösung einer Wettbewerbsaufgabe möglichst vollständig abzuarbeiten sind.

Darüber hinaus ist es angebracht, für häufig auftretende Größen in einem Dreieck einheitliche Symbole einzuführen. Diese sind in Tabelle X.2 aufgeführt. Die gewählten Bezeichnungen stimmen zwar nicht in jedem Fall mit den im Unterricht gebräuchlichen überein, wir wollen sie dafür aber überall konsequent verwenden.

Bei den folgenden Konstruktionsaufgaben besteht der erste Schritt immer im Auffinden eines geeigneten Hilfsdreiecks. Dieses garantiert jedoch nicht in allen Fällen einen Weg zur Lösung. Oft sind dazu weitere Kenntnisse notwendig, so daß es sich ggf. empfielt, zunächst im Kapitel D nachzusehen. Es ist klar, daß es in vielen Fällen auch völlig andere (und teilweise sicherlich kürzere) Lösungsmöglichkeiten gibt.

B.13 Es ist ein Dreieck aus γ, w_c und r zu konstruieren.

B.14 Es ist ein Dreieck aus γ, m_b und R zu konstruieren.

B.15 Es ist ein Dreieck aus h_c, w_c und m_c zu konstruieren.

B.16 Es ist ein Dreieck aus γ, h_b und m_c zu konstruieren.

B.17 Es ist ein Dreieck aus a, b und m_c zu konstruieren.

B.18 Es ist ein Dreieck aus m_a, m_b und h_c zu konstruieren.

B.19 Es ist ein Dreieck aus m_a, m_b und m_c zu konstruieren.

B.20 Es ist ein Dreieck aus γ, h_c und s zu konstruieren.

B.21 Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Länge der Seite c, die Länge der Höhe h_c und die Differenz der Innenwinkel $0 < \alpha - \beta < 90°$ gegeben sind.
(*35. Mathematik-Olympiade 1995/96, Klasse 10, Stufe 4*)

B.22 Es ist ein Dreieck aus $\alpha - \beta$, h_c und R zu konstruieren.

B.23 Es ist ein rechtwinkliges Dreieck aus c und $a + b$ zu konstruieren.

B.3 Berechnung fehlender Stücke

In einigen Fällen gelingt es nicht ohne weiteres, mit den vorgegebenen Stücken an ein konstruierbares Hilfsdreieck zu gelangen. Oft kann man sich dennoch helfen, indem fehlende Stücke durch Anwendung bekannter elementarer Sätze *berechnet* werden, die ihrerseits konstruierbar sind. Meist genügt es, z. B. die Strahlensätze oder den Satz des Pythagoras geschickt auszunutzen, wie folgendes Beispiel zeigt.

B.41 Es ist ein Dreieck aus a, b und w_c zu konstruieren.

B.4 Rekonstruktion aus gegebenen Punkten

Allgemein schwerer scheint es, Dreiecke aus vorgegebenen Lagen besonderer Punkte zu (re)konstruieren. Diese Aufgaben verlangen mitunter die Kenntnis spezieller (aber nicht unbedingt komplizierter) Sachverhalte aus der Geometrie des Dreiecks. Sie sollten daher erst nach Durcharbeiten des Kapitels D in Angriff genommen werden.

B.51 Es ist ein Dreieck aus $\gamma = 90°$, c und der Lage des Berührungspunktes F des Inkreises auf der Hypotenuse zu konstruieren.
(*Crux Mathematicorum 2415*, März 1999)

B.52 Über jede Seite eines Dreiecks ABC, dessen Innenwinkel kleiner als 120° sind, werden gleichseitige Dreiecke BCA', CAB' und ABC' errichtet. Man (re)konstruiere $\triangle ABC$, wenn die Punkte A', B' und C' gegeben sind.

K

KREISE

Der Kreis ist eine der einfachsten und zugleich schönsten Figuren der Geometrie. Wer hat nicht in den ersten Tagen, als er den Umgang mit einem Zirkel lernte, entlang der Peripherie eines Kreises ein regelmäßiges Sechseck oder blumenartige Ornamente konstruiert und sich an deren Ästhetik erfreut. Wollen wir jedoch mehr über die Wechselbeziehungen zwischen Kreisen und Punkten, Geraden, Winkeln oder Flächen erfahren, kommen wir nicht an den folgenden Sätzen vorbei, die ausnahmslos aus dem Unterricht bekannt sein dürften. Wir beginnen mit Sätzen über Winkel- und Längenbeziehungen am Kreis.

K.1 Winkel und Längen

In diesem Abschnitt wiederholen wir die wichtigsten Sätze über Winkel- und Längenbeziehungen am Kreis, die uns noch aus dem Schulunterricht vertraut sind.

K.1 **Peripheriewinkelsatz.** Alle Peripheriewinkel über demselben Bogen sind einander gleich.

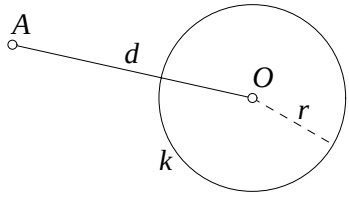
K.2 **Peripherie-Zentriwinkel-Satz.** Die über einem Bogen und einer Sehne liegenden Peripheriewinkel eines Kreises sind untereinander gleich und halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel; Peripheriewinkel, die auf verschiedenen Seiten derselben Sehne liegen, ergänzen sich zu 180°.

K.3 **Satz des Thales.** Verbindet man einen Punkt der Peripherie eines Kreises mit den Endpunkten eines beliebigen Durchmessers, so stehen die Verbindungslinien senkrecht aufeinander.

K.4 **Sehnen-Tangentenwinkel-Satz.** Ein Sehnen-Tangentenwinkel hat stets die gleiche Größe wie jeder Peripheriewinkel über dem Kreisbogen, der zwischen den Schenkeln des Sehnen-Tangentenwinkels liegt.

Darüber hinaus gibt es einige Sätze, die Aussagen über Längenrelationen zwischen Sehnen, Sekanten bzw. Tangenten am Kreis machen. Dabei taucht mitunter folgender Begriff auf, der auf Jacob Steiner zurückgeht:

Potenz. Als Potenz $\mathfrak{P}$ eines Punktes A bezüglich eines Kreises $k \equiv O_r$ (Mittelpunkt O, Radius r) bezeichnet man die Größe $\mathfrak{P}(A) \equiv OA^2 - r^2$. Klar, daß alle Punkte auf der Peripherie von k die Potenz null haben; innerhalb des Kreises ist sie negativ und außerhalb positiv. Der geometrische Ort aller Punkte gleicher Potenz bezüglich eines gegebenen Kreises k sind konzentrische Kreise zu k.

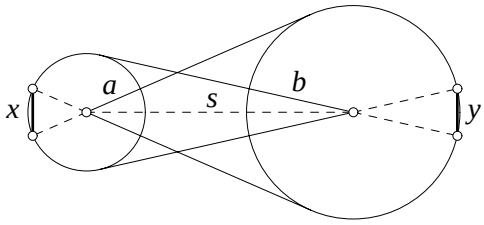


K.11 **Sehnensatz.** Schneiden sich in einem Kreis zwei Sehnen, so ist das Produkt der Abschnittslängen der einen Sehne gleich dem Produkt der Abschnittslängen der anderen.

K.12 **Sekantensatz.** Schneiden sich zwei Sekanten eines Kreises außerhalb des Kreises, so ist das Produkt der Abschnittslängen vom Sekantenschnittpunkt bis zu den Schnittpunkten von Kreis und Sekante auf beiden Sekanten gleich groß.

K.13 **Sekanten-Tangentensatz.** Für jeden Punkt außerhalb eines Kreises ist die Länge des Abschnitts bis zum Berührungspunkt auf einer vom Punkt an den Kreis gelegten Tangente die mittlere Proportionale zu den Längen der Abschnitte, die der Kreis auf einer Sekante durch den Punkt abschneidet.

K.14 **Netzhaut-Satz.** (Bild) Der Abstand der Mittelpunkte zweier Kreise mit den Radien a und b betrage $s > a + b$. Zieht man die Tangenten von einem Mittelpunkt an den jeweils anderen Kreis, dann sind die durch die rückwärtigen Verlängerungen herausgeschnittenen Sehnen x und y untereinander gleich.



K.15 In einem Kreis halbiere der Durchmesser AB die Sehne CD. Eine weitere Sehne AQ schneide CD in P. Dann hat der Ausdruck $AP \cdot AQ$ unabhängig von der Lage von P stets denselben Wert.

K.16 PT und PU seien Tangenten von einem Punkt P an zwei konzentrische Kreise, wobei PT den kleineren Kreis berührt. Weiterhin schneide PT den größeren Kreis in Q. Dann gilt: $PT^2 - PU^2 = QT^2$.

D

DREIECKE

Das Dreieck ist neben dem Kreis die am häufigsten betrachtete Figur der Planimetrie. Zahlreiche Beziehungen und Sätze über Größen im Dreieck wurden im Laufe der Zeit gefunden. Geschichtlich gesehen kann man zwei Epochen ausmachen, in denen wesentliches entstand bzw. hinzukam: die Antike und das 19. Jahrhundert, das mit solchen Namen wie Feuerbach, Gergonne und Nagel verbunden ist (*„Neuere Dreiecksgeometrie“*, s. [Bap92]).

Dieses Kapitel listet eine Vielzahl von Sätzen über das Dreieck auf, wobei klar ist, daß Vollständigkeit keinesfalls erreicht werden kann. Je mehr Sachverhalte wir aber kennen, desto leichter wird uns das Problemlösen fallen. Bezüglich der Schreibweise halten wir uns an Tabelle X.2.

Wir beginnen mit denjenigen bemerkenswerten Punkten und Linien im Dreieck, die schon im Altertum bekannt waren.

D.1 Klassische Transversalen

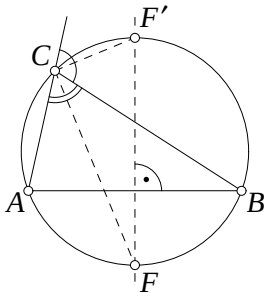
Jeder kennt aus dem Geometrieunterricht jene Paare von Begriffen, die stets zusammengehören:

1. der *Umkreismittelpunkt* O als Schnittpunkt der *Mittelsenkrechten* der Seiten,
2. der *Inkreismittelpunkt* I als Schnittpunkt der *Winkelhalbierenden* w_a, w_b, w_c,
3. der *Schwerpunkt* G als Schnittpunkt der *Seitenhalbierenden* m_a, m_b, m_c und
4. der *Höhenschnittpunkt* H als gemeinsamer Punkt der *Höhen* h_a, h_b, h_c.

Alle auftretenden Geraden haben gemeinsam, daß sie *Transversalen* eines Dreiecks sind, d. h. dieses schneiden. *2* bis *4* sind sogar *Ecktransversalen*, im Englischen auch *cevian* genannt. Natürlich sollten wir zunächst zeigen, daß die genannten Schnittpunkte tatsächlich die Schnittpunkte aller drei Transversalen sind. Wir wollen den Nachweis an dieser Stelle jedoch nur für den Umkreismittelpunkt führen; die anderen Beweise lassen sich eleganter mit der Umkehrung des Satzes von Ceva erledigen (s. Abschnitt D.2).

D.1 Die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Umkreismittelpunkt O des Dreiecks.

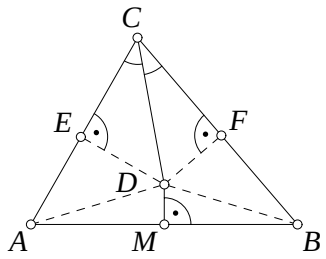
Bleiben wir bei unserer Tour quer durch das „klassische“ Dreieck zunächst beim *Umkreis*, zu dem es weitere bemerkenswerte Dinge festzustellen gibt.



D.2 (Bild) In einem $\triangle ABC$ schneide die Mittelsenkrechte der Seite AB den Umkreis in den beiden Punkten F und F'. Dabei sollen C und F' auf derselben Seite bezüglich AB, C und F auf unterschiedlichen Seiten liegen. Man zeige, daß dann die Strecke CF den Innenwinkel $\measuredangle ACB$ sowie CF' den zugehörigen Außenwinkel halbiert.

Für zahlreiche Sätze gilt — wie wir noch sehen werden — auch die *Umkehrung*, d. h., die Behauptung wird zur Voraussetzung und umgekehrt. So ist es auch bei dem vorangegangenen Satz. Wenn wir ihn nicht beachten, gelangen wir mitunter zu kuriosen Resultaten.

D.3 In einem Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechte einer Seite und die Winkelhalbierende des gegenüberliegenden Winkels stets auf dem Umkreis.



D.4 **Paradoxon: Jedes Dreieck ist gleichschenklig.**
(Pseudo)Beweis: (Bild) Im Dreieck ABC halbiere CD den Innenwinkel bei C und MD sei Mittelsenkrechte auf AB. Dann ist $\triangle CED \cong \triangle CFD$ nach Kongruenzsatz WSW; die rechtwinkligen Dreiecke AMD und BMD sind nach Kongruenzsatz SWS ebenfalls kongruent. Wegen $ED = FD$, $AD = BD$, $\measuredangle AED = \measuredangle BFD = 90°$ folgt daraus $\triangle AED \cong \triangle BFD$. Also ist $AE = BF$ und somit auch $AC = BC$, d. h., das Dreieck ABC ist gleichschenklig. — Wo steckt der Fehler?

Auch bei dem bekannten Sinussatz gibt es ein Detail, das gern übersehen wird. Es findet sich aber leicht, wenn der Umkreis hinzugenommen wird.

D.5 **Erweiterter Sinussatz.** In jedem Dreieck gilt

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R. \tag{D.1}$$

D.6 Auf dem Umkreis eines gleichseitigen Dreiecks ABC liege ein Punkt P, der nicht mit einem Eckpunkt zusammenfällt. Die Sehne AP schneide die Seite BC in Q. Man zeige, daß gilt:

$$\text{a)}\quad \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}, \qquad \text{b)}\quad PB + PC = PA.$$

Da es ohnehin nicht möglich ist, die Sätze der Elementargeometrie streng nach beteiligten Gebilden zu ordnen, beziehen wir im weiteren die *Winkelhalbierenden* eines Dreiecks in unsere Betrachtungen mit ein. Folgendes Resultat ist so einfach, daß es eigentlich nicht in diese Reihe gehört. Da wir es aber später häufig zitieren, sei es hier angegeben.

D.7 Die Winkelhalbierenden von Innen- und zugehörigem Außenwinkel eines Dreiecks stehen senkrecht aufeinander.

Der wohl am häufigsten benutzte Satz, der im Zusammenhang mit Winkelhalbierenden im Dreieck steht, ist der folgende:

D.8 In einem Dreieck teilt jede Halbierende eines Innenwinkels (Außenwinkels) die gegenüberliegende Seite innerlich (äußerlich) im Verhältnis der anliegenden Seiten.

D.9 Der Winkel, unter dem eine Dreieckseite vom Inkreismittelpunkt aus gesehen wird, ist gleich dem um 90° vermehrten halben Gegenwinkel der Seite.

Wenden wir uns nun dem *Schwerpunkt* eines Dreiecks zu. Seinen Namen verdankt er folgender Beobachtung: Es wird ein beliebiges Dreieck auf ein Stück Sperrholz gezeichnet und mit der Laubsäge ausgesägt. Versuchen wir nun die Dreiecksfläche von unten mit einer Nadel zu balancieren, gelingt dies nur, wenn die Nadel das Dreieck genau im Schwerpunkt unterstützt.

D.10 Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Schwerpunkt G des Dreiecks. — In welchem Verhältnis teilt der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden?

D.11 Ein Dreieck wird durch seine Seitenhalbierenden in sechs kleinere Teildreiecke zerlegt, die untereinander gleichen Flächeninhalt haben.

D.12 Eine Gerade durch den Schwerpunkt G eines Dreiecks schneide dessen Seiten in den Punkten X, Y, Z. Man beweise, daß dann für die gerichteten Strecken GX, GY, GZ (s. dazu Abschnitt D.2) gilt:

$$\frac{1}{GX} + \frac{1}{GY} + \frac{1}{GZ} = 0.$$

D.13 Gegeben sei ein Dreieck ABC mit einer beliebigen Gerade g durch dessen Schwerpunkt. Liegen zwei Eckpunkte des Dreiecks auf der gleichen Seite von g, so ist die Summe ihrer Abstände von g gleich dem Abstand des dritten Eckpunktes von g.

Den Abschluß unserer Tour bildet der *Höhenschnittpunkt*. Er ist der Ausgangspunkt für ein spezielles „Dreieck im Dreieck“, das *Höhenfußpunktdreieck*. Die zahlreich vorhandenen rechten Winkel prädestinieren es geradezu für Anwendungen der Ähnlichkeitssätze und der besonderen Eigenschaften von Sehnenvierecken.

D.21 Die Höhen in einem spitzwinkligen Dreieck halbieren die Innenwinkel des Höhenfußpunktdreiecks. *Oder anders ausgedrückt:* Der Höhenschnittpunkt ist der Inkreismittelpunkt des Höhenfußpunktdreiecks.

D.22 In einem Dreieck teilt der Höhenschnittpunkt jede Höhe so in zwei Abschnitte, daß die Produkte ihrer Längen untereinander gleich sind.
(*14. Mathematik-Olympiade 1974/75, Klasse 9, Stufe 2*)

D.23 Spiegelt man in einem spitzwinkligen Dreieck den Höhenschnittpunkt an den Seiten, so liegen die Bildpunkte auf dem Umkreis des Dreiecks.

D.24 Im $\triangle ABC$ seien H der Höhenschnittpunkt und O der Mittelpunkt des Umkreises. Dann sind die Winkel $\measuredangle HAB$ und $\measuredangle OAC$ gleich groß.

Der Höhenschnittpunkt führt in Verbindung mit dem Umkreismittelpunkt auf eine Differenz von Innenwinkeln im Dreieck, welche mitunter vorgegeben ist, aber ohne Kenntnis dieses Zusammenhangs nicht so einfach anzuwenden ist.

D.25 Im Dreieck ABC beträgt der Winkel $\measuredangle HCO = |\alpha - \beta|$.

D.2 Ceva & Menelaus

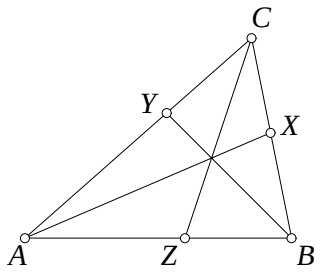
Es ist schade, daß zwei so überaus nützliche Sätze, wie die von Ceva und Menelaus sowie deren Umkehrung, nicht zum Standardprogramm im Geometrieunterricht gehören. Sie leisten oft gute Dienste, wenn es zu zeigen gilt, daß sich drei Geraden in einem Punkt schneiden (*kopunktal* sind) bzw. drei Punkte auf einer Geraden liegen (*kollinear* sind). Ohne diese Sätze lassen sich derartige Beweise ungleich aufwendiger führen. Wir demonstrieren dies an den bisher offenen Problemen aus Abschnitt D.1.

Geschichtlich interessant ist die Tatsache, daß 15 Jahrhunderte zwischen beiden Entdeckungen liegen, obwohl sie eigentlich sehr ähnliche Aussagen machen. Während Menelaus seinen Satz bereits ca. 80 n. Chr. in seinem Werk *„Sphärik“* niederschrieb, wurde sein „dualer“ Partner erstmals 1678 von dem Italiener Giovanni Ceva in seiner Schrift *„De lineis rectis se invicem secantibus, statica constructio“* erwähnt.

Wir beschäftigen uns im ersten Teil dieses Abschnitts mit der *Kopunktualität*, d. h. der Bedingung für das Zusammentreffen dreier Geraden in einem Punkt.

D.31 **Satz von Ceva.** (Bild) Wenn sich in einem $\triangle ABC$ die drei Ecktransversalen AX, BY und CZ in einem Punkt schneiden, dann hat das Produkt der Teilverhältnisse, das ihre Schnittpunkte mit den Gegenseiten auf diesen bilden, den Wert 1:

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1. \tag{D.2}$$



D.32 Wie lautet die trigonometrische Form des Satzes von Ceva, wenn anstelle der Längen $AZ, \ldots, YA$ die sechs gegenüberliegenden Winkel verwendet werden?

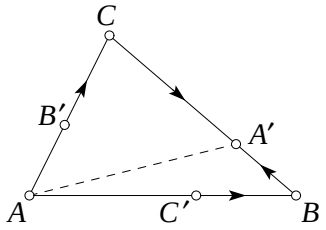
D.33 **Umkehrung des Satzes von Ceva.** Wenn das Produkt der Teilverhältnisse, das die Schnittpunkte der Ecktransversalen eines Dreiecks mit den Gegenseiten auf diesen bilden, den Wert 1 hat, dann schneiden sich die Ecktransversalen in einem Punkt (vgl. Aufgabe D.31).

Mitunter wird nicht so streng zwischen diesem Satz und seiner Umkehrung unterschieden und bei beiden vom Satz von Ceva gesprochen. Jetzt sind wir in der Lage, sehr bequem nachzuweisen, daß sich auch die anderen Ecktransversalen aus Abschnitt D.1 stets in einem Punkt schneiden.

D.34 Unter Verwendung der Umkehrung des Satzes von CEVA ist zu beweisen, daß sich a) die Seitenhalbierenden, b) die Winkelhalbierenden und c) die Höhen eines Dreiecks stets in einem Punkt schneiden.

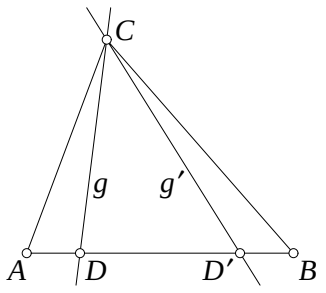
Damit sind die Anwendungsmöglichkeiten des Satzes von CEVA noch lange nicht erschöpft, wie einige, aus dem 19. Jahrhundert stammende Beispiele zeigen. Dazu benötigen wir allerdings noch folgende Definitionen:

Halbumfangspunkte. Fahren wir ausgehend von Eckpunkt A entlang der Seiten einmal den Umfang eines Dreiecks ab, so gibt es auf der gegenüberliegenden Seite BC einen Punkt A', für den der Weg $AB + BA'$ über Eckpunkt B gerade gleich dem Weg $AC + CA'$ über C ist. A' heißt dann *Halbumfangspunkt* zu A; ebenso definieren wir B' bzw. C'.

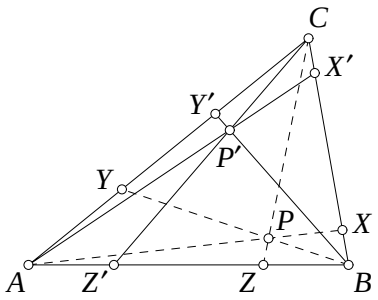


D.35 Die Berührungspunkte der drei Ankreise mit den Dreieckseiten fallen mit den Halbumfangspunkten zusammen.

Isotomische Geraden. (Bild) Angenommen, eine Ecktransversale g durch C schneide die gegenüberliegende Dreieckseite AB im Punkt D. Dann gibt es auf dieser Seite immer einen Punkt D' (den zu D *isotomisch* gelegenen Punkt), für den $AD' = BD$ bzw. $BD' = AD$ gilt. Die durch C und D' gehende Gerade g' heißt dann *isotomisch* zu g. Wir erkennen sofort, daß D und D' auch als spiegelbildliche Punkte aufgefaßt werden können, wobei die Mitte der Seite AB als Spiegelungszentrum auftritt. Oder anders ausgedrückt: Wenn wir das Teilungsverhältnis AD/DB mit x bezeichnen, dann teilt der isotomische Punkt AB im Verhältnis $AD'/D'B = 1/x$.

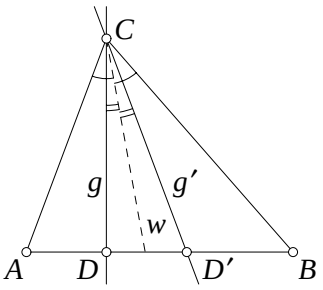


D.36 **Isotomisch konjugierter Punkt.** (Bild) P sei ein im Innern des $\triangle ABC$ liegender Punkt. Die drei Ecktransversalen AP, BP, CP schneiden die jeweils gegenüberliegenden Seiten in den Punkten X, Y bzw. Z. Man beweise, daß sich die drei isotomischen Geraden AX', BY' und CZ' ebenfalls in einem gemeinsamen Punkt, dem zu P *isotomisch konjugierten Punkt* P', schneiden.

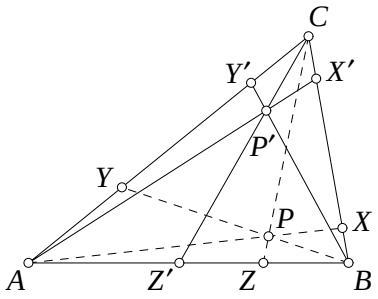


Was bei den isotomischen Geraden die besondere Längenrelation $AD = BD'$ ist, ist auch für die von zwei Ecktransversalen eingeschlossenen Winkel mit den Dreieckseiten denkbar. Dies führt auf den Begriff

Isogonale Geraden. (Bild) Die Ecktransversale g durch C schneide die gegenüberliegende Dreieckseite AB im Punkt D. Dann gibt es auf dieser Seite immer einen Punkt D' (den zu D *isogonal* gelegenen Punkt), für den $\measuredangle ACD' = \measuredangle BCD$ bzw. $\measuredangle BCD' = \measuredangle ACD$ gilt. Die durch C und D' gehende Gerade g' heißt dann *isogonal* zu g. Offensichtlich gehen g und g' ineinander über, wenn wir sie an der Winkelhalbierenden w spiegeln. Insbesondere hat sich der Name *Symmediane* für die an der Winkelhalbierenden gespiegelten zugehörigen Seitenhalbierenden (*Mediane*) eingeprägt.



D.37 **Isogonal konjugierter Punkt.** (Bild) P sei ein im Innern des $\triangle ABC$ liegender Punkt. Die drei Ecktransversalen AP, BP, CP schneiden die jeweils gegenüberliegenden Seiten in den Punkten X, Y bzw. Z. Man beweise, daß sich die drei isogonalen Geraden AX', BY' und CZ' ebenfalls in einem gemeinsamen Punkt, dem zu P *isogonal konjugierten Punkt* P', schneiden.



Nunmehr sind wir in der Lage, auf einige weitere merkwürdige Punkte in einem Dreieck einzugehen, von denen die antiken Geometer anscheinend noch nichts wußten.

D.38 **Gergonnes Punkt.** In einem $\triangle ABC$ schneiden sich die Strecken AX, BY und CZ stets in einem Punkt Ge, wobei X, Y, Z die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten BC, CA, AB sind.

D.39 **Nagels Punkt.** In einem $\triangle ABC$ schneiden sich die Strecken AX, BY und CZ stets in einem Punkt Na, wobei X, Y, Z die Berührungspunkte der drei Ankreise mit den Seiten BC, CA, AB sind.

D.40 Gergonnes Punkt und Nagels Punkt sind isotomisch konjugierte Punkte.

D.41 **Lémoine-Punkt.** Die Symmedianen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

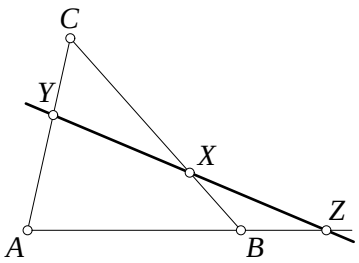
D.42 Welche beiden merkwürdigen Punkte in einem Dreieck sind ebenfalls isogonal konjugiert?

Im zweiten Teil dieses Abschnitts geht es um die *Kollinearität*, d. h. die Bedingung für die gleichzeitige Lage dreier Punkte auf einer Geraden.

Eines ist noch vorauszuschicken: Beim Satz von Menelaus wird vom Begriff der *gerichteten Strecke* Gebrauch gemacht. Befinden sich z. B. die Punkte A, B, Z so auf einer Geraden, daß B zwischen A und Z liegt, so haben AB und BZ gleichen Richtungssinn und AB/BZ ist positiv. Dagegen ist in diesem Beispiel wegen $ZB = -BZ$ der Quotient AZ/ZB negativ. Diese Unterscheidung, die auf Newton zurückgeht, läßt bereits die Anfangsgründe der Vektorrechnung erkennen.

D.43 **Satz von Menelaus.** (Bild) Eine Gerade schneidet die (ggf. verlängerten) Seiten eines Dreiecks so, daß das Produkt der Teilverhältnisse, das ihre Schnittpunkte mit den drei Seiten bilden, den Wert -1 hat:

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1. \tag{D.3}$$



D.44 **Umkehrung des Satzes von Menelaus.** Wenn für drei Punkte X, Y, Z auf den Seiten eines Dreiecks die Gleichung (D.3) gilt, dann sind X, Y, Z kollinear.

Im weiteren finden sich Problemstellungen, in denen ebenfalls die Kopunktualität von Geraden bzw. Kollinearität von Punkten nachzuweisen ist.

D.45 **Simson-Gerade.** Es sei P ein Punkt auf dem Umkreis des $\triangle ABC$ und X, Y, Z die Fußpunkte der von P auf die Dreieckseiten bzw. deren Verlängerungen gefällten Lote. Man zeige, daß dann X, Y, Z auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

D.46 Die Tangenten an den Umkreis eines Dreiecks in dessen Eckpunkten schneiden die jeweils gegenüberliegenden (verlängerten) Seiten in drei kollinearen Punkten.
Singapore Mathematical Society Interschool Competition, 1989

D.47 In einem $\triangle ABC$ werden in den Eckpunkten A, B und C jeweils gleich große Winkel δ, ε bzw. η nach außen abgetragen. Die freien Schenkel treffen sich in den Punkten D, E F, die in dieser Reihenfolge den Eckpunkten A, B, C gegenüberliegen. Man beweise, daß AD, BE und CF sich in einem Punkt schneiden.

Abschließend sei bemerkt, daß wir in Abschnitt M.4 noch andere Beweise der Sätze von Ceva und Menelaus unter Verwendung des *Flächenprinzips* angeben.

D.3 Extremalaufgaben

Für Billardspieler ist folgende Frage nichts besonderes: Wie ist eine Kugel zu stoßen, damit sie von Punkt A nach einer Reflexion an der Bande zum Punkt B gelangt? Viele erledigen die Aufgabe vielleicht intuitiv richtig, aber können sie ihr Vorgehen auch mathematisch erklären? Klar, wir haben diesen Anspruch, deswegen formulieren wir das folgende

D.51 **Problem von Heron.** Für zwei Punkte auf derselben Seite einer Geraden ist der kürzeste Weg gesucht, der vom ersten Punkt zur Geraden und anschließend zum zweiten Punkt führt.

Bemerkenswert sind ebenso Extremaleigenschaften bestimmter Punkte oder Linien im Dreieck, die schon seit jeher das Interesse der Mathematiker auf sich zogen. Die erste derartige Extremalaufgabe stammt aus der Mitte des 17. Jahrhunderts von dem französischen Mathematiker Pierre Fermat, der sie u. a. Evangelista Torricelli bekannt machte und die daher nach beiden benannt wurde.

D.53 **Problem von Fermat.** Man bestimme denjenigen Punkt P innerhalb eines spitzwinkligen $\triangle ABC$, für den die Summe seiner Abstände zu den Eckpunkten A, B und C möglichst klein wird.

D.54 Über den Seiten eines spitzwinkligen $\triangle ABC$ werden nach außen drei gleichseitige Dreiecke ABW, BCU und CAV errichtet. Man zeige:
a) $AU = BV = CW$;
b) $\triangle ABC$ und $\triangle UVW$ haben denselben FERMAT-Punkt F.

D.55 Auf eine waagrechte Tischplatte wird ein Dreieck gezeichnet, und in den drei Eckpunkten werden Löcher durch die Platte gebohrt. Durch jedes Loch wird ein dünner Faden gezogen und eine Masse daran befestigt. Über dem Tisch werden die Fäden verknotet und losgelassen. Wo kommt der Knoten zur Ruhe, wenn alle Gewichtskräfte gleich groß sind und Reibungskräfte vernachlässigt werden?

In der nächsten Extremalaufgabe geht es auch um einen minimalen Weg in einem Dreieck. Sie wurde 1775 durch J. F. DE TOSCHI DI FAGNANO gestellt.

D.56 **Problem von Fagnano.** Schreibe einem spitzwinkligen Dreieck ABC ein Dreieck UVW von möglichst kleinem Umfang ein.

D.57 Für welchen Punkt im Innern eines Dreiecks ABC ist die Summe der Quadrate der Abstände zu den Eckpunkten minimal?

D.58 Welcher Punkt im Innern eines Dreiecks ABC minimiert die Summe der Quadrate der Abstände zu den Seiten?

D.59 Gegeben sei eine Gerade g mit einem Punkt $P \in g$ sowie einem Punkt $Q \notin g$. Für welchen Punkt $R \in g$ wird der Ausdruck $(QP + PR)/QR$ maximal?

Weitere Aufgaben, die bestimmte Extremaleigenschaften in einem Dreieck beinhalten, sind W.22, W.52 und W.82.

D.4 Einige Formeln

Die Elementargeometrie wäre kein solches faszinierendes Gebiet der Mathematik, wenn sie nicht noch genug Spielraum für andere Gebiete wie Algebra oder Trigonometrie böte. Deshalb versuchen wir in diesem Abschnitt eine Reihe von Formeln zusammenzutragen, die Winkel, Längen von Strecken, Flächeninhalte u. v. a. m. untereinander auf vielfältige Weise verknüpfen. Davon ausgenommen sind *Ungleichungen* in diesen Größen; hierfür haben wir ein gesondertes Kapitel G.

Beginnen wir mit einigen Gleichungen für den Flächeninhalt eines Dreiecks:

D.61 Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem Produkt aus halber Seitenlänge und zugehöriger Höhe:

$$\Delta = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}. \tag{D.4}$$

D.62 Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich

$$\Delta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma. \tag{D.5}$$

D.63 Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem Produkt aus Inkreisradius r und halben Umfang $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$:

$$\Delta = rs. \tag{D.6}$$

D.64 Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem Produkt der Seitenlängen a, b, c dividiert durch das Vierfache des Umkreisradius R:

$$\Delta = \frac{abc}{4R}. \tag{D.7}$$

D.65 Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich

$$\Delta = (s-a)r_a = (s-b)r_b = (s-c)r_c. \tag{D.8}$$

Der nächste Ausdruck für den Flächeninhalt eines Dreiecks wird allgemein Heron von Alexandria zugeschrieben, stammt aber tatsächlich von Archimedes [Cox63, S. 27]. Alle diese Gleichungen können weiter in vielfältiger Weise verknüpft werden und liefern dabei einige bemerkenswerte Zusammenhänge.

D.66 **Herons Formel.** Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \tag{D.9}$$

D.67 Das Produkt der Seitenlängen a, b, c eines Dreiecks ist gleich dem doppelten Produkt aus Inkreisradius r, Umkreisradius R und Umfang $2s$:

$$abc = 2rR(2s) = 4rRs. \tag{D.10}$$

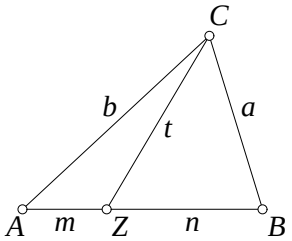
D.68 Für die Ankreisradien r_a, r_b, r_c sowie den Inkreisradius r eines Dreiecks gilt:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}. \tag{D.11}$$

Auf Matthew Stewart (*„Some general theorems of considerable use in the higher parts of mathematics“*, Edinburgh, 1746) geht ein Satz zurück, der die Länge einer Ecktransversalen angibt und eine nette Anwendung des Kosinussatzes ist. Mit seiner Hilfe berechnen wir die mitunter benötigten Längen der klassischen Transversalen aus Abschnitt D.1.

D.69 **Satz von Stewart.** (Bild) In einem $\triangle ABC$ teile die Ecktransversale CZ die gegenüberliegende Seite c in die Abschnitte $AZ \equiv m$ bzw. $ZB \equiv n$. Man zeige, daß für die Länge $CZ \equiv t$ dann gilt:

$$c(t^2 + mn) = ma^2 + nb^2. \tag{D.12}$$



D.70 Welche Länge hat a) eine Seitenhalbierende, b) eine Winkelhalbierende und c) eine Höhe in einem beliebigen $\triangle ABC$, ausgedrückt durch die Längen der Seiten a, b und c?

Das letzte Resultat erlaubt einen kurzen, direkten Beweis des folgenden bekannten Satzes:

D.71 **Satz von Steiner-Lehmus.** Jedes Dreieck mit zwei gleich langen Winkelhalbierenden ist gleichschenklig.

D.72 Welche Länge (ausgedrückt durch a, b, c) haben die Abschnitte AF und BF auf der Seite AB eines beliebigen Dreiecks, wenn CF die Höhe auf dieser Seite ist?

D.73 In jedem Dreieck mit den Winkeln α, β, γ gilt:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}. \tag{D.13}$$

Leonhard Euler, einer der größten Mathematiker aller Zeiten, berechnete 1765 den Abstand zwischen Umkreismittelpunkt O und Inkreismittelpunkt I in einem Dreieck. Daraus folgt unmittelbar eine bekannte Ungleichung zwischen dem Umkreisradius R und dem Inkreisradius r, die in Abschnitt G.1.3 zu finden ist.

D.79 **Eulers Abstand *OI*.** Für den Abstand $d \equiv OI$ zwischen den Mittelpunkten von Um- und Inkreis eines Dreiecks gilt:

$$OI^2 = d^2 = R^2 - 2rR. \tag{D.14}$$

D.5 Lotfußpunktdreiecke

Greifen wir uns einen *beliebigen* Punkt im Innern eines Dreiecks heraus und fällen von diesem die Lote auf die Seiten des Dreiecks, so erhalten wir die *Lotfußpunkte* von P. Verbinden wir diese Lotfußpunkte noch untereinander, entsteht das zu P gehörige *Lotfußpunktdreieck*. Derartige Dreiecke haben besondere Eigenschaften, weshalb wir ihnen einen eigenen Abschnitt widmen.

D.81 P sei ein Punkt im Innern eines $\triangle ABC$. Das Lotfußpunktdreieck von P hat dann die Seitenlängen

$$\frac{ax}{2R}, \quad \frac{by}{2R}, \quad \frac{cz}{2R},$$

wobei x, y, z die Abstände von P zu den Eckpunkten A, B, C und R der Umkreisradius von $\triangle ABC$ ist.

D.82 Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Wie ist ein Punkt P im Innern zu wählen, damit dessen Lotfußpunktdreieck im $\triangle ABC$ gleichschenklig und rechtwinklig wird?

Die folgende Aufgabe wurde 1935 von Paul Erdös im *Amer. Math. Monthly* gestellt, zwei Jahre später erschien in der gleichen Zeitschrift die Lösung [2,3]. Unsere Lösung stammt von Leon Bankoff [4].

D.83 **Satz von Erdös-Mordell.** Ist P ein beliebiger Punkt im Dreieck ABC und sind D, E, F die Fußpunkte der Lote von P auf die Seiten BC, CA und AB, so gilt:

$$PA + PB + PC \geq 2(PD + PE + PF). \tag{D.15}$$

D.84 Wann gilt in der Ungleichung von Erdös-Mordell (D.15) das Gleichheitszeichen?

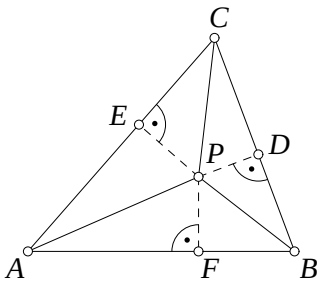
D.6 Noch mehr über Dreiecke

Das Dreieck scheint schier unerschöpflich in seinen Eigenschaften zu sein. Im folgenden deshalb wiederum nur eine kleine Auswahl von Aufgaben.

D.91 (Bild) Für welchen Punkt P im Innern eines Dreiecks ABC gilt die Gleichung

$$\frac{PD}{BC} = \frac{PE}{CA} = \frac{PF}{AB},$$

wobei D, E, F die Fußpunkte der Lote von P auf die Seiten BC, CA, AB sind?



V

VIERECKE

Vierecke nennt man bekanntlich alle Polygone mit $n = 4$ Ecken und Seiten. Im Gegensatz zu Dreiecken treten hierbei *Diagonalen* auf, die gegenüberliegende Eckpunkte verbinden. Dementsprechend spricht man von *benachbarten* oder *gegenüberliegenden Seiten* des Vierecks, je nachdem, ob sie einen Eckpunkt gemeinsam haben oder nicht. Ebenso sind zwei Eckpunkte benachbart oder gegenüberliegend, wenn sie zu einer Seite gehören oder nicht.

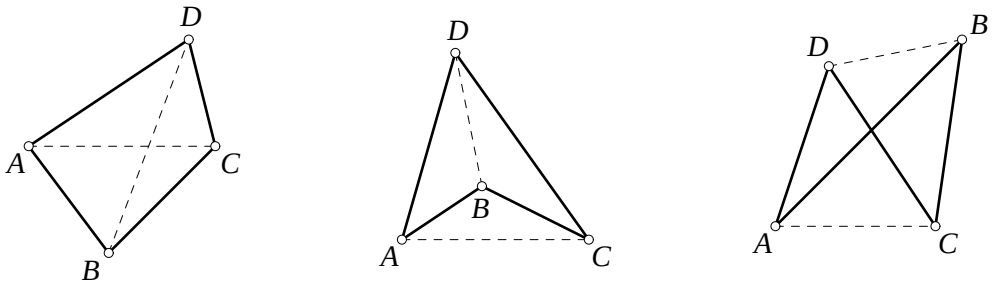


Bild V.1 Arten von Vierecken

In Bild V.1 hat das Viereck $ABCD$ die Seiten AB, BC, CD und DA sowie die Diagonalen AC und BD. Offenbar gibt es mehrere Arten von Vierecken: Im Bild links ist ein *konvexes* Viereck zu sehen, dessen Diagonalen beide im Innern des Vierecks liegen, in der Mitte ein *konkaves* oder *re-entrantes* Viereck, bei dem eine Diagonale innen und eine außen liegt und rechts ein *überschlagenes* Viereck, welches beide Diagonalen außerhalb hat.

Den *Flächeninhalt* eines konvexen Vierecks können wir als Summe der Flächeninhalte der beiden Dreiecke berechnen, in welche das Viereck durch eine seiner Diagonalen zerfällt:

$$[ABCD] = [ABC] + [CDA] = [BCD] + [DAB].$$

Damit diese Formel auch für konkave Vierecke gültig bleibt, betrachten wir den Flächeninhalt als *positiv* oder *negativ*, je nachdem, ob die Eckpunkte entgegen des Uhrzeigersinns oder im Uhrzeigersinn benannt wurden. Deshalb ist

$$[ABC] = [BCA] = [CAB] = -[CBA].$$

Das mittlere Viereck in Bild V.1 hat daher den Flächeninhalt

$$[ABCD] = [BCD] + [DAB] = [CDA] - [CBA] = [CDA] + [ABC].$$

Schließlich erlaubt uns die Formel, den Flächeninhalt eines überschlagenen Vierecks als die *Differenz* der Flächeninhalte der beiden kleinen Dreiecke anzusehen, aus denen es zusammengesetzt ist.

V.1 Allgemeine Vierecke

Kommen wir zum ersten Satz, der auf Pierre Varignon 1731 zurückgeht.

V.1 **Varignon-Parallelogramm.** Verbindet man die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen ebenen Vierecks, so entsteht ein Parallelogramm, dessen Flächeninhalt halb so groß wie der des Vierecks ist.

Daraus ergibt sich ein weiterer Satz, den wir hier allerdings nicht anführen, da er genau mit der Olympiadeaufgabe W.1 identisch ist.

V.2 Wenn eine Diagonale ein Viereck in zwei flächengleiche Hälften teilt, halbiert sie auch die andere Diagonale. *Und umgekehrt:* Wenn eine Diagonale die andere halbiert, halbiert sie auch die Fläche des Vierecks.

V.3 In einem Viereck $ABCD$ treffen sich die (verlängerten) gegenüberliegenden Seiten AB und CD im Punkt W. Die Mittelpunkte der Diagonalen AC und BD seien X bzw. Y. Dann gilt

$$[XWY] = \frac{1}{4}[ABCD].$$

(*Kanada, 1978*)

V.8 Wie groß ist der Winkel, der von zwei gegenüberliegenden Seiten eines Vierecks eingeschlossen wird?

V.9 AB sei eine der kürzeren Seiten des Rechtecks $ABCD$. Fällt man von C aus das Lot auf die Diagonale BD, so schneidet dieses Lot $g(A, B)$ in E. Der Schnittpunkt der Seite AD mit dem Kreis um B vom Radius BC sei F. Man beweise, daß EF auf FB senkrecht steht.

V.10 In einem Viereck $ABCD$ sind die Winkel $\measuredangle DAB = 60°$ und $\measuredangle DCB = 150°$ gegeben. Weiterhin sei $AB = AD$. Man zeige, daß dann auch $AC = AB$ gilt.

V.2 Trapeze, Parallelogramme, Rhomben etc.

Auch die uns allseits vertrauten speziellen Vierecke, wie Trapez, Parallelogramm, Drachenviereck, Rhombus, Rechteck, Quadrat können mit einer Menge nicht so bekannter Eigenschaften aufwarten. Es lohnt sich also, auch ihnen einen eigenen Abschnitt zu widmen.

V.11 Im Trapez gilt mit den Grundseiten a, c, Schenkeln b, d und Diagonalen e, f

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2\,ac.$$

V.19 In einem Parallelogramm $ABCD$ bezeichnen E, F Punkte auf BC bzw. CD. Die Parallele durch D zu FB schneide AB im Punkt G. Der Schnittpunkt von DE mit BF sei H. Man zeige, daß AH und GE parallel sind.
(*Elem. Math. 31 (1976), Aufgabe 738*)

Man beachte auch die Aufgabe M.12.

V.3 Sehnenvierecke

Da ein Kreis durch drei Punkte auf seiner Peripherie vollständig bestimmt ist, kann man im allgemeinen keinen Kreis zeichnen, der durch die Ecken eines beliebigen Vierecks geht. Wohl aber läßt sich *in einen Kreis* ein Viereck einzeichnen, dessen Seiten Sehnen des Kreises sind. Um ein solches *Sehnenviereck* muß sich dann auch ein Kreis beschreiben lassen, den wir analog zum Dreieck *Umkreis* nennen.

Sehnenvierecke haben offenbar besondere Eigenschaften, die sie von anderen Vierecken unterscheiden; wir wollen einige näher beleuchten.

V.21 In einem Sehnenviereck ist die Summe der Größen gegenüberliegender Innenwinkel stets 180°.

V.22 Die Mittelsenkrechten gegenüberliegender Seiten eines Sehnenvierecks schneiden sich im Mittelpunkt des umschriebenen Kreises.

V.23 In einem Sehnenviereck $ABCD$ zerlegen die Diagonalen AC und BD das Viereck in vier Dreiecke, die paarweise keinen Punkt gemeinsam haben. Man zeige, daß die jeweils gegenüberliegenden Dreiecke zueinander ähnlich sind.

V.24 O sei der Mittelpunkt des Umkreises in einem Sehnenviereck $ABCD$. Stehen in ihm die Diagonalen AC und BD senkrecht aufeinander, sind die Winkel $\measuredangle AOB$ und $\measuredangle COD$ supplementär.

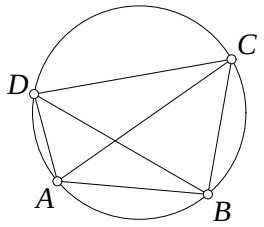
V.25 Stehen in einem Sehnenviereck die Diagonalen senkrecht aufeinander, so halbiert jede Gerade, die senkrecht auf einer Seite steht und durch den Diagonalenschnittpunkt geht, die jeweils gegenüberliegende Seite.
(*35. Mathematik-Olympiade 1995/96, Klasse 9, Stufe 3*)

Zu Sehnenvierecken mit senkrecht aufeinander stehenden Diagonalen beachte man auch die Aufgabe W.16.

Auf den Astronomen Claudius Ptolemäus (ca. 85 – ca. 165) geht der folgende nützliche Satz zurück, wobei anzumerken ist, daß bis ins 17. Jahrhundert der Satz des Menelaos irrtümlich als Satz des Ptolemäus bezeichnet wurde. Er hat darüber hinaus eine Umkehrung, die als Ungleichung formuliert wird, s. Aufgabe G.81.

V.26 **Satz des Ptolemäus.** (Bild) In einem konvexen Sehnenviereck ist die Summe der Produkte gegenüberliegender Seitenlängen gleich dem Produkt der Diagonalen:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD. \qquad \text{(V.1)}$$



V.27 $ABCD$ sei ein Sehnenviereck. Die Gerade durch die Inkreismittelpunkte der Dreiecke ABC und ABD verläuft dann stets parallel zu der Winkelhalbierenden zwischen den Diagonalen AC und BD.

V.4 Tangentenvierecke

Im allgemeinen ist es nicht möglich, in ein beliebiges Viereck einen Kreis zu zeichnen, der die vier Seiten desselben berührt. Wohl aber läßt sich *um einen Kreis* ein Viereck zeichnen, dessen Seiten Tangenten des Kreises sind. Ein diesem *Inkreise* umschriebenes Viereck nennt man daher *Tangentenviereck*.

Auch Tangentenvierecke haben besondere, erwähnenswerte Eigenschaften, die es im folgenden festzuhalten gilt.

V.31 Im Tangentenviereck ist die Summe der Längen zweier gegenüberliegender Seiten gleich der Summe der Längen der anderen beiden Gegenseiten.

V.32 Die Winkel, unter denen gegenüberliegende Seiten eines Tangentenvierecks vom Inkreismittelpunkt aus gesehen werden, sind supplementär.

V.33 In einem Tangentenviereck teilt jede Berührungssehne, die gegenüberliegende Berührungspunkte verbindet, dieses in zwei Vierecke mit jeweils paarweise gleichen Winkeln.

V.34 Die Diagonalen eines Tangentenvierecks schneiden sich im gleichen Punkt wie die beiden Sehnen gegenüberliegender Berührungspunkte des Vierecks mit dem Inkreis.

Weiteres zu Tangentenvierecken ist in Aufgabe M.43 zu finden.

V.5 Sehnentangentenvierecke

Nachdem wir uns in den beiden vorangegangenen Abschnitten mit Sehnen- und Tangentenvierecken beschäftigt haben, gehen wir die Leiter der Spezialisierung noch eine Sprosse hoch und befassen uns mit Vierecken, die Eigenschaften von beiden in sich vereinen. Unter einem *Sehnentangentenviereck* oder *bizentrischen Viereck* versteht man ein Viereck, das gleichzeitig einem Kreis einbeschrieben und einem anderen Kreis umbeschrieben ist. Beginnen wir mit der bemerkenswertesten Eigenschaft derartiger Vierecke:

V.41 In einem Sehnentangentenviereck stehen die Berührungssehnen zwischen gegenüberliegenden Berührungspunkten senkrecht aufeinander.

M

METHODEN

Allgemeingültige Methoden zur Behandlung beliebiger geometrischer Fragestellungen kann es sicherlich nicht geben. Es läßt sich jedoch eine kleine Anzahl von Rezepten aus der umfangreichen Literatur herausfiltern, die für bestimmte Problemstellungen zu besonders kurzen und eleganten (oder aber auch zu längeren, aber von vornherein erfolgversprechenden) Lösungen führt. Oder anders ausgedrückt: Manchen Aufgaben sieht man regelrecht an, mit welchem Ansatz und Hilfsmitteln sie zu „knacken“ sind. Das dazu trotzdem noch eine gehörige Portion Intuition notwendig ist, muß sicher nicht näher begründet werden.

Dieses Kapitel stellt daher den bescheidenen und unvollständigen Versuch dar, einige häufig wiederkehrende Lösungsideen und -methoden vorzustellen. Das Konzept des *geometrischen Ortes*, welches wir schon aus dem Abschnitt A.2 kennen, gehört auch dazu.

M.1 Vektorrechnung

Eine bestimmte Klasse von Aufgaben läßt sich besonders elegant mit den Hilfsmitteln der Vektorrechnung lösen. Ein *Vektor* kann als Translation eines Punktes A zum Punkt B betrachtet werden; wir bringen diese Verschiebung mit der Schreibweise $\overrightarrow{AB}$ zum Ausdruck. Ein Punkt der Ebene oder des Raumes spielt eine Sonderrolle: O (für *origin*); er dient als Ausgangs- oder Bezugspunkt. Eine Verschiebung von O nach A würden wir also mit $\overrightarrow{OA}$ oder kurz $\overrightarrow{A}$ bezeichnen, verwenden aber üblicherweise $\boldsymbol{a}$. Da mehrere Translationen auch nacheinander ausgeführt werden können, ist z. B. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ bzw. $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. Von dieser Beziehung werden wir häufig Gebrauch machen.

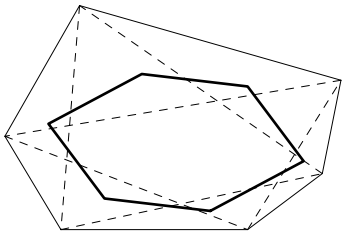
Etwas verwirrend ist mitunter die benutzte Schreibweise. Z. B. ist mit BC^2 das Skalarprodukt $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=|BC|^2$ gemeint und *nicht* etwa die Ausdrücke $\overrightarrow{B}\,\overrightarrow{C}^2=\boldsymbol{BC}^2$ (welcher ja ein Vektor wäre) oder $(\overrightarrow{B}\,\overrightarrow{C})^2=(\boldsymbol{BC})^2$ (welcher zwar ein Skalar ist, der aber nur im Falle $\boldsymbol{B}\parallel\boldsymbol{C}$ gleich BC^2 wäre). Wir müssen also genau zwischen (normal gesetzten) Skalaren und (fett gesetzten oder mit dem Vektorpfeil kenntlich gemachten) Vektoren unterscheiden (außer der bekannten Ausnahme $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=a^2$).

Der Vorteil der Einführung und konsequenten Verwendung von Vektoren zum Lösen von Aufgaben wird augenscheinlich, wenn wir lediglich die *formalen* Rechenregeln ausnutzen und uns nicht auf eine Darstellung der Vektoren in Komponenten (etwa in einem kartesischen Koordinatensystem) einlassen. Dadurch unterscheidet sich diese Herangehensweise

von der analytischen Geometrie. Dazu ist natürlich die Kenntnis dieser Rechenregeln nötig (etwa daß die Vektoraddition assoziativ oder das Skalarprodukt vertauschbar ist); aus Platzgründen ist es aber hier nicht möglich alles anzugeben. Die folgenden Aufgaben mögen als Demonstration dieser Methode dienen.

M.1 Von einem Dreieck sind die Ortsvektoren der Eckpunkte gegeben. Man finde einen Ausdruck für die Lage des Schwerpunkts.

M.2 (Bild) In einem beliebigen, unregelmäßigen Sechseck werden die durch jeweils drei aufeinanderfolgende Eckpunkte gebildeten Dreiecke gezeichnet und deren Schwerpunkte untereinander verbunden. Man zeige, daß in dem neu entstandenen Sechseck die drei Paare jeweils gegenüberliegender Seiten gleich lang und parallel zueinander sind.



M.3 In einem Viereck stehen die Diagonalen genau dann senkrecht aufeinander, wenn
a) die Summe der Quadrate gegenüberliegender Seiten gleich ist, oder
b) die Mittellinien (d. h. die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten) gleich lang sind.

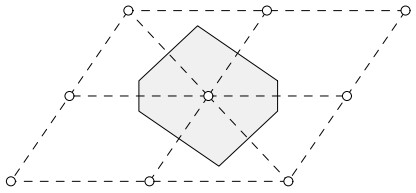
M.4 Für vier beliebige Punkte A, B, C, D im Raum gilt:

$$BC^2 + AD^2 - AB^2 - CD^2 = 2\,\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}. \tag{M.1}$$

M.8 Die Mittelpunkte der vier Quadrate, die über den Seiten eines Parallelogramms nach außen errichtet werden, bilden die Eckpunkte eines Quadrats.
(*10. Mathematik-Olympiade 1970/71, Klasse 10, Stufe 1*)

M.9 **Varignon-Parallelogramm.** Gegeben seien vier beliebige Punkte A, B, C und D im Raum. Man zeige, daß die Mittelpunkte der Strecken AB, BC, CD und DA ein *ebenes* Parallelogramm bilden.

M.10 **Wigner-Seitz-Zelle.** (Bild) In einem schiefwinkligen, ebenen Gitter bilden jeweils vier Punkte ein Parallelogramm — das kleinste von ihnen ist die Elementarzelle des Gitters. Greift man sich einen beliebigen Gitterpunkt heraus und zeichnet die Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecken zu den sechs nächsten Nachbarn, so beranden diese Linien ein Gebiet, das man Wigner-Seitz-Zelle (WSZ) nennt. Man zeige, daß die Elementarzelle und die WSZ den gleichen Flächeninhalt haben.

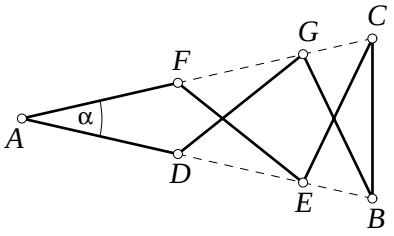


M.2 „Winkel jagen“

Unter dieser Überschrift können wir alle Bemühungen zusammenfassen, bestimmte Relationen zwischen Winkeln nachweisen zu wollen. Dazu bietet die Elementargeometrie auch

eine Reihe von speziellen Beziehungen zwischen Winkeln: Neben-, Stufen- und Wechselwinkel, Sätze über die (Innen- und Außen-)Winkelsumme in Polygonen, den Peripheriewinkelsatz, den Peripherie-Zentriwinkel-Satz, den Sehnen-Tangentenwinkel-Satz usw. Ein geschicktes Ausnutzen dieser Hilfsmittel führt gelegentlich zu langwierigen, aber sicher erreichbaren Lösungen. Was hiermit gemeint ist, läßt sich am besten an der nächsten Aufgabe verdeutlichen:

M.11 (Bild) Ein Gliedermaßstab, bestehend aus 7 gleich langen Stäben, dessen Enden drehbar miteinander verbunden sind, wird so geformt, daß die Verbindungspunkte A, D, E, B bzw. A, F, G, C jeweils auf einer Geraden liegen. Wie groß ist der Winkel α bei Punkt A?



M.12 In einem Trapez $ABCD$ sei $AB = BC + CD$. Welche Beziehung besteht zwischen den Innenwinkeln bei A und B?

M.13 In einem rechtwinkligen $\triangle ABC$ wird das Lot von einem Punkt D der Kathete AC auf die Hypotenuse AB gefällt. Der Fußpunkt sei E. Die Transversalen BD und CE schneiden sich in S derart, daß gerade $BC = BS$ gilt. Man zeige, daß BS den Winkel $\measuredangle ABC$ drittelt.

M.14 Zwei Kreise berühren sich von innen in einem Punkt T. Eine Sehne AB des äußeren Kreises berühre den inneren im Punkt P. Man beweise, daß TP den Winkel $\measuredangle ATB$ halbiert.

M.15 Das Dreieck ABC sei einem Kreis einbeschrieben. Zwei Sehnen — ausgehend vom Punkt A — schneiden die Seite BC in den Punkten K und L sowie den Bogen BC in M und N. Man beweise: Wenn $KLNM$ ein Sehnenviereck ist, ist das Dreieck ABC gleichschenklig.
(*22. Tournament of Towns, Autumn 2000, O-level*)

M.3 Verwandlung von Figuren

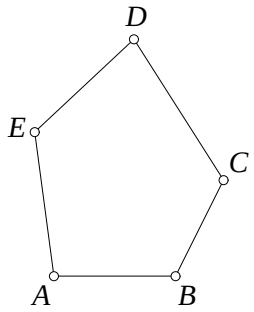
Eine gegebene Figur in eine andere *verwandeln* heißt, eine zweite Figur zeichnen, die mit der gegebenen Figur gleichen Inhalt hat. Der Zweck einer solchen Verwandlung besteht darin, z. B. aus Polygonen mit $n > 3$ Seiten unter Beibehaltung des Flächeninhalts solche mit weniger Seiten zu machen, um ggf. schließlich zu einem einfachen Dreieck zu gelangen. Auch der umgekehrte Fall, aus einem beliebigen Dreieck z. B. ein Quadrat zu konstruieren, ist möglich. Es ist klar, daß wir Verwandlungen bei einer Aufgabe nur in Betracht ziehen brauchen, wenn der Flächeninhalt überhaupt eine Rolle spielt.

Das grundlegende Prinzip dabei ist die Ausnutzung der bekannten Tatsache, daß sich die Fläche eines Dreiecks nicht ändert, wenn wir einen Eckpunkt auf derjenigen Geraden verschieben, die parallel zu der Geraden durch die beiden anderen verläuft. Oder in einer Gleichung ausgedrückt: $2\Delta = ch_c$ mit h_c als Abstand beider Parallelen.

Die Methode besteht also nur in einer geschickten und zweckmäßigen Verschiebung von Eckpunkten auf Verlängerungen benachbarter Seiten eines Polygons. Wie das im einzelnen abläuft, demonstrieren wir an folgenden Aufgaben.

M.21 Man verwandle ein gegebenes regelmäßiges Fünfeck in ein flächengleiches Dreieck.

M.22 (Bild) Im Innern eines Fünfecks $ABCDE$ sollen alle diejenigen Punkte P gefunden werden, für die das Viereck $ABCP$ einen ebenso großen Flächeninhalt wie das Fünfeck $CDEAP$ hat. a) Man beschreibe eine von den gegebenen Eckpunkten des Fünfecks ausgehende Konstruktion, mit der sich eine Menge von Punkten P ergibt. b) Beweisen Sie, daß jeder Punkt P, der sich aus dieser Konstruktion ergibt, die Bedingung der Flächengleichheit erfüllt.
(*36. Mathematik-Olympiade 1996/97, Klasse 10, Stufe 3*)



Eine weitere Aufgabe hierzu ist W.31.

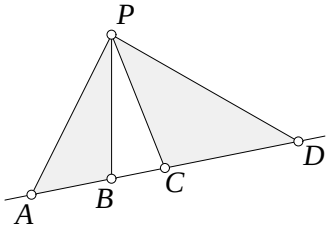
M.4 Das Flächenprinzip

In diesem Abschnitt wird eine Methode vorgestellt, die den Flächeninhalt als das grundlegende Werkzeug zum Lösen von Geometrie-Aufgaben verwendet. Es wird sich bald zeigen, daß dieses sog. *„area principle“* (oder auch *„K method“*, [Zha92], [Wei99]) ein ebenso einfaches wie universelles Verfahren ist. Die abschließenden Beispiele verdeutlichen, daß es sich auf alle Fälle lohnt, das Flächenprinzip mit in die „Trickkiste“ aufzunehmen.

Das Rückgrat der Methode bilden folgende drei Sätze, die jeweils Aussagen über das Verhältnis von Flächeninhalten zweier Dreiecke machen. Wir verwenden für die Größe des Flächeninhalts einer Figur F wie bisher die Abkürzung $[F]$.

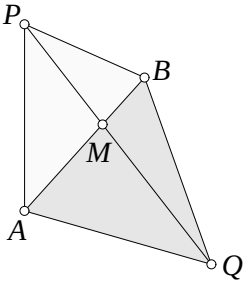
M.31 **Satz der gemeinsamen Höhen.** (Bild) Wenn vier Punkte A, B, C und D auf einer Geraden liegen, die nicht durch P geht, dann gilt:

$$\frac{[PAB]}{[PCD]} = \frac{AB}{CD}. \tag{M.2}$$



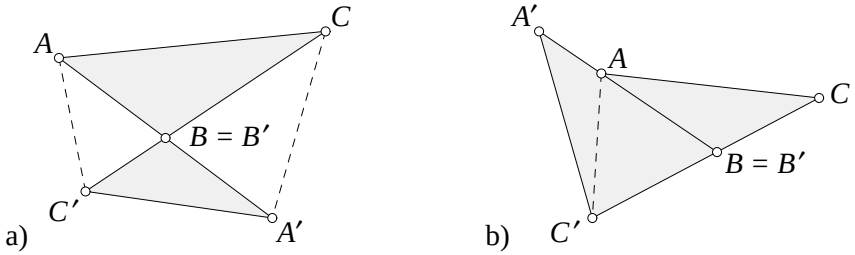
M.32 **Satz der gemeinsamen Seite.** (Bild) Die Dreiecke PAB und QAB mögen die Seite AB gemeinsam haben. Wenn PQ und AB sich in M schneiden, dann gilt:

$$\frac{[PAB]}{[QAB]} = \frac{PM}{QM}. \tag{M.3}$$



M.33 **Satz des gemeinsamen Winkels.** Wenn die Winkel $\measuredangle ABC$ und $\measuredangle A'B'C'$ gleich sind (Bild a) oder sich zu 180° ergänzen (Bild b), dann gilt:

$$\frac{[ABC]}{[A'B'C']} = \frac{AB \cdot BC}{A'B' \cdot B'C'}. \tag{M.4}$$



Diese grundlegenden Sätze lassen bereits erkennen, worauf es hier stets ankommt: Das Verhältnis von Strecken wird auf das Verhältnis von Flächeninhalten ausgedehnt. Dieses ist von großem Vorteil, sind doch Flächeninhalte für das „geometrisch sehende Auge“ leichter zu erfassen und zu kombinieren als Strecken. Gerade bei komplizierteren Problemen, in denen eine Figur aus mehreren Teilfiguren zusammengesetzt ist, lassen sich die einzelnen Teile anschaulich leicht als Flächenstücke überblicken.

Bevor die Eleganz dieser Methode an einigen Beispielen demonstriert werden soll, sei an folgende algebraische Identität erinnert, die uns schon beim Beweis des Satzes der gemeinsamen Seite begegnet ist, und auf die im folgenden häufig zurückgegriffen wird:

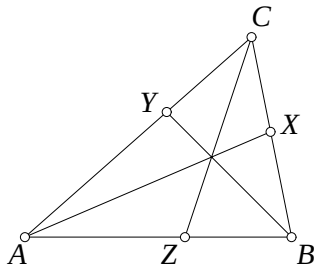
$$\text{Genau dann, wenn } \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{erfüllt ist, gilt auch } \quad \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Dies zu zeigen, dürfte dem Leser keine Mühe bereiten.

Wir beginnen mit den Sätzen von Ceva und Menelaus, die bereits im Abschnitt D behandelt wurden. Die sich daran anschließenden Sätze, wie der von Euler-Gergonne, stellen weitere nützliche Beziehungen zwischen den Streckenabschnitten auf.

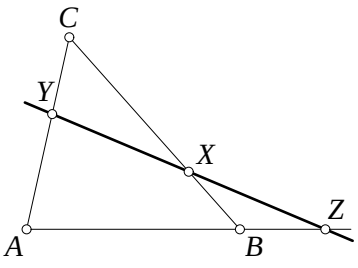
M.34 **Satz von Ceva.** (Bild) Wenn sich in einem $\triangle ABC$ die drei Ecktransversalen AX, BY und CZ in einem Punkt schneiden, dann hat das Produkt der Teilverhältnisse, das ihre Schnittpunkte mit den Gegenseiten auf diesen bilden, den Wert 1:

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1.$$



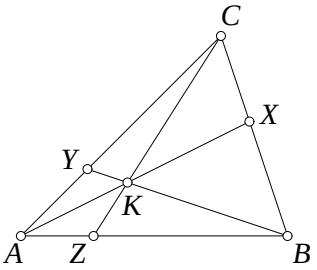
M.35 **Satz von Menelaus.** (Bild) Eine Transversale schneidet die Seiten eines Dreiecks so, daß das Produkt der Teilverhältnisse, das ihre Schnittpunkte mit den drei Seiten bilden, den Wert -1 hat:

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1.$$



M.36 **Satz von Euler-Gergonne.** (Bild) Für die Teilungsverhältnisse $u \equiv AK/KX$, $v \equiv BK/KY$, $w \equiv CK/KZ$ dreier sich in K schneidender Ecktransversalen eines $\triangle ABC$ gilt:

$$\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w} = 1. \tag{M.5}$$



M.37 Mit den weiteren Abkürzungen $x \equiv BX/XC$, $y \equiv CY/YA$ und $z \equiv AZ/ZB$ sowie denen aus Aufgabe M.36 gilt:

$$u = \frac{1}{y} + z, \qquad v = \frac{1}{z} + x, \qquad w = \frac{1}{x} + y.$$

Beim genauen Betrachten dieser Gleichungen kommt die Vermutung auf, daß in der vorliegenden „Ceva-Konfiguration“ jedes der sechs Verhältnisse x, y, z, u, v, w bereits durch zwei andere bestimmt ist. Dies ist auch tatsächlich der Fall [1]. Wir geben diese Beziehungen im folgenden ohne Beweis tabellarisch an.

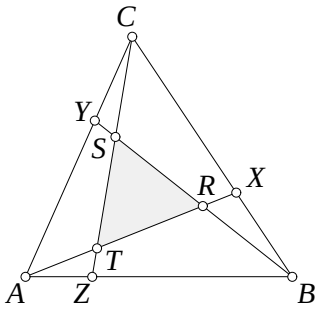
Tabelle M.1: Beziehungen zwischen den Streckenverhältnissen x, y, z, u, v, w in der Ceva-Konfiguration

	u, v	v, w	w, u
$x =$	$\dfrac{uv-1}{1+u}$	$\dfrac{1+v}{1+w}$	$\dfrac{1+u}{wu-1}$
$y =$	$\dfrac{1+v}{uv-1}$	$\dfrac{vw-1}{1+v}$	$\dfrac{1+w}{1+u}$
$z =$	$\dfrac{1+u}{1+v}$	$\dfrac{1+w}{vw-1}$	$\dfrac{wu-1}{1+w}$

	x, y	y, z	z, x
$u =$	$\dfrac{1}{y}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$	$\dfrac{1}{y}+z$	$z(1+x)$
$v =$	$x(1+y)$	$\dfrac{1}{z}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$	$\dfrac{1}{z}+x$
$w =$	$\dfrac{1}{x}+y$	$y(1+z)$	$\dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)$

Neben dem (hier Ceva-Konfiguration genannten) Fall, daß sich drei Ecktransversalen eines Dreiecks in einem Punkt treffen, ist auch noch der Fall möglich, daß sie letzteres nicht tun und somit im Innern ein kleines Dreieck umschließen. Der folgende Satz behandelt diesen:

M.38 **Satz von Routh.** (Bild) Wenn drei Ecktransversalen eines Dreiecks ABC sich nicht in einem Punkt, sondern in drei verschiedenen Punkten schneiden, schließen sie ein Dreieck RST im Innern von $\triangle ABC$ ein. Bezeichnet man die Abschnittsverhältnisse, die die Ecktransversalen auf ihren Gegenseiten bilden, mit $x \equiv BX/XC$, $y \equiv CY/YA$ bzw. $z \equiv AZ/ZB$, so gilt für das Verhältnis der Flächeninhalte:



$$\frac{[RST]}{[ABC]} = \frac{(1-xyz)^2}{(xy+x+1)(yz+y+1)(zx+z+1)}. \tag{M.6}$$

Abschließend werden noch einige Beispiele angeführt, die sich besonders elegant mit dem Flächenprinzip behandeln lassen.

M.39 In einem Trapez $ABCD$ schneiden sich die Diagonalen AC und BD im Punkt E. Die Fläche des Dreiecks ABE sei 72, die des Dreiecks CDE sei 50. Welche Fläche hat das Trapez?
(*IMTS 7*)

M.40 In einem Dreieck ABC schneiden sich die Ecktransversalen AD und BE in P. Man beweise, daß dann folgende Gleichung gilt:

$$[ABC] \cdot [DPE] = [APB] \cdot [CDE].$$

(*Crux Mathematicorum 2367*, Oktober 1998)

M.41 P sei ein beliebiger Punkt im Innern eines Dreiecks ABC. Die Verlängerungen von AP, BP und CP schneiden die jeweils gegenüberliegenden Dreieckseiten in den Punkten X, Y bzw. Z. Man beweise folgende Ungleichung:

$$\frac{PA}{PX} \cdot \frac{PB}{PY} + \frac{PB}{PY} \cdot \frac{PC}{PZ} + \frac{PC}{PZ} \cdot \frac{PA}{PX} \geq 12.$$

M.42 Im spitzwinkligen Dreieck ABC seien D, E, F die Fußpunkte der Höhen auf den Seiten BC, CA und AB sowie H der Höhenschnittpunkt. Man beweise

$$\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = 2.$$

(*Australien, 1993*)

M.43 Ist $ABCD$ ein Tangentenviereck mit dem Inkreismittelpunkt I, so gilt

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AI \cdot BI}{CI \cdot DI}.$$

(*14. Mathematik-Olympiade 1974/75, Klasse 10, Stufe 4*)

W

WETTBEWERBSAUFGABEN

Um dem Charakter eines Olympiade-*Trainings* gerecht zu werden, sind in diesem Kapitel eine Vielzahl von Aufgaben aus den unterschiedlichsten Wettbewerben zusammengestellt. Mit diesem Übungsmaterial soll in erster Linie der Ehrgeiz des Lesenden herausgefordert werden, diese Aufgaben wirklich selbständig zu lösen. Es wird angeraten, insbesondere bei den schwierigen Problemen nicht gleich in der Lösung nachzusehen und über die Aufgabe erst noch einige Zeit nachzudenken, wenn nicht gleich die Erleuchtung kommt.

Die Anfertigung einer *Skizze*, die alle wesentlichen Sachverhalte der Aufgabenstellung enthält, ist ein unbedingtes Muß und zumeist ein guter Start. Sie muß die Voraussetzungen der Aufgabenstellung nicht exakt widergeben; es genügt, wenn z. B. gleiche Strecken oder Winkel als solche besonders gekennzeichnet werden.

Es bietet sich an dieser Stelle an, auch einmal auf häufige Fehler hinzuweisen, die bei der Bearbeitung von Olympiade-Aufgaben gemacht werden und oft wertvolle Punkte kosten. Zunächst sollte man sich die Aufgabenstellung *mehrmals genau* durchlesen. So ist man z. B. schon im Hintertreffen, wenn man durch unachtsames Lesen von falschen Voraussetzungen ausgeht oder bei Beweisen Formulierungen wie *„genau dann, wenn“* überliest und damit den Beweis nur in einer Richtung führt. Ebenso sollten verlangte allgemeine Beweise nicht durch Angabe von (einzelnen) Beispielen erfolgen.

Häufig wird auch übersehen, daß mitunter nicht nur eine Lösung existiert. Hier muß dann unbedingt eine *Fallunterscheidung* erfolgen und jeder Fall gesondert betrachtet werden.

Grundsätzlich erfolglos bleiben Versuche, Relationen von geometrischen Größen (Gleichungen, Ungleichungen von Längen oder Winkeln) anhand von Zeichnungen, die mit dem Lineal oder Winkelmesser ausgemessen wurden, nachweisen zu wollen.

Und: Eine knapp und präzise formulierte Lösung, in der zu Beginn alle vorkommenden Symbole erklärt sind, die alle verwendeten Hilfssätze benennt und darüber hinaus noch in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen vorliegt, kommt beim Korrektor immer gut an!

W.1 Deutsche Mathematik-Olympiade

Dieser Abschnitt stellt eine unvollständige Auswahl der Geometrie-Olympiadeaufgaben der letzten Jahre dar. Die Aufgaben sind dabei nach aufsteigender Klasse/Stufe geordnet. Zum Zweck einer besseren Lesbarkeit wurde der Text der Aufgaben und Lösungen leicht modifiziert und stimmt somit vielfach nicht mit der offiziellen Version überein, deren Lösungen überdies in der Vergangenheit zahlreiche Fehler enthielten.

W.1 Man beweise, daß für jedes konvexe Viereck $ABCD$ die folgende Aussage gilt: Sind M_1, M_2, M_3, M_4 die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA und M_5, M_6 die Mittelpunkte der Diagonalen AC, BD, so gehen die drei Strecken M_1M_3, M_2M_4 und M_5M_6 durch einen gemeinsamen Punkt.
(*33. Mathematik-Olympiade 1993/94, Klasse 9, Stufe 3*)

W.2 Beweisen Sie: In jedem konvexen Fünfeck gelten die Ungleichungen

$$u < s < 2u.$$

Dabei bezeichne u den Umfang des Fünfecks und s die Summe der Diagonalenlängen.
(*39. Mathematik-Olympiade 1999/2000, Klasse 9, Stufe 3*)

W.3 Gegeben sei ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C und der Kathetenlänge 2. Über den Seiten des Dreiecks seien nach außen die Quadrate $ABED$, $BCGF$ und $CAJH$ gezeichnet. Beweisen Sie, daß es eine Kreislinie gibt, auf der die Punkte D, E, F, G, H und J liegen und berechnen Sie den Radius dieses Kreises.
(*39. Mathematik-Olympiade 1999/2000, Klasse 9, Stufe 3*)

W.4 Beweisen Sie, daß für jedes spitzwinklige $\triangle ABC$ die folgende Aussage gilt:
Sind D, E und F die Fußpunkte der auf BC, CA bzw. AB senkrechten Höhen, so ist

$$AF^2 + BD^2 + CE^2 = FB^2 + DC^2 + EA^2.$$

Untersuchen Sie ferner, ob die Gleichung auch für jedes rechtwinklige $\triangle ABC$ gilt.
(*35. Mathematik-Olympiade 1995/96, Klasse 9, Stufe 4*)

W.5 In einem beliebig gegebenen Kreisausschnitt AMB, dessen Zentriwinkel $\measuredangle AMB$ eine Größe kleiner als 90° hat, werden von einem beliebigen Punkt P des Bogens AB die Lote auf die Radien MA und MB gefällt; die Fußpunkte seien mit C bzw. D bezeichnet. Beweisen Sie, daß die Länge der Strecke CD unabhängig von der Lage des Punktes P auf dem Bogen AB ist.
(*36. Mathematik-Olympiade 1996/97, Klasse 9, Stufe 4*)

W.6 Beweisen Sie, daß in jedem spitzwinkligen Dreieck ABC der Höhenschnittpunkt H von allen drei Seiten des Dreiecks DEF gleichgroße Abstände hat, wobei D, E und F die Fußpunkte der Höhen sind.
(*35. Mathematik-Olympiade 1995/96, Klasse 10, Stufe 3*)

W.7 a) In einem beliebigen Dreieck seien h_a, h_b und h_c die Höhen und r der Inkreisradius. Man beweise, daß stets $h_a + h_b + h_c \geq 9r$ gilt.
b) Gibt es ein Dreieck, für welches $h_a + h_b + h_c = 9r$ gilt?
(*38. Mathematik-Olympiade 1998/99, Klasse 10, Stufe 3*)

W.8 Auf einem Halbkreis über einer gegebenen Strecke AB als Durchmesser seien zwei Punkte C und D gelegen. Ferner sei P ein beliebiger Punkt der Strecke CD, und Q sei der Fußpunkt des von P auf AB gefällten Lotes. Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets die Gleichung

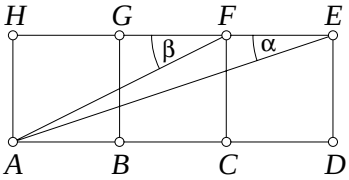
$$AQ \cdot QB - CP \cdot PD = PQ^2$$

gilt.
(*38. Mathematik-Olympiade 1998/99, Klasse 10, Stufe 3*)

W.9 Gegeben sei ein Kreis mit dem Durchmesser $d \equiv AB$. Eine zu AB senkrechte Gerade schneidet AB in P und den Kreis in C und D. Die Umfänge der Dreiecke APC und BPD verhalten sich zueinander wie 2 : 1. Wie groß ist unter diesen Voraussetzungen das Verhältnis $AP : PB$?
(*39. Mathematik-Olympiade 1999/2000, Klasse 10, Stufe 3*)

Achtung, Klasse 10! Die letzten beiden Aufgaben aus den Jahren 1999/2000 waren doch sehr ähnlich, oder? Ob es 2001 wieder etwas mit „AB als Durchmesser eines Kreises“ gibt? Wahrscheinlich jetzt nicht mehr, schade eigentlich.

W.10 (Bild) Gegeben sei ein aus drei kongruenten Quadraten zusammengesetztes Rechteck. Man zeige ohne Benutzung trigonometrischer Formeln, daß die Summe der Winkel α und β gleich 45° ist.
(*3. Mathematik-Olympiade 1963/64, Klasse 10, Stufe 4*)

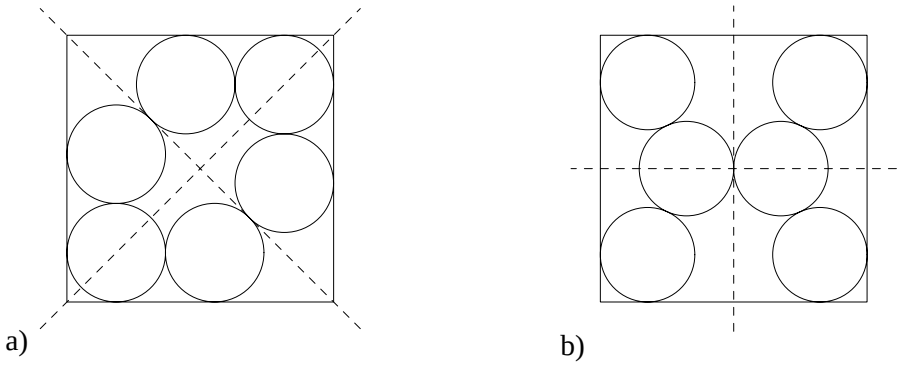


W.11 Man beweise: Sind a, b, c die Seitenlängen und ist Δ der Flächeninhalt eines Dreiecks, so hat die Summe der Längen der drei Lote, die von je einer Seitenmitte auf die in der Gegenecke an den Umkreis gelegte Tangente gefällt werden, den Wert

$$2\Delta \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}.$$

(*32. Mathematik-Olympiade 1992/93, Klasse 10, Stufe 4*)

W.12 (Bild) In ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a sollen n kongruente, möglichst große Kreise so einbeschrieben werden, daß keine zwei Kreise einen inneren Punkt gemeinsam haben und daß kein Punkt eines Kreises außerhalb des Quadrates liegt. Das Bild zeigt ein Beispiel für $n = 6$. Sind die Kreise in Teilbild a) oder b) größer?
(*35. Mathematik-Olympiade 1995/96, Klasse 10, Stufe 4*)



W.13 Einer Halbkugel mit dem Radius R werde ein Tetraeder $ABCD$ so einbeschrieben, daß die Eckpunkte A, B, C auf der Peripherie der Grundfläche der Halbkugel liegen und D im Scheitelpunkt der Halbkugel liegt. Das Volumen des Tetraeders sei mit V, der Umfang des Dreiecks ABC mit u bezeichnet. Weisen Sie nach, daß dann stets

$$V \leq \frac{u^3}{324}$$

gilt. Unter welchen Voraussetzungen gilt das Gleichheitszeichen?
(*37. Mathematik-Olympiade 1997/98, Klasse 10, Stufe 4*)

W.14 Es sei $ABCD$ ein beliebig gegebenes konvexes Viereck. Ein Punkt P durchlaufe alle Punkte der Seite AB, ein Punkt Q durchlaufe unabhängig hiervon alle Punkte der Seite CD. Man ermittle die Menge der Mittelpunkte aller so entstehenden Strecken PQ.
(*35. Mathematik-Olympiade 1996/97, Klasse 11–13, Stufe 3*)

W.15 Es sei k der Umkreis eines gegebenen regelmäßigen Sechsecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$. Ist X ein Punkt auf k, so seien A, B und C die Fußpunkte der Lote von X auf die Diagonalen P_1P_4, P_2P_5 bzw. P_3P_6. Man beweise, daß der Flächeninhalt des Dreiecks ABC nicht von der Wahl des Punktes X auf k abhängt.
(*35. Mathematik-Olympiade 1996/97, Klasse 11–13, Stufe 3*)

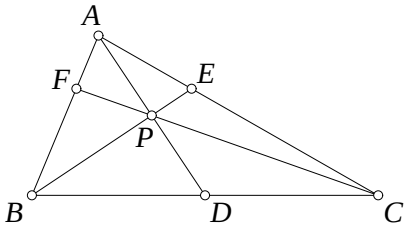
W.16 Die Punkte A, B, C und D liegen so auf einem Kreis k mit dem Mittelpunkt O, daß sie Eckpunkte eines Sehnenvierecks sind, dessen Diagonalen AC und BD senkrecht aufeinander stehen. Man beweise, daß die Seite CD doppelt so lang wie der Abstand des Punktes O von der Seite AB ist.
(*38. Mathematik-Olympiade 1998/99, Klasse 11–13, Stufe 3*)

W.17 Für ein konvexes Viereck $ABCD$ mit den Diagonalen AC und BD seien folgende Winkelgrößen vorausgesetzt: $\measuredangle CBD = 10°$, $\measuredangle CAD = 20°$, $\measuredangle ABD = 40°$, $\measuredangle BAC = 50°$. Man berechne die Größen der beiden Innenwinkel $\measuredangle BCD$ und $\measuredangle ADC$ des Vierecks $ABCD$.
(*36. Mathematik-Olympiade 1996/97, Klasse 11–13, Stufe 4*)

Weitere Olympiadeaufgaben sind B.12, B.21, D.22, V.25, M.8, M.22, M.43, U.44 und U.81.

W.2 Nationale Wettbewerbe

Mathematik-Olympiaden gibt es in fast allen Ländern der Erde. Hier schauen wir mal, was woanders so gefordert wird:



W.21 (Bild) Im $\triangle ABC$ treffen sich AD, BE, CF in einem Punkt P derart, daß $AP = PD = 6$, $EP = 3$, $PB = 9$ und $CF = 20$ ist. Wie groß ist der Flächeninhalt von $\triangle ABC$?
(*AIME, 1989*)

W.22 Man bestimme die Punkte P im Innern eines Dreiecks ABC, für die das Produkt $PD \cdot PE \cdot PF$ maximal wird, wobei D, E und F die Lotfußpunkte der Lote von P auf die Dreieckseiten BC, CA bzw. AB sind.
(*Großbritannien, 1978*)

W.23 Die Punkte Q und R liegen auf einem Kreis k. Von P werden die Tangenten PQ und PR an k gelegt. A liegt auf der Verlängerung von PQ; der Umkreis von $\triangle PAR$ sei k'. Der Kreis k' schneide k wieder in B, AR den Kreis k im Punkt C. Man beweise, daß $\measuredangle PAR = \measuredangle ABC$ gilt.
(*Großbritannien, 1994*)

W.24 $\triangle ABC$ sei ein spitzwinkliges Dreieck mit dem Umkreismittelpunkt O. Der Kreis k gehe durch C, O und B. Die Seiten AB und AC schneiden k ein weiteres Mal in P bzw. Q. Man beweise, daß die Geraden AO und PQ senkrecht aufeinander stehen.
(*Großbritannien, 1996*)

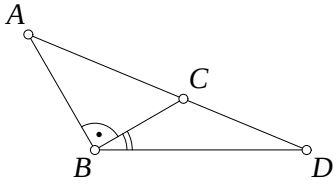
W.25 Von einem Punkt P im Innern eines gleichseitigen $\triangle ABC$ werden die Lote auf die Seiten BC, CA, AB gefällt; die Lotfußpunkte seien D, E, F. Es ist der geometrische Ort aller Punkte P zu bestimmen, für die $\measuredangle FDE$ ein Rechter ist.
(*Irland, 1997*)

W.26 Seien D, E, F Punkte auf den Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks ABC derart, daß $AD \perp BC$, BE die Winkelhalbierende von $\measuredangle ABC$ und F der Mittelpunkt von AB ist. Beweise, daß sich AD, BE und CF dann und nur dann in einem Punkt schneiden, wenn folgende Gleichung gilt:

$$a^2(a-c) = (b^2-c^2)(a+c).$$

(*Irland, 1999*)

W.27 Es seien O der Mittelpunkt eines Kreises k und A ein fester Punkt im Innern von k, der nicht mit O zusammenfällt. Man bestimme alle Punkte P auf der Peripherie des Kreises, für die der Winkel $\measuredangle OPA$ maximal wird.
(*Kanada, 1977*)



W.28 In der im Bild gezeigten Figur haben die Strecken AB und CD die Länge 1; die Winkel $\measuredangle ABC$ und $\measuredangle CBD$ betragen 90° bzw. 30°. Wie lang ist AC?
(*Kanada, 1986*)

W.29 Eine Gerade t habe keine gemeinsamen Punkte mit einem Kreis k mit dem Mittelpunkt O. Punkt E liegt auf t mit $OE \perp t$. M sei ein anderer Punkt auf t; MA und MB seien Tangenten an k mit den Berührungspunkten A und B; AB schneidet OE in X. Man beweise, daß X nicht von der Lage von M abhängt.
(*Lettland, 1997*)

W.30 Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, AB sei ein fester Durchmesser von k und K ein fester Punkt auf der Strecke AM. t sei die Tangente an k in A. Für eine beliebige Sehne CD, die durch K geht und von AB verschieden ist, werden die Punkte P und Q als Schnittpunkte von BC bzw. BD mit t konstruiert. Man beweise, daß das Produkt $AP \cdot AQ$ konstant bleibt, wenn die Sehne CD variiert wird.
(*Österreichisch-Polnischer Mathematik-Wettbewerb, 1992*)

W.31 Im $\triangle ABC$ sei P ein beliebiger Punkt auf der Seite BC. Durch den Mittelpunkt M derselben Seite wird eine Gerade gezeichnet, die parallel zu AP ist und eine der beiden anderen Dreieckseiten im Punkt D schneidet. Man beweise, daß die Strecke DP die Dreiecksfläche halbiert.
(*Schweden, 1987*)

W.32 Vom Inkreismittelpunkt I eines $\triangle ABC$ werden Strecken zu den Eckpunkten gezeichnet; diese zerlegen das Dreieck in drei kleinere Dreiecke. Die Umkreismittelpunkte dieser drei kleineren Dreiecke seien O_1, O_2 und O_3. Man zeige, daß dann die Umkreise von $\triangle ABC$ und $\triangle O_1O_2O_3$ konzentrisch sind.
(*USA, 1988*)

W.33 $ABCD$ sei ein konvexes Viereck, dessen Diagonalen AC und BD sich rechtwinklig in S schneiden. Man beweise, daß dann die zu den Seiten des Vierecks AB, BC, CD, DA spiegelbildlichen Punkte von S ein Sehnenviereck bilden.
(*USA, 1993*)

Weitere Aufgaben in dieser Kategorie sind K.35, V.3, M.42, U.22, U.23, U.41, U.45, G.4.

W.3 Internationale Wettbewerbe

Die Teilnahme an der Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO) ist wohl das Erstrebenswerteste für einen mathematikbegeisterten Schüler. Die dort gestellten Aufgaben werden zuvor in einem Auswahlverfahren aus den Vorschlägen vieler einzelner Länder ermittelt, und sind meist nicht ohne Kenntnis spezieller Sachverhalte (und damit auch intensiver Förderung) zu lösen. Wir geben an dieser Stelle einen kleinen Einblick.

W.51 Im $\triangle ABC$ sei $AC = BC$. Ein Kreis k liegt so, daß er den Umkreis von $\triangle ABC$ von innen berührt, und die Seiten AC, BC Tangenten an k mit den Berührungspunkten P, Q sind. Man beweise, daß der Mittelpunkt von PQ der Inkreismittelpunkt von $\triangle ABC$ ist.
(*20. IMO, Rumänien, Bukarest, 1978*)

W.52 P ist ein Punkt im Innern eines gegebenen $\triangle ABC$. Die Lotfußpunkte von P auf die Seiten BC, CA und AB des Dreiecks seien D, E bzw. F. Man bestimme alle P, für die folgender Ausdruck minimal wird:

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}.$$

(*22. IMO, USA, Washington D. C., 1981*)

W.53 Die Diagonalen AC und CE eines regulären Sechsecks $ABCDEF$ werden durch die auf ihnen liegenden Punkte M und N so geteilt, daß

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$$

gilt. Man bestimme r, wenn B, M und N kollinear sind.
(*23. IMO, Ungarn, Budapest, 1982*)

W.54 Der Mittelpunkt eines Kreises liege auf der Seite AB eines Sehnenvierecks $ABCD$. Die drei anderen Seiten liegen tangential an diesem Kreis. Man beweise, daß dann $AD + BC = AB$ gilt.
(*26. IMO, Finnland, Joutsa/Helsinki, 1985*)

Doch bis man dahin gelangt, müssen einige Hürden genommen werden. Häufig finden zur intensiven Vorbereitung Trainingslager oder spezielle Kurse statt, in denen natürlich auch Auswahlklausuren geschrieben werden (siehe z. B. [WWW.11–12]). Hier einige Aufgaben aus dieser Kategorie:

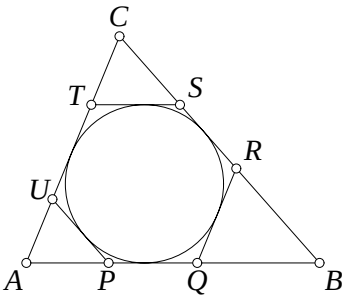
W.61 Gegeben sei ein nicht-gleichschenkliges Dreieck ABC. Seine Winkelhalbierende w_c soll gleichzeitig den Winkel zwischen der Höhe h_c und der Seitenhalbierenden m_c halbieren. Man beweise, daß dann das Dreieck ABC rechtwinklig ist.
(*Auswahlwettbewerb Deutschland, 1999*)

Eine weitere IMO-Aufgabe ist G.3. Aufgaben aus überregionalen Wettbewerben wie der APMO sind U.34, U.84 und G.2.

W.4 Crux Mathematicorum

Für mathematisch interessierte Schüler ist die Zeitschrift *„Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem“*, herausgegeben von der Canadian Mathematical Society, wärmstens zu empfehlen. Sie berichtet ausführlich über mathematische Wettbewerbe in aller Welt und erscheint in Englisch. Dies sollte jedoch für gute Schüler keine ernsthafte Hürde darstellen. Außerdem ist das zum Lesen und Verstehen der Aufgaben nötige Vokabular nicht sehr umfangreich und schnell erlernt. Jeder kann dort seine Lösungen hinschicken, die bei etwas Glück auch abgedruckt werden. Fragt Euren Mathematik-Lehrer, wie es mit einem Abonnement der Zeitschrift an Eurer Schule aussieht!

W.81 (Bild) Im $\triangle ABC$ werden diejenigen Tangenten an den Inkreis gezeichnet, die parallel zu den Seiten des Dreiecks sind. Dadurch entsteht das Sechseck $H \equiv PQRSTU$. Man beweise, daß der Umfang von H niemals größer als $\frac{2}{3}$ des Umfangs des $\triangle ABC$ ist.
(*Crux Mathematicorum 189*, 1988)



W.82 a) Von einem Punkt D der Hypotenuse AB eines rechtwinkligen $\triangle ABC$ werden die Lote DE und DF auf die Seiten BC und AC gefällt. Man bestimme diejenige Position von D, für die die Strecke EF minimale Länge hat.
b) Welche Lage ergibt sich für D, wenn $\triangle ABC$ spitzwinklig, aber nicht rechtwinklig ist?
(*Crux Mathematicorum 246*, 1987)

W.83 In der Ebene sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r sowie zwei weitere Punkte A und B außerhalb von k gegeben. Es ist eine Sehne PQ zu konstruieren, die von A aus unter einem rechten Winkel erscheint und deren Verlängerung durch B geht.
(*Crux Mathematicorum 1188*, 1988)

W.84 P sei ein Punkt im Innern von $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b und c. AP schneide den Kreis durch B, P, C ein zweites Mal in A'. Definiere B' und C' analog. Beweise, daß für den Umfang p des Sechsecks $AB'CA'BC'$ gilt:

$$p \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}).$$

(*Crux Mathematicorum 2301*, Februar 1998)

W.85 Im Dreieck ABC schneide die Winkelhalbierende von $\measuredangle CAB$ die Seite BC im Punkt D. Weiterhin sei $AB + AD = CD$ und $AC + AD = BC$. Man bestimme die Winkel $\measuredangle ABC$ und $\measuredangle BCA$.
(*Crux Mathematicorum 2302*, Februar 1998)

W.86 Angenommen, im $\triangle ABC$ erfüllen die Winkel β und γ die Bedingung $\gamma = 90° + \frac{1}{2}\beta$, die äußere Winkelhalbierende von α schneide die Verlängerung von BC in D, und die Seite AB berühre den Inkreis von $\triangle ABC$ in E. Man beweise, daß dann $CD = 2AE$ gilt.
(*Crux Mathematicorum 2303*, Februar 1998)

W.87 Über den Seiten AB und AC eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werden nach außen zwei gleichseitige Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle ACE$ errichtet. Die Strecke CD schneide AB in F; G sei der Schnittpunkt von BE und AC sowie P der von CD und BE. Unter der Voraussetzung, daß das Viereck $AFPG$ und das Dreieck PBC flächengleich sind, bestimme man den Winkel $\measuredangle BAC$.
(*Crux Mathematicorum 2304*, Februar 1998)

W.88 Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\measuredangle BAC = 90°$. I sei der Inkreismittelpunkt sowie D und E die Schnittpunkte von BI bzw. CI mit den Seiten AC bzw. AB. Man zeige:

$$\frac{BI^2 + ID^2}{CI^2 + IE^2} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

(*Crux Mathematicorum 2397*, Dezember 1998)

Weitere *Crux*-Aufgaben sind B.51, K.62 und M.40.

U

UNGLEICHUNGEN

Mit Gleichungen umzugehen ist uns bestens vertraut. Wir müssen lediglich darauf achten, daß nur äquivalente Umformungen durchgeführt werden und kommen so von einer Gleichung zu einer anderen und mit Glück zur gewünschten. Etwas aufpassen müssen wir bei Manipulationen, daß nicht versehentlich durch „versteckte Nullen“ dividiert wird (darauf beruhen viele Beweise, die von einer richtigen Voraussetzung zu einem offensichtlich falschen Ergebnis führen) oder etwa beim Wurzelziehen, bei dem mitunter mehrere Lösungen entstehen. Dies wird im Schulunterricht ausreichend geübt.

Interessant wird es dagegen, wenn wir mit Ungleichungen rechnen, bei denen es einige Regeln mehr zu beachten gilt. Zunächst sollte das Relationszeichen in die richtige Richtung zeigen. Wir erinnern uns daran, daß sich das Relationszeichen umdreht, wenn eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert wird. Bei Ungleichungsketten (mehreren hintereinander geschriebenen Ungleichungen) müssen alle Relationszeichen gleichsinnig ausgerichtet sein, wenn wir auseinander liegende Terme vergleichen wollen (so kann z. B. bei $a < b > c$ keine Aussage über a und c getroffen werden, wohl aber bei $a < b < c$). Ebenso ist bekannt, daß zwei gleichgerichtete Ungleichungen zwar addiert und multipliziert, aber *nicht subtrahiert* oder *dividiert* werden dürfen: Aus $5 < 7$ und $2 < 6$ folgt richtig $7 < 13$ und $10 < 42$, aber nicht $3 < 1$ oder $\frac{5}{2} < \frac{7}{6}$. Derartige Besonderheiten machen Ungleichungen ebenfalls zu beliebten Olympiadeaufgaben.

Da in vielen Mathematikbüchern Ungleichungen sehr stiefmütterlich behandelt werden, wollen wir hier etwas tiefer in dieses Gebiet eindringen. So wird in diesem Kapitel zunächst das Standard-Repertoir an Ungleichungen mit reellen Zahlen vorgestellt (Abschnitt U.1), welches größtenteils mit Namen früherer großer Mathematiker verknüpft ist. Diese fundamentalen Ungleichungen, die eher selten im Mathematik-Unterricht behandelt werden, sind unerläßlich zur Lösung von Olympiadeaufgaben. Es ist nicht leicht, allgemeingültige Lösungsstrategien aufzustellen. Dennoch laufen viele Beweise nach einem gewissen Schema ab; wir widmen uns im Abschnitt U.2 den einfachen „Tips und Tricks“, mit denen sich eine Vielzahl von Ungleichungen beweisen lassen. In späteren Abschnitten behandeln wir Ungleichungen in natürlichen bzw. ganzen Zahlen. Den Abschluß bildet eine „Querbeet“-Sammlung von Übungsaufgaben. Ausgenommen sind hier geometrische Ungleichungen, die in Kapitel G zu finden sind.

Klassische Literatur zum Thema Ungleichungen sind die Bücher [Har52], [Mit64], [Mit70], auch neuere, wie [Clo98], sind empfehlenswert.

U.1 Fundamentale Ungleichungen

In diesem Abschnitt stellen wir die wichtigsten allgemein bekannten Ungleichungen vor, von denen einige äußerst leistungsfähig sind. Aus ihnen lassen sich eine Vielzahl von Folgerungen gewinnen. Wir beginnen mit der einfachen BERNOULLIschen Ungleichung, an die sich weitere geläufige Ungleichungen, wie die Dreiecksungleichung, die AM-GM-HM Ungleichungen oder die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung anschließen. Gerade die zuletzt genannten werden zur Lösung von Aufgaben oft benötigt.

Bei den Beweisen, die oft auf recht unterschiedliche Weise geführt werden können, begegnet uns der Anspruch, diese auch mit den Hilfsmitteln des jeweiligen Gebietes der Mathematik in Angriff zu nehmen, in welches die Ungleichung fällt. Wir sind daher bestrebt, möglichst „elementare“ Beweise anzugeben. Nur gelingt es uns nicht in allen Fällen, ganz auf grundlegende Sätze aus der Differential- und Integralrechnung oder auf das Rechnen mit komplexen Zahlen zu verzichten. Der Leser möge dies verzeihen und es eventuell als Ansporn nehmen, sich mit diesen Dingen weiter auseinanderzusetzen.

U.1 **Bernoullische Ungleichung.** Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq -1$. Dann gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{U.1}$$

Gleichheit liegt genau dann vor, wenn $n = 1$ oder $x = 0$ ist.

U.2 **(Verallgemeinerte) Bernoullische Ungleichungen.** Es sei $-1 < x \neq 0$. Dann gilt:

$$(1+x)^a > 1 + ax \quad \text{für} \quad a > 1 \text{ oder } a < 0, \tag{U.2}$$

$$(1+x)^a < 1 + ax \quad \text{für} \quad 0 < a < 1. \tag{U.3}$$

U.3 **Dreiecksungleichung.** Es seien $z_1, \ldots, z_n$ von null verschiedene komplexe Zahlen. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i| \geq \left| \sum_{i=1}^{n} z_i \right|. \tag{U.4}$$

Das Gleichheitszeichen gilt, wenn die Argumente aller z_i untereinander gleich sind.

U.4 **Gewichtete AM-GM Ungleichung.** Es seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen; $\delta_1, \ldots, \delta_n$ ebenfalls positive reelle Zahlen (Gewichte) mit $\delta_1 + \cdots + \delta_n = 1$. Dann gilt:

$$\delta_1 a_1 + \cdots + \delta_n a_n \geq a_1^{\delta_1} \cdots a_n^{\delta_n}, \tag{U.5}$$

wobei Gleichheit genau dann vorliegt, wenn alle a_i untereinander gleich sind.

U.5 **AM-GM Ungleichung.** Es seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen. Dann gilt für das *arithmetische* und *geometrische Mittel* dieser Zahlen:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}. \tag{U.6}$$

Gleichheit liegt genau dann vor, wenn alle a_i untereinander gleich sind.

U.6 **GM-HM Ungleichung.** Es seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen. Dann ist das geometrische Mittel dieser Zahlen stets größer oder gleich dem *harmonischen Mittel*:

$$(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}. \tag{U.7}$$

Gleichheit liegt genau dann vor, wenn alle a_i untereinander gleich sind.

U.7 **AM-HM Ungleichung.** Es seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen. Dann gilt für das arithmetische und harmonische Mittel dieser Zahlen:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}. \tag{U.8}$$

Gleichheit liegt genau dann vor, wenn alle a_i untereinander gleich sind.

U.8 **(Verallgemeinerte) Höldersche Ungleichungen.** Angenommen, a_{ij} seien von null verschiedene reelle Zahlen für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$. Weiterhin seien $p_1, \ldots, p_m$ bzw. $q_1, \ldots, q_n$ positive reelle Zahlen (Gewichte) mit $p_1 + \cdots + p_m = 1$ und $q_1 + \cdots + q_n = 1$. Für jedes i bzw. j seien die Zeilensummen R_i bzw. Spaltensummen C_j definiert:

$$R_i \equiv \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad C_j \equiv \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

Dann gilt:

$$R_1^{p_1} \cdots R_m^{p_m} \geq \sum_{j=1}^{n} |a_{1j}|^{p_1} \cdots |a_{mj}|^{p_m} \quad \text{und} \tag{U.9}$$

$$C_1^{q_1} \cdots C_n^{q_n} \geq \sum_{i=1}^{m} |a_{i1}|^{q_1} \cdots |a_{in}|^{q_n}. \tag{U.10}$$

Gleichheit liegt dann und nur dann in (U.9) vor, wenn alle Paare von Spaltenvektoren $(|a_{1j}|, \ldots, |a_{mj}|)^{\mathrm{T}}$ untereinander proportional sind; dagegen in (U.10), wenn paarweise alle Zeilenvektoren $(|a_{i1}|, \ldots, |a_{in}|)$ proportional sind.

U.9 **Höldersche Ungleichung.** Für alle nicht verschwindenden reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ sowie positiven $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|. \tag{U.11}$$

Gleichheit ist genau dann erfüllt, wenn $|b_i| = \lambda |a_i|^{p-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, für alle i gilt.

U.10 **Minkowskische Ungleichung.** Für alle reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ sowie $p \geq 1$ gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{U.12}$$

Gleichheit ist genau dann erfüllt, wenn die $|a_i|$ und $|b_i|$ proportional sind, d. h. $|b_i| = \lambda |a_i|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, für alle i gilt.

U.11 **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.** Angenommen, die Vektoren $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \equiv (a_1, \ldots, a_n)$ und $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \equiv (b_1, \ldots, b_n)$ bestehen aus nichtnegativen reellen Zahlen. Dann gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{u}^2 \boldsymbol{v}^2 \geq (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2. \tag{U.13}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn entweder alle a_i verschwinden ($\boldsymbol{u} = 0$), alle b_i verschwinden ($\boldsymbol{v} = 0$), oder $b_i = \lambda a_i$, $\lambda \in \mathbb{R}$, für alle i ($\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{u}$) ist.

U.12 **Tschebyscheffsche Ungleichung.** Angenommen, $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ seien gleichsinnig geordnete reelle Zahlen:

$$\begin{cases} a_1 \leq \cdots \leq a_n, \\ b_1 \leq \cdots \leq b_n, \end{cases} \qquad \text{oder} \qquad \begin{cases} a_1 \geq \cdots \geq a_n, \\ b_1 \geq \cdots \geq b_n. \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right). \tag{U.14}$$

Gleichheit gilt genau für $a_1 = \cdots = a_n$ oder $b_1 = \cdots = b_n$.

U.13 **Schursche Ungleichung.** Für alle positiven reellen Zahlen x, y, z und $\lambda > 0$ gilt

$$x^\lambda (x-y)(x-z) + y^\lambda (y-z)(y-x) + z^\lambda (z-x)(z-y) \geq 0. \tag{U.15}$$

Gleichheit gilt genau für $x = y = z$.

Bevor wir zur nächsten Ungleichung kommen, müssen wir noch klären, was unter der Eigenschaft *Konvexität* bzw. *Konkavität* einer Funktion verstanden wird.

Konvexität (Konkavität). Eine Funktion $f(x)$ heißt in einem Intervall (a, b) genau dann *konvex*, wenn die Ungleichung

$$f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2) \tag{U.16}$$

für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ und jedes $\theta \in (0, 1)$ erfüllt ist. Gilt in (U.16) sogar das Kleiner-Zeichen für $x_1 \neq x_2$, heißt die Funktion f *streng konvex*. Im Fall, daß $-f$ konvex ist, heißt f *konkav* bzw. (im Fall des Kleiner-Zeichens) *streng konkav*.

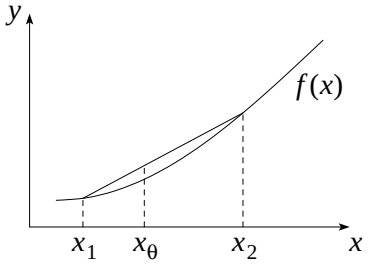


Bild U.1. Konvexität einer Funktion

Jedes $x_\theta \in (x_1, x_2)$ läßt sich dabei als $x_\theta \equiv x_1 + (1-\theta)(x_2 - x_1) = \theta x_1 + (1-\theta)x_2$ mit irgendeinem $\theta \in (0,1)$ schreiben. In Bild U.1 hat die Gerade durch die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ die Gleichung

$$\hat{f}(x) \equiv f(x_1) + \left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right](x - x_1),$$

so daß der Funktionswert an der Stelle x_θ gleich $\hat{f}(x_\theta) = \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2)$ ist. Die Bedingung (U.16) läßt sich somit kurz als $f(x_\theta) \leq \hat{f}(x_\theta)$ schreiben. Geometrisch bedeutet Konvexität (Konkavität) also, daß der Graph der Funktion $f(x)$ niemals oberhalb (unterhalb) irgendeiner Sekante liegt, die zwei auf dem Graphen liegenden Punkte verbindet.

U.14 **Jensensche Ungleichung.** Es sei $f(x)$ eine konvexe Funktion im Intervall (a, b) und $x_1, \ldots, x_n$ beliebige Punkte darin. Weiterhin seien $c_1, \ldots, c_n$ nichtnegative Konstanten mit $c_1 + \cdots + c_n = 1$. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right). \tag{U.17}$$

Ist f streng konvex und außerdem jedes $c_i > 0$, dann liegt Gleichheit genau für $x_1 = \cdots = x_n$ vor.

U.2 Einfache Tips und Tricks

Nachdem im vorigen Abschnitt die grundlegenden Werkzeuge bereitgelegt wurden, mit denen wir die kommenden Aufgaben angehen können, betrachten wir einleitend einige einfache Ungleichungen. Als ersten allgemeingültigen Tip halten wir fest, daß es stets ein guter Lösungsansatz ist, die Behauptung auf einen Ausdruck zurückzuführen, der offensichtlich größer oder gleich null ist. Besonders eignen sich hierzu Quadrate oder Summen bzw. Produkte von solchen Ausdrücken. Gelingt es z. B., wie in der Ungleichung

$$(1 + a + a^2)^2 < 3(1 + a^2 + a^4) \qquad \forall\ a \neq 1,$$

welche nach kurzer äquivalenter Umformung in $a^4 - a^3 - a + 1 > 0$ übergeht, diesen Ausdruck zu faktorisieren (was häufig Intuition erfordert):

$$a^4 - a^3 - a + 1 = (a-1)(a^3 - 1) > 0,$$

ist das Wichtigste schon geschafft. Sowohl für $a < 1$ als auch für $a > 1$ sind beide Faktoren offenbar positiv, und die Ungleichung ist bewiesen. Nebenbei bemerkt: Daß eins eine Nullstelle dieses Polynoms ist und somit der Faktor $a - 1$ auftreten könnte, ist manchmal schon der Aufgabenstellung zu entnehmen (hier die Einschränkung $a \neq 1$).

U.21 Es seien a, b, c die Längen der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, wobei die Hypotenuse die Länge c habe. Beweise, daß dann

$$a + b \leq \sqrt{2}c$$

gilt. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

U.22 Zeige, daß folgende Ungleichung für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ gilt:

$$x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} \geq 0.$$

(*Irland, 1998*)

U.23 Es seien a, b und c beliebige positive reelle Zahlen. Zeige, daß

a) $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$;

b) $abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$.

(*Großbritannien, 1981*)

U.2.1 „Teile und (be)herrsche“

Bei Ungleichungen, die mehrere Terme enthalten und deren Seiten bei einer zyklischen Vertauschung der Variablen unverändert bleiben, bietet es sich an, zunächst nur Teile der gesamten Ungleichung zu betrachten. Oft gelingt es, auf beiden Seiten Terme zu gruppieren, in denen einige Variablen fehlen. Liegt uns z. B.

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \qquad \text{für alle } a, b, c \in \mathbb{R}$$

zum Beweis vor, finden wir auf der linken Seite $a^2 + b^2$ und auf der rechten ab, zwischen denen diejenige Ungleichung besteht, auf die wohl am häufigsten zurückgegriffen wird: $(a - b)^2 \geq 0$, oder daraus abgeleitet

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad \text{oder} \quad x + \frac{1}{x} \geq 2. \tag{U.18}$$

Ebenso erkennen wir $b^2 + c^2 \geq 2bc$ und $c^2 + a^2 \geq 2ca$. Eine Addition dieser drei einfacheren Beziehungen und anschließende Division durch 2 liefert das gewünschte Ergebnis.

U.24 Man zeige, daß folgende Ungleichung gilt:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab \qquad \forall\ a, b, c > 0.$$

U.25 Für alle $a, b, c, d > 0$ gilt:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} + \frac{a^3+b^3+d^3}{a+b+d} + \frac{a^3+c^3+d^3}{a+c+d} + \frac{b^3+c^3+d^3}{b+c+d} \geq a^2+b^2+c^2+d^2.$$

U.26 Man beweise

$$\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq \frac{8}{abc} \qquad \forall\ a, b, c > 0.$$

U.27 Für alle $x, y, z > 0$ gilt:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}.$$

U.2.2 Die Arbeitspferde: AM-GM und Cauchy-Schwarz

Die Struktur der AM-GM Ungleichung (U.6) sowie der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (U.13) geben vor, welche Ungleichungen sich auf diese zurückführen lassen: Bezeichnen wir einmal Summen von irgendwelchen Termen mit $\mathcal{S}$ und Produkte mit $\mathcal{P}$, so schreibt sich die AM-GM Ungleichung grob als

$$\mathcal{S} \geq \mathcal{P} \qquad \text{(Typ a)}$$

und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung als

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2 \geq \mathcal{S}_3^2 \quad \text{(Typ b), oder} \\ &\mathcal{S}_1 \geq \mathcal{S}_3^2 \quad \text{(Typ c), oder auch} \\ &\mathcal{S}_1 \geq \mathcal{S}_3 \quad \text{(Typ d).} \end{aligned}$$

Typ c) geht dabei aus dem „Ur"typ b) hervor, wenn eine Summe auf der linken Seite zu einer Zahl entartet; Typ d) liegt hingegen bei $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3 > 0$ vor und geht aus diesem durch Division von $\mathcal{S}_2$ hervor bzw. bei $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$, so daß auf beiden Seiten die Wurzel gezogen werden kann. Hier ein Beispiel zu jedem Typ:

U.31 Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x^4(1+y^4) + y^4(1+z^4) + z^4(1+x^4) \geq 6x^2y^2z^2.$$

U.32 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n$ seien beliebige reelle Zahlen. Dann gilt

$$\left(a_1^2 + 2a_2^2 + 3a_3^2 + \cdots + na_n^2\right)\left(b_1^2 + \frac{1}{2}b_2^2 + \frac{1}{3}b_3^2 + \cdots + \frac{1}{n}b_n^2\right) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n)^2.$$

U.33 Man bestimme alle reelle Zahlen e, die mit gegebenen a, b, c, d die Gleichungen

$$a + b + c + d + e = 7,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 13$$

erfüllen.

U.34 Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ positive reelle Zahlen mit $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Zeige, daß

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{2}.$$

(*APMO, 1991*)

U.35 Für alle $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ gilt:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_1.$$

U.2.3 AM-HM Kandidaten

Mitunter begegnen uns Ungleichungen, die Summen von Brüchen enthalten. Natürlich können wir dann den Versuch unternehmen, die Brüche gleichnamig zu machen. Dies führt aber oft auf umfangreiche und unübersichtliche Ausdrücke, insbesondere wenn die Nenner alle verschieden sind. Sind jedoch in unserer Ungleichung gerade alle Zähler gleich, ist sie ein guter Kandidat für die AM-HM Ungleichung (U.8).

U.36 Es sei $S \equiv x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ mit $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Man zeige

$$\frac{S}{S - x_1} + \frac{S}{S - x_2} + \cdots + \frac{S}{S - x_n} \geq \frac{n^2}{n - 1},$$

wobei das Gleichheitszeichen genau bei $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ gilt.

U.37 Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt folgende Ungleichung:

$$\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \geq \frac{3}{2}.$$

U.2.4 Ungleichungen unter Nebenbedingungen

Häufig sind Ausdrücke nach oben bzw. unten abzuschätzen, d. h., es ist das Maximum bzw. Minimum des Ausdrucks in einem bestimmten Definitionsbereich oder unter zusätzlich einschränkenden Bedingungen gesucht. Angenommen, wir sollen zeigen, daß für nichtnegative Zahlen a und b mit der Nebenbedingung $a^2 + b^2 = 4$ der Ausdruck

$$\frac{ab}{a + b + 2}$$

niemals größer als $\sqrt{2}-1$ wird (*Österreich, 1989*). Die Lösungsidee besteht nun darin, den in der Nebenbedingung enthaltenen Ausdruck (hier also a^2+b^2) so in dem Zielausdruck oder der zu beweisenden Ungleichung unterzubringen, daß letzteres sich vereinfacht. Die Nebenbedingung ist damit „verkocht“ und wir können uns voll auf den neuen Term bzw. die neue Ungleichung konzentrieren. In unserem obigen Beispiel lassen die Terme a^2+b^2, ab und $a+b$ vermuten, daß wir es zunächst mit

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = 4+2ab, \qquad \text{oder}$$
$$2ab = (a+b)^2-2^2 = (a+b+2)(a+b-2)$$

versuchen können, was uns obigen Ausdruck tatsächlich auf

$$\frac{ab}{a+b+2} = \frac{a+b-2}{2} = \frac{a+b}{2}-1$$

vereinfacht. Somit reduziert sich die Aufgabe auf den Nachweis von $a+b \le 2\sqrt{2}$. Nun kommt der entscheidende Schritt:

$$(a+b)^2 = (a^2+b^2)+2ab \begin{cases} \le 2(a^2+b^2), \\ \ge 4ab, \end{cases}$$

beides wegen $a^2+b^2 \ge 2ab$. Die obere Möglichkeit liefert eine Abschätzung nach *oben* (Maximum), die andere nach *unten* (Minimum). Wir sind hier an einem Maximalwert von $a+b$ interessiert und finden nach Wurzelziehen und Einsetzen der Nebenbedingung die Ungleichung $a+b \le 2\sqrt{2}$ bestätigt.

U.41 Man finde den minimalen Wert des Ausdrucks $(x+y)(y+z)$ mit positiven reellen Zahlen x, y und z, die die Bedingung $xyz(x+y+z)=1$ erfüllen.
(*Großbritannien, 1991*)

U.42 a, b, c seien positive reelle Zahlen, die die Gleichung $(1+a)(1+b)(1+c)=8$ erfüllen. Man zeige $abc \le 1$.

U.43 Beweise, daß der Würfel von allen Quadern a) das größte Volumen bei konstanter Oberfläche und b) den kleinsten Oberflächeninhalt bei konstantem Volumen hat.

U.44 Man beweise: Für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $a+b=1$ gilt

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \ge \frac{25}{2}.$$

(*10. Mathematik-Olympiade 1970/71, Klasse 11–12, Stufe 1*)

U.45 Es seien a, b, c, d positive reelle Zahlen, deren Summe 1 beträgt. Zeige, daß

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a} \ge \frac{1}{2},$$

mit Gleichheit nur für $a=b=c=d=\frac{1}{4}$.
(*Irland, 1999*)

U.3 Elementare symmetrische Funktionen

Vielleicht ist es uns schon an den bisherigen Aufgaben aufgefallen: Viele Ungleichungen beinhalten symmetrische Ausdrücke in den betreffenden Variablen. Einen Ausdruck nennen wir *symmetrisch* in seinen Variablen, wenn jede Permutation der Veränderlichen den Ausdruck unverändert läßt. Dagegen heißt ein Ausdruck *zyklisch (vertauschbar)*, wenn er lediglich invariant gegenüber einer zyklischen Vertauschung der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1) \to \cdots \to (x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}), \text{ oder auch}$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}) \to \cdots \to (x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$$

ist, also nicht „wild“ permutiert wird, sondern die Reihenfolge eingehalten wird. Betrachten wir beispielsweise die symmetrische Summe

$$Q_1(a,b,c) \equiv \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b},$$

so können wir uns leicht überzeugen, daß

$$Q_1(a,b,c) = Q_1(b,c,a) = Q_1(c,a,b) = Q_1(a,c,b) = Q_1(b,a,c) = Q_1(c,b,a)$$

erfüllt ist. Andererseits hat das zyklische Polynom

$$Q_2(x,y,z) \equiv x^2y + y^2z + z^2x$$

nur drei Vertauschungmöglichkeiten: $Q_2(x,y,z) = Q_2(y,z,x) = Q_2(z,x,y)$.

Im folgenden beschäftigen wir uns zunächst mit den einfachsten symmetrischen Termen. Sind $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ die Nullstellen des Polynoms

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x) &\equiv (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\\ &= x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x + (-1)^n\sigma_n = 0,\end{aligned} \tag{U.19}$$

so werden dessen Koeffizienten $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ die *elementaren symmetrischen Funktionen* der Variablen x_i genannt. Formal können wir dafür auch

$$\sigma_k = \sum_{\text{sym}} \left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{\pi_j} \right) \tag{U.20}$$

schreiben, wobei $\pi \equiv (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ eine Permutation von $\pi_j = \{0, 1\}$ mit $\pi_1 + \cdots + \pi_n = k$ darstellt, und die Summation $\sum_{\text{sym}}$ bedeutet, daß über alle Permutationen zu summieren ist (insgesamt also $\binom{n}{k}$ Summanden). Vereinfacht gesagt, ist σ_k somit die Summe aller Produkte der x_i, wobei immer k Faktoren genommen werden.

Für $n = 2$, $x_1 = a$, $x_2 = b$ ergibt sich somit

$$\sigma_1 \equiv a + b, \qquad \sigma_2 = ab, \tag{U.21}$$

für $n = 3$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$

$$\sigma_1 \equiv a + b + c, \qquad \sigma_2 \equiv bc + ca + ab, \qquad \sigma_3 \equiv abc, \tag{U.22}$$

und für $n = 4$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, $x_4 = d$

$$\sigma_1 \equiv a + b + c + d, \qquad \sigma_2 \equiv ab + ac + ad + bc + bd + cd,$$
$$\sigma_3 \equiv bcd + cda + dab + abc, \qquad \sigma_4 \equiv abcd. \tag{U.23}$$

Weiterhin sei angenommen, daß $\sigma_0 = 1$ und $\sigma_k = 0$ für $k > n$ gilt.

Der wohl wichtigste Satz im Zusammenhang mit den elementaren symmetrischen Funktionen ist der sog.

U.51 **Fundamentalsatz (Hauptsatz) über symmetrische Polynome.** Jedes symmetrische Polynom $P(x_1, \ldots, x_n)$ (mit ganzzahligen Koeffizienten) läßt sich als Polynom (mit ganzzahligen Koeffizienten) in den elementaren symmetrischen Funktionen $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ schreiben.

Wie sieht diese Zerlegung in die Bausteine σ_k in Praxis aus? Wir geben im folgenden einige Beispiele für $n = 3$ Variablen an, die wohl in Aufgaben auch am häufigsten anzutreffen sind. Dabei treten mitunter die Potenzsummen

$$s_k \equiv x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \tag{U.24}$$

auf, die üblicherweise mit s_k abkürzt werden.

Polynome 2. Grades

$$s_2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \tag{U.25}$$

Polynome 3. Grades

$$s_3 \equiv a^3 + b^3 + c^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3, \tag{U.26}$$
$$bc(b + c) + ca(c + a) + ab(a + b) = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3, \tag{U.27}$$
$$(b + c)(c + a)(a + b) = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3, \tag{U.28}$$

Polynome 4. Grades

$$s_4 \equiv a^4 + b^4 + c^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2, \tag{U.29}$$
$$bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) + ab(a^2 + b^2) = \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2^2, \tag{U.30}$$
$$b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = -2\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2^2. \tag{U.31}$$

Eine umfangreiche Übersicht findet sich in den Tabellen T.1 bis T.3.

Aus diesen Identitäten lassen sich nun sehr leicht Ungleichungen in den elementaren symmetrischen Funktionen gewinnen: Auf den linken Seiten stehen klar positive Größen, also müssen auch die rechten Seiten positiv sein. Dort sind jedoch stets negative Summanden vorhanden, so daß diese auf die andere Seite der Ungleichung gebracht werden können. Aus (U.28) folgt z. B. $\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3 \geq 0$ oder $\sigma_1\sigma_2 \geq \sigma_3$.

Es zeigt sich jedoch, daß diese Ungleichungen nicht besonders „scharf“ sind. Man sagt, eine Ungleichung $x \geq y$ kann für x *verschärft* werden, wenn sie auch für ein größeres $y + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ gilt (ebenso für y, wenn sie für ein kleineres $x - \varepsilon$ gilt). Z. B. ist (U.27) $\sigma_1\sigma_2 \geq 3\sigma_3$ schärfer als (U.28).

Wie gelangen wir nun zu den interessanten scharfen Ungleichungen? Ganz einfach: Wir setzen in quadratische Ausdrücke möglichst viel Differenzen ein! Auf diese Weise lassen sich mit etwas Aufwand folgende Ungleichungen gewinnen:

U.52 Es gelten folgende Ungleichungen in den elementaren symmetrischen Funktionen $\sigma_1 \equiv a+b+c$, $\sigma_2 \equiv bc+ca+ab$ und $\sigma_3 = abc$:

$$\sigma_1^2 \geq 3\sigma_2, \tag{U.32}$$

$$\sigma_1\sigma_2 \geq 9\sigma_3, \tag{U.33}$$

$$2\sigma_1^3 + 9\sigma_3 \geq 7\sigma_1\sigma_2, \tag{U.34}$$

$$\sigma_1^4 + 9\sigma_2^2 \geq 6\sigma_1^2\sigma_2, \tag{U.35}$$

$$\sigma_2^2 \geq 3\sigma_1\sigma_3, \tag{U.36}$$

$$\sigma_1(\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) \geq 4\sigma_2^2, \tag{U.37}$$

$$\sigma_1^2\sigma_2 \geq 3\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2, \tag{U.38}$$

$$\sigma_1^4 + 3\sigma_1\sigma_3 + 5\sigma_2^2 \geq 5\sigma_1^2\sigma_2, \tag{U.39}$$

$$\sigma_2(\sigma_1^3 + 27\sigma_3) \geq 3\sigma_1(3\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2^2), \tag{U.40}$$

$$\sigma_2(\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) \geq 4\sigma_1^2\sigma_3, \tag{U.41}$$

$$\sigma_1(2\sigma_1^4 + 9\sigma_1\sigma_3 + 21\sigma_2^2) \geq \sigma_2(13\sigma_1^3 + 27\sigma_3), \tag{U.42}$$

$$\sigma_1\sigma_2^2 \geq \sigma_3(2\sigma_1^2 + 3\sigma_2), \tag{U.43}$$

$$\sigma_1^3\sigma_2 + \sigma_1^2\sigma_3 + 6\sigma_2\sigma_3 \geq 4\sigma_1\sigma_2^2, \tag{U.44}$$

$$\sigma_2(\sigma_1^3 + 15\sigma_3) \geq \sigma_1(5\sigma_1\sigma_3 + 3\sigma_2^2), \tag{U.45}$$

$$\sigma_1(2\sigma_1^4 + 10\sigma_1\sigma_3 + 17\sigma_2^2) \geq 3\sigma_2(4\sigma_1^3 + 7\sigma_3), \tag{U.46}$$

$$\sigma_1(2\sigma_1^4 + 11\sigma_1\sigma_3 + 13\sigma_2^2) \geq \sigma_2(11\sigma_1^3 + 15\sigma_3), \tag{U.47}$$

$$\sigma_1(\sigma_1^4 + 9\sigma_1\sigma_3 + 12\sigma_2^2) \geq \sigma_2(7\sigma_1^3 + 27\sigma_3), \tag{U.48}$$

$$\sigma_1(2\sigma_1^5 + 57\sigma_1\sigma_2^2 + 54\sigma_2\sigma_3) \geq 3(6\sigma_1^4\sigma_2 + 4\sigma_1^3\sigma_3 + 22\sigma_2^3 + 27\sigma_3^2), \tag{U.49}$$

$$\sigma_1^2\sigma_2^2 + 27\sigma_3^2 \geq 2(\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_2^3), \tag{U.50}$$

$$\sigma_1^4\sigma_2 + 7\sigma_1^3\sigma_3 + 16\sigma_2^3 + 27\sigma_3^2 \geq \sigma_1\sigma_2(8\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3), \tag{U.51}$$

$$\sigma_2(\sigma_1^4 + 27\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2) \geq 7\sigma_1^3\sigma_3 + 4\sigma_1^2\sigma_2^2 + 27\sigma_3^2, \tag{U.52}$$

$$\sigma_1\sigma_2(\sigma_1\sigma_2 + 10\sigma_3) \geq 4\sigma_1^3\sigma_3 + 2\sigma_2^3 + 9\sigma_3^2, \tag{U.53}$$

$$2\sigma_2^3 + 9\sigma_3^2 \geq 7\sigma_1\sigma_2\sigma_3, \tag{U.54}$$

$$\sigma_1^2(2\sigma_1^4 + 2\sigma_1\sigma_3 + 41\sigma_2^2) \geq 16\sigma_1^4\sigma_2 + 34\sigma_2^3 + 27\sigma_3^2, \tag{U.55}$$

$$2\sigma_1^6 + 12\sigma_1^3\sigma_3 + 51\sigma_1^2\sigma_2^2 + 81\sigma_3^2 \geq 6\sigma_2(3\sigma_1^4 + 9\sigma_1\sigma_3 + 7\sigma_2^2), \tag{U.56}$$

$$\sigma_1\sigma_2(\sigma_1\sigma_2 + 18\sigma_3) \geq 4\sigma_1^3\sigma_3 + 4\sigma_2^3 + 27\sigma_3^2, \tag{U.57}$$

$$\sigma_1^6 + 10\sigma_1^3\sigma_3 + 18\sigma_1^2\sigma_2^2 + 27\sigma_3^2 \geq 4\sigma_2(2\sigma_1^4 + 9\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2), \tag{U.58}$$

$$3\sigma_1\sigma_2(\sigma_1\sigma_2 + 12\sigma_3) \geq 10\sigma_1^3\sigma_3 + 10\sigma_2^3 + 27\sigma_3^2. \tag{U.59}$$

U.53 Zeige, daß folgende Bedingungen einander äquivalent sind:

$$\{\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \ldots, \sigma_n > 0\} \iff \{x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0\}. \qquad \text{(U.60)}$$

Beispiel: Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\{a + b + c > 0,\ bc + ca + ab > 0,\ abc > 0\} \iff \{a > 0, b > 0, c > 0\}.$$

U.54 Folgt aus $\sigma_1 = a + b + c > 0$ und $\sigma_3 = abc > 0$ auch $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$?

U.4 Weitere Ungleichungen

Abschließend eine Sammlung von Ungleichungen, die sich sowohl als Übungsmaterial als auch zum Nachschlagen eignet.

U.81 Es seien a, b, c und d positive Zahlen. Beweisen Sie, daß unter dieser Voraussetzung stets folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} > \frac{4}{a+b+c+d}.$$

(*36. Mathematik-Olympiade 1996/97, Klasse 9, Stufe 2*)

U.82 Für $a, b, c, d, e \geq 0$ gilt

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2)(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3) \geq 25abcde.$$

U.83 Es sei $b_1, b_2, \ldots, b_n$ eine beliebige Permutation der positiven Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dann gilt:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geq n.$$

U.84 Ist $S \equiv x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ die Summe positiver reeller Zahlen x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, dann gilt

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \leq 1 + S + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \cdots + \frac{S^n}{n!}.$$

(*APMO, 1989*)

U.85 $a \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $b \equiv (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ seien Folgen positiver reeller Zahlen. Dann gilt

$$\min_{1 \leq k \leq n} \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k} \leq \max_{1 \leq k \leq n} \frac{a_k}{b_k}$$

mit Gleichheit in beiden Ungleichungen genau dann, wenn beide Folgen a und b zueinander proportional sind.

U.86 $$\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b}\le\frac{1}{2}(a+b+c)\qquad(a,b,c>0).$$

U.87 $$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}\ge\frac{9}{a+b+c}\qquad(a,b,c>0).$$

U.88 Für positive Zahlen x, y, z, die die Gleichung $x+y+z=1$ erfüllen, zeige man

a) $\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{1}{y}+1\right)\left(\frac{1}{z}+1\right)\ge 64,$

b) $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)\ge 8.$

U.89 Für alle reelle Zahlen $a,b,c>-1$, die

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1$$

erfüllen, gilt $abc\ge 8$.

U.90 Man zeige, daß aus $c+d\le\min(a,b)$ mit $a,b,c,d\ge 0$ folgt:

$$ad+bc\le ab\qquad\text{und}\qquad ac+bd\le ab.$$

U.91 Die nichtnegativen reellen Zahlen a,b,c,d,e,f erfüllen die Bedingungen $a+b\le e$ und $c+d\le f$. Dann gilt

$$\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\le\sqrt{ef}\qquad\text{bzw.}\qquad\sqrt{ad}+\sqrt{bc}\le\sqrt{ef}.$$

U.92 Für $x,y,z>0$ ist

$$\frac{x^4}{yz^3}+\frac{y^4}{zx^3}+\frac{z^4}{xy^3}\ge 3.$$

G

GEOMETRISCHE UNGLEICHUNGEN

Die Überschrift dieses Kapitels deutet darauf hin, daß es eine Kombination aus den Gebieten *Geometrie* und *Ungleichungen* gibt, die eine gewisse Eigenständigkeit erlangt hat. Bestes Beispiel dafür sind die Titel der Bücher [Bot69] und [Kaz61].

In erster Linie ist die Eigenständigkeit gegenüber den „gewöhnlichen“ Ungleichungen, so wir sie im Kapitel U betrachtet haben, dadurch begründet, daß bei geometrischen Ungleichungen mitunter *zusätzliche* Voraussetzungen erfüllt sein müssen. Nehmen wir z. B. Ungleichungen in den Seitenlängen a, b, c eines Dreiecks (Abschnitt G.1), so ist klar, daß nicht nur wie bisher häufig $a, b, c \geq 0$ vorausgesetzt wird, sondern außerdem die *Dreiecksungleichungen* (s. Aufgabe U.3) erfüllt sein müssen, wenn es sich bei a, b, c tatsächlich um die Seitenlängen eines Dreiecks handeln soll. Darüber hinaus gibt es in einigen Fällen auch „anschauliche“ geometrische Interpretationen der ansonsten abstrakten Ungleichungen.

Die in diesem Kapitel verwendeten Bezeichnungen der Stücke geometrischer Figuren sind in Tabelle X.2 zusammengestellt.

G.1 Ungleichungen im Dreieck

Dieser Abschnitt enthält eine Vielzahl bekannter Ungleichungen, die zwischen gewissen Stücken eines Dreiecks gelten. Gerade für mathematische Puzzles in Problemzeitschriften werden diese häufig benötigt, und sei es auch nur als Teil der angestrebten Lösung. Deshalb ist diese Übersicht bewußt im Stil eines Kompendiums angelegt. In den Lösungen wird dennoch ein Beweis der Relation erbracht. Natürlich ist das Material nicht neu, es stützt sich im wesentlichen auf [Bot69]. Auch die Gliederung wurde von dort übernommen, wobei zahlreiche neuere Ungleichungen eingearbeitet wurden.

Um Schreibarbeit zu sparen, verabreden wir, das Symbol $\triangle$ hinter der betreffenden Ungleichung anzugeben, wenn Gleichheit im Fall eines *gleichseitigen* Dreiecks vorliegt, dagegen das Symbol $\triangleleft$ für Gleichheit im Fall eines *gleichschenkligen* Dreiecks.

G.1.1 Ungleichungen für die Seitenlängen

Wenn nicht anders angegeben, setzen wir nachfolgend stets $a, b, c > 0$ voraus, d. h., zu Strecken entartete Dreiecke werden nicht betrachtet. Außerdem gelten die Dreiecksungleichungen (s. Aufgabe U.3)

$$|b-c| < a < b+c, \qquad |c-a| < b < c+a, \qquad |a-b| < c < a+b. \tag{G.1}$$

Um nun diese Voraussetzungen unter einen Hut zu bringen, wird häufig folgende Variablensubstitution durchgeführt, die wir bereits aus Aufgabe D.63 kennen:

$$x \equiv \frac{b+c-a}{2} = s-a, \quad y \equiv \frac{c+a-b}{2} = s-b, \quad z \equiv \frac{a+b-c}{2} = s-c, \tag{G.2}$$

wobei $s \equiv \frac{1}{2}(a+b+c)$ der halbe Umfang des Dreiecks ist. Wegen (G.1) gilt dann stets

$$x, y, z > 0. \tag{G.3}$$

Dies hat den Vorteil, daß eine in die Größen x, y, z umgeschriebene Ungleichung bereits garantiert, daß tatsächlich ein Dreieck vorliegt, und wir mit (G.3) den Anschluß an die Standard-Ungleichungen des Kapitels U haben. Natürlich läßt sich die Transformation (G.2) auch umkehren:

$$a = y+z, \qquad b = z+x, \qquad c = x+y. \tag{G.4}$$

Hieraus sehen wir, daß der bei AM-GM-HM oder Cauchy-Schwarz eintretende Fall des Gleichheitszeichens in der betreffenden Ungleichung für $x = y = z$ gerade bei einem *gleichseitigen* Dreieck auftritt.

G.1 Es gilt

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b). \ \triangle \tag{G.5}$$

G.2 Man beweise

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \tag{G.6}$$

und bestimme, wann Gleichheit auftritt.
(*APMO, 1996*)

G.3 Es seien a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks. Beweise

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0 \tag{G.7}$$

und bestimme, in welchem Fall Gleichheit auftritt.
(*24. IMO, Frankreich, Paris, 1983*)

G.4 Beweise, daß mit a, b, c als Seitenlängen eines Dreiecks folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{b+c-a}. \tag{G.8}$$

(*Polen, 1993*)

G.1.2 Ungleichungen für die Winkel

Hier haben wir als Nebenbedingung die Winkelsumme im Dreieck zu beachten:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi. \tag{G.41}$$

G.42 Für die Winkel α, β, γ eines Dreiecks gilt stets

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}, \tag{G.42}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \sqrt{3}\,\frac{3}{2}. \tag{G.43}$$

G.1.3 Ungleichungen für die Radien

G.51 Der Umkreisradius R eines Dreiecks ist mindestens doppelt so groß wie der Inkreisradius I:

$$R \geq 2\,r. \tag{G.51}$$

G.1.4 Ungleichungen für die Seiten- und Winkelhalbierenden

G.61 Für die Summe der Längen der Seitenhalbierenden $m \equiv m_a + m_b + m_c$ eines Dreiecks gilt stets

$$\frac{3}{2}s < m < 2s, \tag{G.61}$$

wobei $s \equiv \frac{1}{2}(a+b+c)$ dessen halber Umfang ist.

G.2 Ungleichungen in Vierecken

Die wohl am häufigsten anzutreffende Ungleichung in den Seiten eines Vierecks ist

G.81 **Ptolemäus' Ungleichung.** In jedem konvexen Viereck $ABCD$ gilt:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD, \tag{G.81}$$

mit Gleichheit genau bei einem Sehnenviereck.

G.82 In jedem konvexen Viereck $ABCD$ gilt mit dem halben Umfang $s \equiv \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ sowie den Diagonalenlängen $p \equiv AC$, $q \equiv BD$:

$$s < p + q < 2s. \tag{G.82}$$

T

TABELLEN

Hier finden sich einige mitunter nützliche Tabellen, die aus dem laufenden Text herausgenommen wurden, damit dieser kompakt bleibt.

Tabelle T.1. Symmetrische Polynome $\mathcal{S}\{p,q\}$, $p \geq q$ für $n = 2$ ausgedrückt durch die elementaren symmetrischen Funktionen $\sigma_1 \equiv a + b$ und $\sigma_2 \equiv ab$

Polynome 1. Grades	σ_1			
$\mathcal{S}\{1,0\} = a + b \equiv \sigma_1$	1			
Polynome 2. Grades	σ_1^2	σ_2		
$\mathcal{S}\{2,0\} = a^2 + b^2 \equiv s_2$	1	-2		
$\mathcal{S}\{1,1\} = 2ab \equiv 2\sigma_2$	0	2		
Polynome 3. Grades	σ_1^3	$\sigma_1\sigma_2$		
$\mathcal{S}\{3,0\} = a^3 + b^3 \equiv s_3$	1	-3		
$\mathcal{S}\{2,1\} = ab(a + b)$	0	1		
Polynome 4. Grades	σ_1^4	$\sigma_1^2\sigma_2$	σ_2^2	
$\mathcal{S}\{4,0\} = a^4 + b^4 \equiv s_4$	1	-4	2	
$\mathcal{S}\{3,1\} = ab(a^2 + b^2)$	0	1	-2	
$\mathcal{S}\{2,2\} = 2a^2b^2$	0	0	2	
Polynome 5. Grades	σ_1^5	$\sigma_1^3\sigma_2$	$\sigma_1\sigma_2^2$	
$\mathcal{S}\{5,0\} = a^5 + b^5 \equiv s_5$	1	-5	5	
$\mathcal{S}\{4,1\} = ab(a^3 + b^3)$	0	1	-3	
$\mathcal{S}\{3,2\} = a^2b^2(a + b)$	0	0	1	
Polynome 6. Grades	σ_1^6	$\sigma_1^4\sigma_2$	$\sigma_1^2\sigma_2^2$	σ_2^3
$\mathcal{S}\{6,0\} = a^6 + b^6 \equiv s_6$	1	-6	9	-2
$\mathcal{S}\{5,1\} = ab(a^4 + b^4)$	0	1	-4	2
$\mathcal{S}\{4,2\} = a^2b^2(a^2 + b^2)$	0	0	1	-2
$\mathcal{S}\{3,3\} = 2a^3b^3$	0	0	0	2
Polynome 7. Grades	σ_1^7	$\sigma_1^5\sigma_2$	$\sigma_1^3\sigma_2^2$	$\sigma_1\sigma_2^3$
$\mathcal{S}\{7,0\} = a^7 + b^7 \equiv s_7$	1	-7	14	-7
$\mathcal{S}\{6,1\} = ab(a^5 + b^5)$	0	1	-5	5
$\mathcal{S}\{5,2\} = a^2b^2(a^3 + b^3)$	0	0	1	-3
$\mathcal{S}\{4,3\} = a^3b^3(a + b)$	0	0	0	1

Tabelle T.1. Symmetrische Polynome $\mathcal{S}\{p,q\}$, $p \geq q$ für $n = 2$ ausgedrückt durch die elementaren symmetrischen Funktionen $\sigma_1 \equiv a + b$ und $\sigma_2 \equiv ab$ (Fortsetzung)

Polynome 8. Grades	σ_1^8	$\sigma_1^6\sigma_2$	$\sigma_1^4\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\sigma_2^3$	σ_2^4	
$\mathcal{S}\{8,0\} = a^8 + b^8 \equiv s_8$	1	−8	20	−16	2	
$\mathcal{S}\{7,1\} = ab(a^6 + b^6)$	0	1	−6	9	−2	
$\mathcal{S}\{6,2\} = a^2b^2(a^4 + b^4)$	0	0	1	−4	2	
$\mathcal{S}\{5,3\} = a^3b^3(a^2 + b^2)$	0	0	0	1	−2	
$\mathcal{S}\{4,4\} = 2a^4b^4$	0	0	0	0	2	
Polynome 9. Grades	σ_1^9	$\sigma_1^7\sigma_2$	$\sigma_1^5\sigma_2^2$	$\sigma_1^3\sigma_2^3$	$\sigma_1\sigma_2^4$	
$\mathcal{S}\{9,0\} = a^9 + b^9 \equiv s_9$	1	−9	27	−30	9	
$\mathcal{S}\{8,1\} = ab(a^7 + b^7)$	0	1	−7	14	−7	
$\mathcal{S}\{7,2\} = a^2b^2(a^5 + b^5)$	0	0	1	−5	5	
$\mathcal{S}\{6,3\} = a^3b^3(a^3 + b^3)$	0	0	0	1	−3	
$\mathcal{S}\{5,4\} = a^4b^4(a + b)$	0	0	0	0	1	
Polynome 10. Grades	σ_1^{10}	$\sigma_1^8\sigma_2$	$\sigma_1^6\sigma_2^2$	$\sigma_1^4\sigma_2^3$	$\sigma_1^2\sigma_2^4$	σ_2^5
$\mathcal{S}\{10,0\} = a^{10} + b^{10} \equiv s_{10}$	1	−10	35	−50	25	−2
$\mathcal{S}\{9,1\} = ab(a^8 + b^8)$	0	1	−8	20	−16	2
$\mathcal{S}\{8,2\} = a^2b^2(a^6 + b^6)$	0	0	1	−6	9	−2
$\mathcal{S}\{7,3\} = a^3b^3(a^4 + b^4)$	0	0	0	1	−4	2
$\mathcal{S}\{6,4\} = a^4b^4(a^2 + b^2)$	0	0	0	0	1	−2
$\mathcal{S}\{5,5\} = 2a^5b^5$	0	0	0	0	0	2

Tabelle T.2. Symmetrische Polynome $\mathcal{S}\{p,q,r\}$, $p \geq q \geq r$ für $n = 3$ ausgedrückt durch die elementaren symmetrischen Funktionen $\sigma_1 \equiv a+b+c$, $\sigma_2 \equiv bc+ca+ab$ und $\sigma_3 \equiv abc$

Polynome 1. Grades	σ_1			
$\mathcal{S}\{1,0,0\} = 2(a+b+c) \equiv 2\sigma_1$	2			
Polynome 2. Grades	σ_1^2	σ_2		
$\mathcal{S}\{2,0,0\} = 2(a^2+b^2+c^2) \equiv 2s_2$	2	-4		
$\mathcal{S}\{1,1,0\} = 2(bc+ca+ab) \equiv 2\sigma_2$	0	2		
Polynome 3. Grades	σ_1^3	$\sigma_1\sigma_2$	σ_3	
$\mathcal{S}\{3,0,0\} = 2(a^3+b^3+c^3) \equiv 2s_3$	2	-6	6	
$\mathcal{S}\{2,1,0\} = bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$	0	1	-3	
$\mathcal{S}\{1,1,1\} = 6abc \equiv 6\sigma_3$	0	0	6	
Polynome 4. Grades	σ_1^4	$\sigma_1^2\sigma_2$	$\sigma_1\sigma_3$	σ_2^2
$\mathcal{S}\{4,0,0\} = 2(a^4+b^4+c^4) \equiv 2s_4$	2	-8	8	4
$\mathcal{S}\{3,1,0\} = bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)+ab(a^2+b^2)$	0	1	-1	-2
$\mathcal{S}\{2,2,0\} = 2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$	0	0	-4	2
$\mathcal{S}\{2,1,1\} = 2(a^2bc+b^2ca+c^2ab)$	0	0	2	0

Tabelle T.2. Symmetrische Polynome $\mathcal{S}\{p,q,r\}$, $p \geq q \geq r$ für $n = 3$ ausgedrückt durch die elementaren symmetrischen Funktionen $\sigma_1 \equiv a+b+c$, $\sigma_2 \equiv bc+ca+ab$ und $\sigma_3 \equiv abc$ (Fortsetzung)

Polynome 5. Grades	σ_1^5	$\sigma_1^3\sigma_2$	$\sigma_1^2\sigma_3$	$\sigma_1\sigma_2^2$	$\sigma_2\sigma_3$			
$\mathcal{S}\{5,0,0\} = 2(a^5+b^5+c^5) \equiv 2s_5$	2	−10	10	10	−10			
$\mathcal{S}\{4,1,0\} = bc(b^3+c^3)+ca(c^3+a^3)+ab(a^3+b^3)$	0	1	−1	−3	5			
$\mathcal{S}\{3,2,0\} = b^2c^2(b+c)+c^2a^2(c+a)+a^2b^2(a+b)$	0	0	−2	1	−1			
$\mathcal{S}\{3,1,1\} = 2(a^3bc+b^3ca+c^3ab)$	0	0	2	0	−4			
$\mathcal{S}\{2,2,1\} = 2(a^2b^2c+b^2c^2a+c^2a^2b)$	0	0	0	0	2			
Polynome 6. Grades	σ_1^6	$\sigma_1^4\sigma_2$	$\sigma_1^3\sigma_3$	$\sigma_1^2\sigma_2^2$	$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$	σ_2^3	σ_3^2	
$\mathcal{S}\{6,0,0\} = 2(a^6+b^6+c^6) \equiv 2s_6$	2	−12	12	18	−24	−4	6	
$\mathcal{S}\{5,1,0\} = bc(b^4+c^4)+ca(c^4+a^4)+ab(a^4+b^4)$	0	1	−1	−4	7	2	−3	
$\mathcal{S}\{4,2,0\} = b^2c^2(b^2+c^2)+c^2a^2(c^2+a^2)+a^2b^2(a^2+b^2)$	0	0	−2	1	4	−2	−3	
$\mathcal{S}\{4,1,1\} = 2(a^4bc+b^4ca+c^4ab)$	0	0	2	0	−6	0	6	
$\mathcal{S}\{3,3,0\} = 2(b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3)$	0	0	0	0	−6	2	6	
$\mathcal{S}\{3,2,1\} = ab^2c^2(b+c)+bc^2a^2(c+a)+ca^2b^2(a+b)$	0	0	0	0	1	0	−3	
$\mathcal{S}\{2,2,2\} = 6a^2b^2c^2$	0	0	0	0	0	0	6	
Polynome 7. Grades	σ_1^7	$\sigma_1^5\sigma_2$	$\sigma_1^4\sigma_3$	$\sigma_1^3\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3$	$\sigma_1\sigma_2^3$	$\sigma_1\sigma_3^2$	$\sigma_2^2\sigma_3$
$\mathcal{S}\{7,0,0\} = 2(a^7+b^7+c^7) \equiv 2s_7$	2	−14	14	28	−42	−14	14	14
$\mathcal{S}\{6,1,0\} = bc(b^5+c^5)+ca(c^5+a^5)+ab(a^5+b^5)$	0	1	−1	−5	9	5	−4	−7
$\mathcal{S}\{5,2,0\} = b^2c^2(b^3+c^3)+c^2a^2(c^3+a^3)+a^2b^2(a^3+b^3)$	0	0	−2	1	6	−3	−7	3
$\mathcal{S}\{5,1,1\} = 2(a^5bc+b^5ca+c^5ab)$	0	0	2	0	−8	0	8	4
$\mathcal{S}\{4,3,0\} = b^3c^3(b+c)+c^3a^3(c+a)+a^3b^3(a+b)$	0	0	0	0	−3	1	5	−1
$\mathcal{S}\{4,2,1\} = ab^2c^2(b^2+c^2)+bc^2a^2(c^2+a^2)+ca^2b^2(a^2+b^2)$	0	0	0	0	1	0	−1	−2
$\mathcal{S}\{3,3,1\} = 2(a^3b^3c+b^3c^3a+c^3a^3b)$	0	0	0	0	0	0	−4	2
$\mathcal{S}\{3,2,2\} = 2(a^3b^2c^2+b^3c^2a^2+c^3a^2b^2)$	0	0	0	0	0	0	2	0

Tabelle T.2. Symmetrische Polynome $\mathcal{S}\{p,q,r\}$, $p \geq q \geq r$ für $n = 3$ ausgedrückt durch die elementaren symmetrischen Funktionen $\sigma_1 \equiv a+b+c$, $\sigma_2 \equiv bc+ca+ab$ und $\sigma_3 \equiv abc$ (Fortsetzung)

Polynome 8. Grades	σ_1^8	$\sigma_1^6\sigma_2$	$\sigma_1^5\sigma_3$	$\sigma_1^4\sigma_2^2$	$\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3$	$\sigma_1^2\sigma_2^3$	$\sigma_1^2\sigma_3^2$	$\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3$	σ_2^4	$\sigma_2\sigma_3^2$
$\mathcal{S}\{8,0,0\} = 2(a^8+b^8+c^8) = 2s_8$	2	−16	16	40	−64	−32	24	48	4	−16
$\mathcal{S}\{7,1,0\} = bc(b^6+c^6)+ca(c^6+a^6)+ab(a^6+b^6)$	0	1	−1	−6	11	9	−5	−17	−2	8
$\mathcal{S}\{6,2,0\} = b^2c^2(b^4+c^4)+c^2a^2(c^4+a^4)+a^2b^2(a^4+b^4)$	0	0	−2	1	8	−4	−9	0	2	2
$\mathcal{S}\{6,1,1\} = 2(a^6bc+b^6ca+c^6ab)$	0	0	2	0	−10	0	10	10	0	−10
$\mathcal{S}\{5,3,0\} = b^3c^3(b^2+c^2)+c^3a^3(c^2+a^2)+a^3b^3(a^2+b^2)$	0	0	0	0	−3	1	3	6	−2	−7
$\mathcal{S}\{5,2,1\} = ab^2c^2(b^3+c^3)+bc^2a^2(c^3+a^3)+ca^2b^2(a^3+b^3)$	0	0	0	0	1	0	−1	−3	0	5
$\mathcal{S}\{4,4,0\} = 2(b^4c^4+c^4a^4+a^4b^4)$	0	0	0	0	0	0	4	−8	2	8
$\mathcal{S}\{4,3,1\} = ab^3c^3(b+c)+bc^3a^3(c+a)+ca^3b^3(a+b)$	0	0	0	0	0	0	−2	1	0	−1
$\mathcal{S}\{4,2,2\} = 2(a^4b^2c^2+b^4c^2a^2+c^4a^2b^2)$	0	0	0	0	0	0	2	0	0	−4
$\mathcal{S}\{3,3,2\} = 2(a^3b^3c^2+b^3c^3a^2+c^3a^3b^2)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2

Tabelle T.3. Symmetrische Polynome $\mathcal{S}\{p,q,r,s\}$, $p \geq q \geq r \geq s$ für $n = 4$ ausgedrückt durch die elementaren symmetrischen Funktionen $\sigma_1 \equiv a+b+c+d$, $\sigma_2 \equiv ab+ac+ad+bc+bd+cd$, $\sigma_3 \equiv abc+abd+acd+bcd$ und $\sigma_4 \equiv abcd$

Polynome 1. Grades	σ_1				
$\mathcal{S}\{1,0,0,0\} = a+b+c+d \equiv \sigma_1$	1				
Polynome 2. Grades	σ_1^2	σ_2			
$\mathcal{S}\{2,0,0,0\} = a^2+b^2+c^2+d^2 \equiv s_2$	1	-2			
$\mathcal{S}\{1,1,0,0\} = ab+ac+ad+bc+bd \equiv \sigma_2$	0	1			
Polynome 3. Grades	σ_1^3	$\sigma_1\sigma_2$	σ_3		
$\mathcal{S}\{3,0,0,0\} = a^3+b^3+c^3+d^3 \equiv s_3$	1	-3	3		
$\mathcal{S}\{2,1,0,0\} = ab(a+b)+ac(a+c)+ad(a+d)$ $+bc(b+c)+bd(b+d)+cd(c+d)$	0	1	-3		
$\mathcal{S}\{1,1,1,0\} = abc+abd+acd+bcd \equiv \sigma_3$	0	0	1		
Polynome 4. Grades	σ_1^4	$\sigma_1^2\sigma_2$	$\sigma_1\sigma_3$	σ_2^2	σ_4
$\mathcal{S}\{4,0,0,0\} = a^4+b^4+c^4+d^4 \equiv s_4$	1	-4	4	2	-4
$\mathcal{S}\{3,1,0,0\} = a^3(b+c+d)+b^3(c+d+a)$ $+c^3(d+a+b)+d^3(a+b+c)$	0	1	-1	-2	4
$\mathcal{S}\{2,2,0,0\} = a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2$	0	0	-2	1	2
$\mathcal{S}\{2,1,1,0\} = a^2(bc+bd+cd)+b^2(cd+ca+da)$ $+c^2(da+db+ab)+d^2(ab+ac+bc)$	0	0	1	0	-4
$\mathcal{S}\{1,1,1,1\} = abcd \equiv \sigma_4$	0	0	0	0	1

Tabelle T.3. Symmetrische Polynome $\mathcal{S}\{p,q,r,s\}$, $p \geq q \geq r \geq s$ für $n = 4$ ausgedrückt durch die elementaren symmetrischen Funktionen $\sigma_1 \equiv a+b+c+d$, $\sigma_2 \equiv ab+ac+ad+bc+bd+cd$, $\sigma_3 \equiv abc+abd+acd+bcd$ und $\sigma_4 \equiv abcd$
(Fortsetzung)

Polynome 5. Grades	σ_1^5	$\sigma_1^3\sigma_2$	$\sigma_1^2\sigma_3$	$\sigma_1\sigma_2^2$	$\sigma_2\sigma_3$	$\sigma_1\sigma_4$
$\mathcal{S}\{5,0,0,0\} = a^5+b^5+c^5+d^5 \equiv s_5$	1	−5	5	5	−5	−5
$\mathcal{S}\{4,1,0,0\} = a^4(b+c+d)+b^4(c+d+a)$ $+c^4(d+a+b)+d^4(a+b+c)$	0	1	−1	−3	5	1
$\mathcal{S}\{3,2,0,0\} = a^2b^2(c+d)+a^2c^2(b+d)+a^2d^2(b+c)$ $+b^2c^2(d+a)+b^2d^2(c+a)+c^2d^2(a+b)$	0	0	−2	1	−1	5

Tabelle T.4. Minimalpolynome für $n = 3$ ausgedrückt durch die elementaren symmetrischen Funktionen $\sigma_1 \equiv a+b+c$, $\sigma_2 \equiv bc+ca+ab$ und $\sigma_3 \equiv abc$

Polynome 2. Grades

$$Q \equiv (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 = 2\sigma_1^2 - 6\sigma_2, \tag{T.1}$$

Polynome 3. Grades

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 = \sigma_1\sigma_2 - 9\sigma_3, \tag{T.2}$$

$$(b+c)(b-c)^2 + (c+a)(c-a)^2 + (a+b)(a-b)^2 = 2\sigma_1^3 - 7\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3, \tag{T.3}$$

Polynome 4. Grades

$$\begin{aligned}(b-c)^4 + (c-a)^4 + (a-b)^4 &= \\ 2[(b-c)^2(c-a)^2 + (c-a)^2(a-b)^2 + (a-b)^2(b-c)^2] &\\ = 2\sigma_1^4 - 12\sigma_1^2\sigma_2 + 18\sigma_2^2,&\end{aligned} \tag{T.4}$$

$$a^2(b-c)^2 + b^2(c-a)^2 + c^2(a-b)^2 = 2\sigma_2^2 - 6\sigma_1\sigma_3, \tag{T.5}$$

$$bc(b-c)^2 + ca(c-a)^2 + ab(a-b)^2 = \sigma_1^2\sigma_2 + 3\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_2^2, \tag{T.6}$$

$$\begin{aligned}a(b+c)(b-c)^2 + b(c+a)(c-a)^2 + c(a+b)(a-b)^2 &\\ = \sigma_1^2\sigma_2 - 3\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2^2,&\end{aligned} \tag{T.7}$$

$$\begin{aligned}(b^2+c^2)(b-c)^2 + (c^2+a^2)(c-a)^2 + (a^2+b^2)(a-b)^2 &\\ = 2\sigma_1^4 - 10\sigma_1^2\sigma_2 + 6\sigma_1\sigma_3 + 10\sigma_2^2,&\end{aligned} \tag{T.8}$$

Polynome 5. Grades

$$\begin{aligned}a(b-c)^4 + b(c-a)^4 + c(a-b)^4 &= \\ (b+c)(c-a)^2(a-b)^2 + (c+a)(a-b)^2(b-c)^2 + (a+b)(b-c)^2(c-a)^2 &\\ = \sigma_1^3\sigma_2 - 9\sigma_1^2\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_2^2 + 27\sigma_2\sigma_3,&\end{aligned} \tag{T.9}$$

$$a^3(b-c)^2 + b^3(c-a)^2 + c^3(a-b)^2 = -4\sigma_1^2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2^2 + 3\sigma_2\sigma_3, \tag{T.10}$$

$$\begin{aligned}(b+c)(b-c)^4 + (c+a)(c-a)^4 + (a+b)(a-b)^4 &\\ = 2\sigma_1^5 - 13\sigma_1^3\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_3 + 21\sigma_1\sigma_2^2 - 27\sigma_2\sigma_3,&\end{aligned} \tag{T.11}$$

$$\begin{aligned}a^2(b+c)(b-c)^2 + b^2(c+a)(c-a)^2 + c^2(a+b)(a-b)^2 &\\ = -2\sigma_1^2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2^2 - 3\sigma_2\sigma_3,&\end{aligned} \tag{T.12}$$

$$\begin{aligned}bc(b+c)(b-c)^2 + ca(c+a)(c-a)^2 + ab(a+b)(a-b)^2 &\\ = \sigma_1^3\sigma_2 + \sigma_1^2\sigma_3 - 4\sigma_1\sigma_2^2 + 6\sigma_2\sigma_3,&\end{aligned} \tag{T.13}$$

$$\begin{aligned}a(b^2+c^2)(b-c)^2 + b(c^2+a^2)(c-a)^2 + c(a^2+b^2)(a-b)^2 &\\ = \sigma_1^3\sigma_2 - 5\sigma_1^2\sigma_3 - 3\sigma_1\sigma_2^2 + 15\sigma_2\sigma_3,&\end{aligned} \tag{T.14}$$

$$\begin{aligned}(b^3+c^3)(b-c)^2 + (c^3+a^3)(c-a)^2 + (a^3+b^3)(a-b)^2 &\\ = 2\sigma_1^5 - 12\sigma_1^3\sigma_2 + 10\sigma_1^2\sigma_3 + 17\sigma_1\sigma_2^2 - 21\sigma_2\sigma_3,&\end{aligned} \tag{T.15}$$

$$(b+c)(b^2+c^2)(b-c)^2 + (c+a)(c^2+a^2)(c-a)^2 + (a+b)(a^2+b^2)(a-b)^2$$

$$= 2\sigma_1^5 - 11\sigma_1^3\sigma_2 + 11\sigma_1^2\sigma_3 + 13\sigma_1\sigma_2^2 - 15\sigma_2\sigma_3, \tag{T.16}$$

$$c(b-c)^2(c-a)^2 + a(c-a)^2(a-b)^2 + b(a-b)^2(b-c)^2$$
$$= \sigma_1^5 - 7\sigma_1^3\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_3 + 12\sigma_1\sigma_2^2 - 27\sigma_2\sigma_3, \tag{T.17}$$

Tabelle T.4. Minimalpolynome für $n = 3$ ausgedrückt durch die elementaren symmetrischen Funktionen $\sigma_1 \equiv a+b+c$, $\sigma_2 \equiv bc+ca+ab$ und $\sigma_3 \equiv abc$ (Fortsetzung)

Polynome 6. Grades

$$(b-c)^6 + (c-a)^6 + (a-b)^6$$
$$= 2\sigma_1^6 - 18\sigma_1^4\sigma_2 - 12\sigma_1^3\sigma_3 + 57\sigma_1^2\sigma_2^2 + 54\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 66\sigma_2^3 - 81\sigma_3^2, \tag{T.18}$$

$$a^2(b-c)^4 + b^2(c-a)^4 + c^2(a-b)^4 = -2\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 + 27\sigma_3^2, \tag{T.19}$$

$$bc(b-c)^4 + ca(c-a)^4 + ab(a-b)^4$$
$$= \sigma_1^4\sigma_2 + 7\sigma_1^3\sigma_3 - 8\sigma_1^2\sigma_2^2 - 27\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 16\sigma_2^3 + 27\sigma_3^2, \tag{T.20}$$

$$a(b+c)(b-c)^4 + b(c+a)(c-a)^4 + c(a+b)(a-b)^4$$
$$= \sigma_1^4\sigma_2 - 7\sigma_1^3\sigma_3 - 4\sigma_1^2\sigma_2^2 + 27\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_2^3 - 27\sigma_3^2, \tag{T.21}$$

$$a^4(b-c)^2 + b^4(c-a)^2 + c^4(a-b)^2 =$$
$$- 4\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + 10\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_2^3 - 9\sigma_3^2, \tag{T.22}$$

$$a^3(b+c)(b-c)^2 + b^3(c+a)(c-a)^2 + c^3(a+b)(a-b)^2$$
$$= -7\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_2^3 + 9\sigma_3^2, \tag{T.23}$$

$$(b^2+c^2)(b-c)^4 + (c^2+a^2)(c-a)^4 + (a^2+b^2)(a-b)^4$$
$$= 2\sigma_1^6 - 16\sigma_1^4\sigma_2 + 2\sigma_1^3\sigma_3 + 41\sigma_1^2\sigma_2^2 - 34\sigma_2^3 - 27\sigma_3^2, \tag{T.24}$$

$$(b-c)^2[(c-a)^4 + (a-b)^4] + (c-a)^2[(a-b)^4 + (b-c)^4]$$
$$+ (a-b)^2[(b-c)^4 + (c-a)^4]$$
$$= 2\sigma_1^6 - 18\sigma_1^4\sigma_2 + 12\sigma_1^3\sigma_3 + 51\sigma_1^2\sigma_2^2 - 54\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 42\sigma_2^3 + 81\sigma_3^2, \tag{T.25}$$

$$(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2 = -4\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_2^3 - 27\sigma_3^2, \tag{T.26}$$

$$c^2(b-c)^2(c-a)^2 + a^2(c-a)^2(a-b)^2 + b^2(a-b)^2(b-c)^2$$
$$= \sigma_1^6 - 8\sigma_1^4\sigma_2 + 10\sigma_1^3\sigma_3 + 18\sigma_1^2\sigma_2^2 - 36\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 8\sigma_2^3 + 27\sigma_3^2, \tag{T.27}$$

$$(b^2+c^2)(c-a)^2(a-b)^2 + (c^2+a^2)(a-b)^2(b-c)^2$$
$$+ (a^2+b^2)(b-c)^2(c-a)^2$$
$$= -10\sigma_1^3\sigma_3 + 3\sigma_1^2\sigma_2^2 + 36\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 10\sigma_2^3 - 27\sigma_3^2. \tag{T.28}$$

Tabelle T.5. Minimalpolynome für $n = 4$ ausgedrückt durch die elementaren symmetrischen Funktionen $\sigma_1 \equiv a+b+c+d$, $\sigma_2 \equiv ab+ac+ad+bc+bd+cd$, $\sigma_3 \equiv abc+abd+acd+bcd$ und $\sigma_4 \equiv abcd$

Polynome 2. Grades

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2 = 3\sigma_1^2-8\sigma_2, \quad \text{(T.51)}$$

Polynome 3. Grades

$$(a+b)(a-b)^2+(a+c)(a-c)^2+(a+d)(a-d)^2+(b+c)(b-c)^2 + (b+d)(b-d)^2+(c+d)(c-d)^2 = 3\sigma_1^3-10\sigma_1\sigma_2+12\sigma_3, \quad \text{(T.52)}$$

Polynome 4. Grades

$$(a-b)^4+(a-c)^4+(a-d)^4+(b-c)^4+(b-d)^4+(c-d)^4 = 3\sigma_1^4-16\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+20\sigma_2^2-16\sigma_4, \quad \text{(T.53)}$$

$$ab(a-b)^2+ac(a-c)^2+ad(a-d)^2+bc(b-c)^2 + bd(b-d)^2+cd(c-d)^2 = \sigma_1^2\sigma_2+3\sigma_1\sigma_3-4\sigma_2^2, \quad \text{(T.54)}$$

X

HINWEISE

In der Tabelle X.1 sind die am häufigsten benutzten mathematischen Symbole aufgelistet:

Tabelle X.1. Häufig benutzte mathematische Symbole und Abkürzungen

Symbol	Bedeutung
$\in$	Mitgliedschaft in einer Menge
$\notin$	nicht enthalten in einer Menge
$\subseteq$	Untermenge
$\cup$	Vereinigung zweier Mengen
$\cap$	Schnitt zweier Mengen
$\Rightarrow$	logische Implikation
$\Longleftrightarrow$	logische Äquivalenz (engl. „iff“)
$\equiv$	identisch mit (häufig als Definition benutzt)
$\sim$	ähnlich zu
$\cong$	kongruent zu
$\propto$	proportional zu
$\parallel$	parallel zu
$\nparallel$	nicht parallel zu
$\forall$	für alle
$\exists$	existiert
$\nexists$	existiert nicht
$\therefore$	deshalb
$\because$	weil
$n!$	sprich: „n Fakultät“ $= 1 \cdot 2 \cdots n$
$\lfloor x \rfloor$	größte ganze Zahl $\leq x$
$\lceil x \rceil$	kleinste ganze Zahl $\geq x$
$x \in (a, b)$	offenes Intervall $a < x < b$
$x \in [a, b)$	halboffenes Intervall $a \leq x < b$
$x \in (a, b]$	halboffenes Intervall $a < x \leq b$
$x \in [a, b]$	geschlossenes Intervall $a \leq x \leq b$
$x \in [a, b]$	geschlossenes Intervall $a \leq x \leq b$

Tabelle X.1. Häufig benutzte mathematische Symbole und Abkürzungen (Fortsetzung)

Symbol	Bedeutung
$\emptyset$	leere Menge
$\emptyset$	leere Menge
$\mathbb{N}$	Menge aller natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge aller ganzen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge aller reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge aller komplexen Zahlen
$\mathrm{sgn}(x)$	Vorzeichen von x („Signum“)
$\min(x_1, \ldots, x_n)$	Minimum der Zahlen $x_1, \ldots, x_n$
$\max(x_1, \ldots, x_n)$	Maximum der Zahlen $x_1, \ldots, x_n$
$\exp(z)$	Exponentialfunktion e^z
$\Re[z] = x$	Realteil einer komplexen Zahl z
$\Im[z] = y$	Imaginärteil einer komplexen Zahl z
$\lvert z \rvert$	Betrag (Modulus) einer komplexen Zahl z
$\arg z = \phi$	Argument einer komplexen Zahl z
$\overline{z}$	konjugiert komplexe Zahl zu z
$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$	transponierter Vektor zu $\boldsymbol{u}$

Für die Größen in planimetrischen Figuren, insbesondere in Dreiecken und Vierecken, haben sich feste Bezeichnungen eingebürgert, die in Tabelle X.2 aufgeführt werden. Dabei ist zu beachten, daß den im englischen Sprachraum üblichen Bezeichnungen Vorrang gegeben wurde (s. auch [Bot69]), z. B. m_a anstelle von s_a für die Seitenhalbierende (engl. „median“) oder G anstelle von S für den Schwerpunkt (engl. „gravity center“). Für Winkel verwenden wir jedoch kleine griechische Buchstaben.

Tabelle X.2. Größen in planimetrischen Figuren

Symbol	Bedeutung
A, B, C	Eckpunkte eines Dreiecks
O	Umkreismittelpunkt
I	Inkreismittelpunkt
I_a, I_b, I_c	Mittelpunkte der Ankreise
G	Schwerpunkt
H	Höhenschnittpunkt
Ge	GERGONNEs Punkt
Na	NAGELs Punkt
L	LÉMOINEs Punkt
P	Punkt im Innern eines Dreiecks
α, β, γ	Innenwinkel bei A, B, C
a, b, c	Seitenlängen, wobei $a \equiv BC$, $b \equiv CA$, $c \equiv AB$
R	Umkreisradius
r	Inkreisradius
r_a, r_b, r_c	Ankreisradien
w_a, w_b, w_c	Längen der Winkelhalbierenden
m_a, m_b, m_c	Längen der Seitenhalbierenden
h_a, h_b, h_c	Längen der Höhen
s	halber Umfang $s \equiv \frac{1}{2}(a+b+c)$
x, y, z	Abstände von P zu den Eckpunkten von $\triangle ABC$
u, v, w	Abstände von P zu den Seiten von $\triangle ABC$
w_1, w_2, w_3	Längen der Winkelhalbierenden von $\measuredangle BPC$, $\measuredangle CPA$, $\measuredangle APB$
r'_1, r'_2, r'_3	Längen von Ecktransversalen PD, PE, PF
Δ	Flächeninhalt
Q	$\equiv (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$
p, q	Diagonalen AC, BD

Y

LITERATUR

Y.1 Bücher

[Bap92] Baptist, P.: *Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie*, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim–Leipzig–Wien–Zürich, 1992.

[Bar95] Barbeau, E. J., Klamkin, M. S., Moser, W. O. J.: *Five Hundred Mathematical Challenges*, The Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1995.

[Bie52] Bieberbach, L.: *Theorie der geometrischen Konstruktionen*, Verlag Birkhäuser, Basel, 1952.

[Bir59] Birkhoff, G. D., Beatley, R.: *Basic Geometry*, Chelsea Publishing Company, New York, 1959.

[Bot69] Bottema, O., Djordjević, R. Ž., Janić, R. R., Mitrinović, D. S., Vasić, P. M.: *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, The Netherlands, 1969.

[Bre51] Breidenbach, W.: *Die Dreiteilung des Winkels*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1951.

[Cha97] Chang, G., Sederberg, T. W.: *Over and over again*, The Mathematical Association of America, New Mathematical Library, vol. 39, Washington, D. C., 1997.

[Cho88] Chou, Shang-Ching: *Mechanical Geometry Theorem Proving*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1988.

[Clo98] Cloud, M. J., Drachman, B. C.: *Inequalities – With Applications to Engineering*, Springer, New York–Berlin–Heidelberg, 1998.

[Cou62] Courant, R., Robbins, H.: *Was ist Mathematik?* Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1962.

[Cox63] Coxeter, H. S. M.: *Unvergängliche Geometrie*, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1963.

[Cox67] Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L.: *Geometry revisited*, The Mathematical Association of America, New Mathematical Library, vol. 19, Washington, D. C., 1967.

[Cox83] Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L.: *Zeitlose Geometrie*, Aus d. Amerikan.: *Geometry revisited*, Klett Studienbücher, Klett, Stuttgart, 1983.

[Cra61] Crantz-Hauptmann: *Planimetrie*, Sammlung Crantz, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1961.

[Cro91] Croft, H. T., Falconer, K. J., Guy, R. K.: *Unsolved Problems in Geometry*, Springer, New York, 1991.

[Dub58] Dubnow, J. S.: *Fehler in geometrischen Beweisen*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958.

[Dud92] Dudley, U.: *Mathematical Cranks*, The Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1992.

[Dun94] Dunham, W.: *The Mathematical Universe – An Alphabetical Journey Through the Great Proofs, Problems, and Personalities*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.

[Eng98] Engel, A.: *Problem-Solving Strategies*, Springer, New York, 1998.

[Eng90] Engel, W., Pirl, U. (Hrsg): *Neue Mathematik-Olympiadeaufgaben*, Aulis Verlag Deubner & Co KG, Köln, 1990.

[Enr07] Enriques, F.: *Fragen der Elementargeometrie*, II. Teil, Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1907.

[Gar97] Gardiner, A.: *The Mathematical Olympiad Handbook – An Introduction to Problem Solving*, Oxford University Press, Oxford, New York, Tokyo, 1997.

[Gro69] Grosche, G.: *Übungen für Junge Mathematiker*, Teil 2 Elementargeometrie, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1969.

[Har52] Hardy, G., Littlewood, J. E., Pólya, G.: *Inequalities*, Second Edition, Cambridge University Press, 1952.

[Hei98] Heilbron, J. L.: *Geometry Civilized – History, Culture, and Technique*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[Her86] Herterich, K.: *Die Konstruktion von Dreiecken*, Ernst Klett Verlage GmbH u. Co. KG, Stuttgart, 1986.

[Hon96] Honsberger, R.: *From Erdös To Kiev – Problems of Olympiad Caliber*, The Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1996.

[Hon97] Honsberger, R.: *In Pólya's Footsteps – Miscellaneous Problems and Essays*, The Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1997.

[Kaz61] Kazarinoff, N. D.: *Geometric Inequalities*, Random House & Yale University, New Mathematical Library, No. 4, 1961.

[Ker16] Kerst, B.: *Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben*, Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1916.

[Kla86] Klamkin, M. S.: *International Mathematical Olympiads 1978–1985 and forty supplementary problems*, The Mathematical Association of America, New Mathematical Library, vol. 31, Washington, D. C., 1986.

[Lan97] Lang, S., Murrow, G.: *Geometry*, Springer, New York, 1997.

[Lar83] Larson, L. C.: *Problem-Solving Through Problems*, Problem Books in Mathematics, Springer, New York–Berlin–Heidelberg, 1983.

[Leh96] Lehmann, J.: *Mathematik-Olympiaden – 666 Olympiadeaufgaben aus 42 Ländern*, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1996.

[Mah10] Mahler, G.: *Ebene Geometrie*, Sammlung Göschen, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig, 1910.

[Mar97] Martin, George E.: *Transformation Geometry – An Introduction to Symmetry*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York–Berlin–Heidelberg, 1997.

[Mar98] Martin, George E.: *Geometric Constructions*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York–Berlin–Heidelberg, 1998.

[Met00] Mettler, M.: *Vom Charme der „verblassten" Geometrie* , ISBN 973-9441-97-1, Verlag Eurobit, Timisoara, Romania, 2000.

[Mit64] Mitrinović, D. S.: *Elementary Inequalities*, P. Noordhoff Ltd, Groningen, The Netherlands, 1964.

[Mit70] Mitrinović, D. S.: *Analytic Inequalities*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.

[Ogi84] Ogilvy, C. S.: *Unterhaltsame Geometrie*, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1984.

[Ped95] Pedoe, D.: *Circles – A Mathematical View*, The Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1995.

[Ped94] Peiffer, J., Dahan-Dalmedico, A.: *Wege und Irrwege — Eine Geschichte der Mathematik*, Birkhäuser Verlag, Basel–Boston–Berlin, 1994.

[Pog87] Pogorelov, A. W.: *Geometry*, Mir Publishers, Moscow, 1987.

[Roe93] Roe, J.: *Elementary Geometry*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

[Sma98] Smart, J. R.: *Modern Geometries*, Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, 1998.

[Sve91] Sved, M.: *Journey into Geometries*, The Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1991.

[Tha33a] Thaer, C. (Hrsg.): *Die Elemente von Euklid, 1. Teil*, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 235, Akademische Verlagsgesellschaft m.b.H., Leipzig, 1933.

[Tha33b] Thaer, C. (Hrsg.): *Die Elemente von Euklid, 2. Teil*, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 236, Akademische Verlagsgesellschaft m.b.H., Leipzig, 1933.

[Wei99] Weisstein, E. W.: *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Chapman & Hall/ CRC, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C., 1999.

[Wel91] Wells, D.: *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*, Penguin Books, London, 1991.

[Zha??] Zhang, J. Z.: *A New Approach to Plane Geometry* (in chinesischer Sprache), Sichuan Educational Publishers, 1992, ISBN 7-5408-1611-2, referiert in: *Crux Mathematicorum* 21, p. 232–233, 7 (Sept. 1995).

Y.2 Zeitschriften-Artikel

[1] Paasche, I. „Aufgabe 714.“ *Elem. Math.* **30**, 41–42, 1975.

[2] Erdös, P. „Problem 3740.“ *Amer. Math. Monthly* **42**, 396, 1935.

[3] Mordell, L. J., Barrow, D. F. „Solution to Problem 3740.“ *Amer. Math. Monthly* **44**, 252–254, 1937.

[4] Bankoff, L. „An Elementary Proof of the Erdös-Mordell Theorem“ *Amer. Math. Monthly* **65**, 521, 1958.

Y.3 Zeitschriften

1. *Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem*, Canadian Mathematical Society's Problem Solving Journal, ISSN 0700-0348,
`http://www.camel.math.ca/CMS/CRUX`.

2. *Mathematics Competitions*, Journal of the World Federation of National Mathematics Competitions, ISSN 1031-7503.

3. *Die* $\sqrt{\text{Wurzel}}$, Zeitschrift für Mathematik, ISSN 0232-4539,
`http://www.wurzel-ev.de`.

Y.4 WWW-Adressen

Hinweis: Die URLs sind tatsächlich anklickbar!

[WWW.1] http://www.cut-the-knot.com/arithmetic/antiquity.html

[WWW.2] http://forum.swarthmore.edu/dr.math/faq/faq.impossible.construct.html

[WWW.3] http://www.treasure-troves.com/math/CubeDuplication.html

[WWW.4] http://www.seanet.com/~ksbrown/kmath487.htm

[WWW.5] http://www.cut-the-knot.com/geometry.html

[WWW.6] http://www.ul.ie/~maths/papers.htm

[WWW.7] http://www.math.princeton.edu/~kkedlaya/competitions.html

[WWW.8] http://www.camel.math.ca/IMO/

[WWW.9] http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Lab/4661/

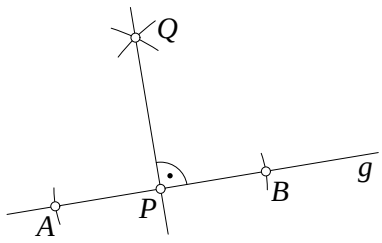
[WWW.10] http://www.ihes.fr/~ilan/mekh-mat.ps

[WWW.11] http://www.bundeswettbewerb-mathematik.de/imo/aufgaben/main.htm

[WWW.12] http://www.unl.edu/amc/

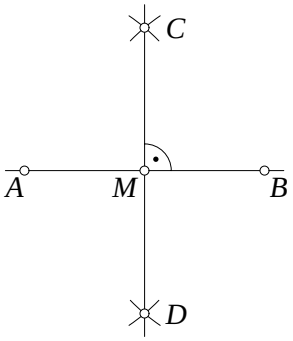
LÖSUNGEN: KONSTRUKTIONEN

A.1 (Bild) Mit dem Punkt P als Mittelpunkt beschreiben wir einen Kreis, der von der gegebenen Gerade g in den Punkten A und B geschnitten wird. Nun zeichnen wir zwei weitere Kreise um A und B mit einem Radius, der größer als der zuvor gewählte ist. Es sei Q einer deren Schnittpunkte. Die durch P und Q gehende Gerade steht senkrecht auf g.



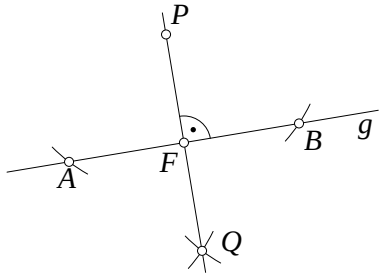
Bemerkung: Diese einfache Konstruktion stützt sich auf die Tatsache, daß die in P errichtete Senkrechte zugleich Mittelsenkrechte und Winkelhalbierende im gleichschenkligen $\triangle AQB$ ist.

A.2 (Bild) Wir schlagen mit dem Zirkel um beide Punkte A und B jeweils einen Kreisbogen mit beliebigem Radius, so daß sich beide Bögen in zwei Punkten C und D schneiden. Die durch C und D mit einem Lineal gezogene Gerade ist dann die Mittelsenkrechte der Strecke AB; sie schneidet insbesondere AB in deren Mittelpunkt M.



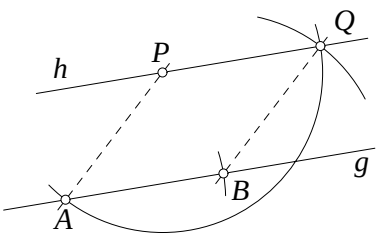
Bemerkung: Die Konstruktion beruht auf der Eigenschaft des Rhombus $ACBD$, daß dessen Diagonalen AB und CD stets senkrecht aufeinander stehen.

A.3 (Bild) Wir beschreiben mit dem Zirkel um den Punkt P einen Kreisbogen mit beliebigem Radius, so daß er die Gerade g in zwei verschiedenen Punkten A und B schneidet. Dann werden mit einem zweiten Radius (der gleich oder verschieden dem zuerst gewählten sein kann) jeweils Kreisbögen um die Punkte A und B geschlagen. Diese Bögen schneiden sich in einem Punkt Q, der bezüglich g (bei gleichem Radius) spiegelbildlich zu P liegt. Die mit einem Lineal gezogene Gerade durch P und Q schneidet die Gerade g im *Fußpunkt* oder *Lotpunkt* F. PF ist das Lot von P auf g; es steht immer senkrecht auf g.



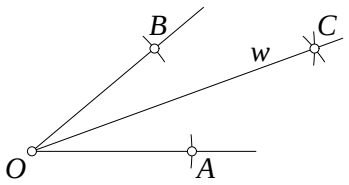
Bemerkung: Die Konstruktion nutzt die Tatsache aus, daß im Drachenviereck $APBQ$ die Diagonalen stets senkrecht aufeinander stehen.

A.4 (Bild) Mit dem Zirkel wird um P ein Kreisbogen mit einem Radius r beschrieben, der die Gerade g in zwei Punkten schneidet; einer davon sei Punkt A. Auf g wird nun von A die gleiche Länge r abgetragen; wir erhalten so Punkt B. Mit derselben Zirkeleinstellung wird anschließend um B ein weiterer Kreisbogen geschlagen. Beide Bögen haben dann außer A noch einen Punkt Q gemeinsam. Die Gerade $h(P,Q)$ ist dann die gesuchte Parallele.

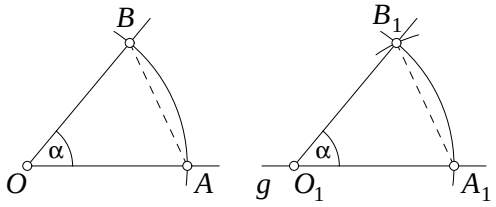


Bemerkung: Das Viereck $APQB$ ist nach obiger Konstruktion ein Rhombus. Die Seiten AB (auf g) und PQ (auf h) verlaufen demzufolge parallel.

A.5 (Bild) Auf beiden Schenkeln des Winkels wird von dessen Scheitelpunkt O eine Strecke beliebiger Länge mit dem Zirkel abgetragen; es entstehen die Punkte A und B, und das $\triangle AOB$ ist somit gleichschenklig. Errichten wir über der Basis AB ein weiteres gleichschenkliges $\triangle ACB$, wobei C nicht mit O zusammenfällt, so liegen die Höhen und Winkelhalbierenden dieser beiden Dreiecke auf der Geraden durch O und C. Mithin ist $w(O, C)$ die gesuchte Winkelhalbierende.

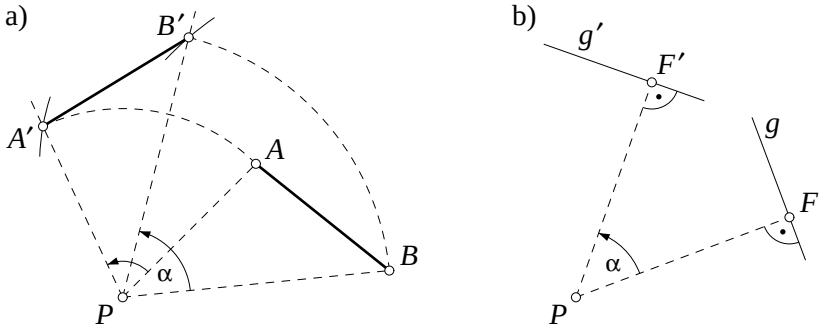


A.6 (Bild) Um den Scheitel O des gegebenen Winkels α wird mit beliebigem Radius ein Kreis beschrieben, der die Schenkel in A und B schneidet. Nun schlagen wir mit dem gleichen Radius um den auf der Geraden g gegebenen Punkt O_1 einen Kreis, der die Gerade in A_1 schneidet; anschließend beschreiben wir mit AB um A_1 einen Kreis. Einer der Schnittpunkte beider Kreise sei B_1. Ziehen wir nun O_1B_1, so ist $\measuredangle B_1O_1A_1$ der verlangte Winkel α.



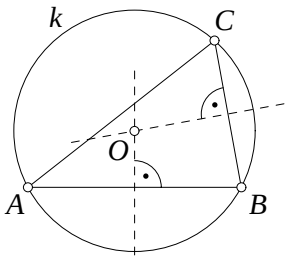
Bemerkung: Die Richtigkeit der Konstruktion folgt aus dem Kongruenzsatz SSS (s. Aufgabe B.3) für die beiden Dreiecke $O_1A_1B_1$ und OAB.

A.7 Wir ziehen die beiden Strahlen PA und PB und tragen an diese den gegebenen Winkel α in der vorgesehenen Richtung ab (Bild a, vgl. Aufgabe A.6). Auf den freien Schenkeln liegen die Endpunkte der gedrehten Strecke $A'B'$ dann jeweils in den Entfernungen $PA' = PA$ bzw. $PB' = PB$.

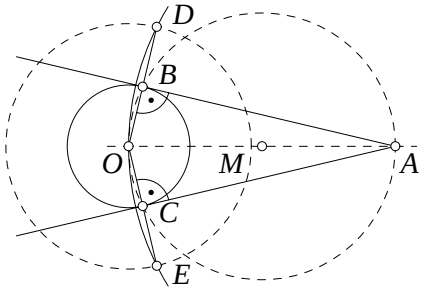


Bemerkung: Falls wir eine *Gerade* g zu drehen haben, können wir auf ihr willkürlich zwei verschiedene Punkte festlegen und diese um P drehen. Einfacher ist es jedoch, den Lotfußpunkt F von P auf g nach F' zu drehen und in diesem die Senkrechte zu PF' zu konstruieren (Bild b).

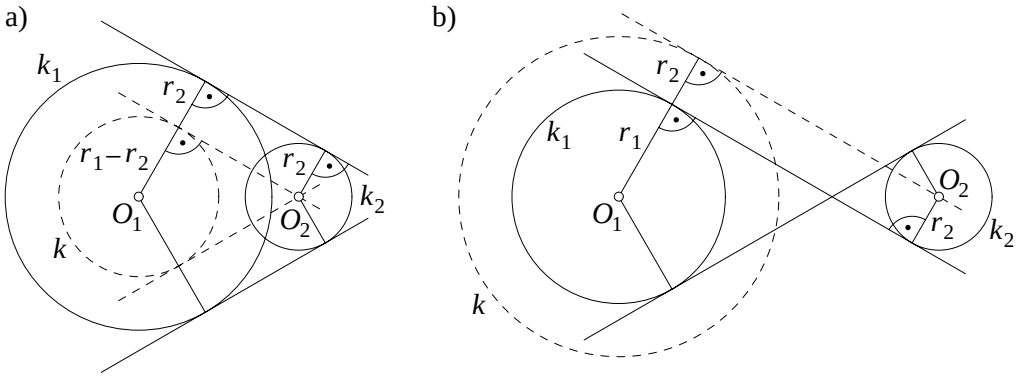
A.8 (Bild) Die drei Punkte bilden stets ein $\triangle ABC$ und der gesuchte Kreis ist demzufolge der Umkreis k dieses Dreiecks. Der Mittelpunkt O von k zerlegt das $\triangle ABC$ in drei gleichschenklige Teildreiecke AOB, BOC, COA, in denen O jeweils auf den Mittelsenkrechten der zugehörigen Basen AB, BC und CA liegt. Wir finden O, indem z. B. Punkt B mit A und C verbunden wird und die Mittelsenkrechten dieser Strecken zum Schnitt gebracht werden. O_A ist somit der verlangte Kreis.



A.9 (Bild) Wir beschreiben um O einen Kreis, dessen Radius doppelt so groß wie der des gegebenen Kreises ist. Danach schlagen wir den Kreisbogen A_O, der den konzentrischen Kreis in D und E schneidet. Die Geraden OD und OE treffen dann den gegebenen Kreis in den Berührungspunkten B bzw. C. Wir verbinden A noch mit B und C und haben die geforderten Tangenten konstruiert. — Eine andere Möglichkeit besteht darin, über OA den THALES-Kreis zu errichten, indem zunächst der Mittelpunkt M von OA bestimmt wird. Wir beschreiben dann den Kreis M_A, der den gegebenen Kreis ebenfalls in den Berührungspunkten B und C trifft.

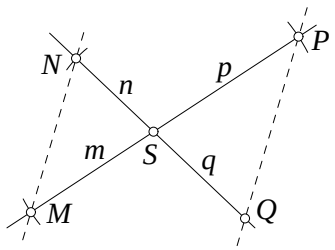


A.10 Die beiden gegebenen Kreise seien k_1, k_2 mit den Mittelpunkten O_1, O_2 sowie den Radien r_1, r_2, wobei o. B. d. A. $r_1 \geq r_2$ angenommen werden kann. Nun hängt es offensichtlich von der gegenseitigen Lage beider Kreise ab, wieviel gemeinsame Tangenten wir finden. Im Fall *1*, bei dem der Mittelpunktsabstand $d \equiv O_1O_2 < r_1 + r_2$ kleiner als die Summe beider Radien ist (d. h., beide Kreise schneiden sich), gibt es nur zwei *gemeinsame äußere* Tangenten (Bild a). Angenommen wir haben die Tangenten bereits, und verschieben sie so parallel, daß sie durch den Mittelpunkt O_2 gehen, dann sind diese offenbar die Tangenten von O_2 an einen Kreis k mit dem Radius $r = r_1 - r_2$ und dem Mittelpunkt O_1. Letztere sind somit aus den gegebenen Stücken konstruierbar (vgl. Aufgabe A.9). Die



gesuchten Tangenten finden wir wie beschrieben durch eine Parallelverschiebung, die von der Zentrale O_1O_2 beider Kreise weggerichtet ist. Im Fall *2* mit $d > r_1 + r_2$ (d. h., zwei sich nicht schneidende Kreise) gibt es außer den äußeren Tangenten noch zwei *gemeinsame innere* Tangenten (Bild b), die wir hier analog zum Fall *1* mittels eines Kreises k mit dem Radius $r_1 + r_2$ und dem Mittelpunkt O_1 erhalten. Schließlich gibt es noch den Fall *3*, bei dem sich beide Kreise genau in einem Punkt berühren, also $d = r_1 + r_2$. Dann gibt es zwei gemeinsame äußere Tangenten und lediglich eine gemeinsame innere Tangente.

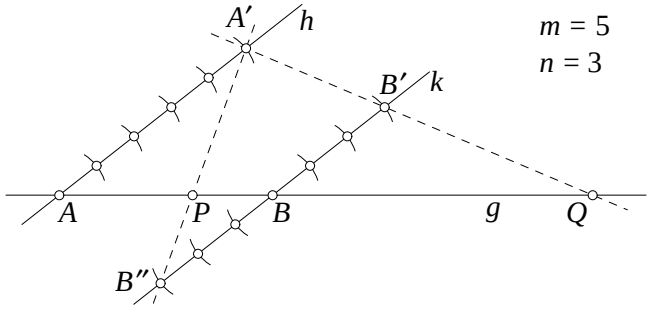
A.11 (Bild) Vom Schnittpunkt S zweier Geraden tragen wir auf drei Strahlen die gegebenen Strecken m, n und p ab, deren Endpunkte M, N bzw. P seien. Nun ziehen wir durch zwei dieser Endpunkte, etwa M und N, eine Gerade und konstruieren die Parallele durch den dritten Endpunkt P. Letztere trifft den vierten Strahl in einem Punkt Q. Die Länge der Strecke SQ ist dann die gesuchte vierte Proportionale.



Beweis: Da $MN \parallel PQ$ ist, folgt aus dem 1. Strahlensatz unmittelbar

$$\frac{SM}{SN} = \frac{m}{n} = \frac{SP}{SQ} = \frac{p}{q} \qquad \text{oder} \qquad SQ = q = \frac{np}{m}. \ \square$$

A.12 (Bild) Wir zeichnen mit dem Lineal durch A eine Gerade h, die nicht mit der durch AB gehenden Geraden g zusammenfällt. Anschließend wird eine zu h parallele Gerade k konstruiert, die durch B geht (vgl. Aufgabe A.4). Dann tragen wir eine beliebige, konstante Strecke von A ausgehend m mal hintereinander mit dem Zirkel auf h ab. Dies liefert den Punkt A'. Von B aus tragen wir auf k dieselbe Strecke n mal in beide Richtungen ab und erhalten so die Punkte B' (in derselben durch g geteilten Halbebene wie A' gelegen) und B''. a) Die Gerade durch A' und B'' schneidet dann die Strecke AB in einem Punkt P, der zwischen A und B liegt. b) Die durch A' und B' gehende Gerade schneidet g in einem Punkt Q außerhalb von AB. Diese Punkte erfüllen die geforderten Eigenschaften.



Beweis: Wegen $h \parallel k$ folgt aus dem 2. Strahlensatz, wenn wir ihn auf die sich bei P bzw. Q schneidenden Geraden anwenden:

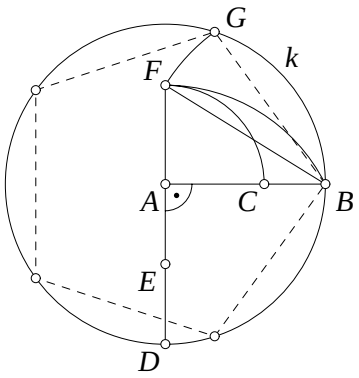
$$\frac{AP}{PB} = \frac{AA'}{B''B} = \frac{m}{n} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{AQ}{QB} = \frac{AA'}{B'B} = -\frac{m}{n}. \ \square$$

Bemerkung 1: Das in der letzten Gleichung auftretende Minuszeichen geht auf NEWTON zurück und rührt vom Begriff der *gerichteten Strecke* her: Befinden sich z. B. die Punkte A, B, Z so auf einer Geraden, daß B zwischen A und Z liegt, so haben AB und BZ gleichen *Richtungssinn* und AB/BZ ist positiv. Dagegen ist der Quotient AZ/ZB wegen $ZB = -BZ$ negativ.

Bemerkung 2: Soll etwa eine Strecke AB in einem Verhältnis a/b (mit gegebenen Längen a und b) geteilt werden, führt natürlich die gleiche Konstruktion zum Ziel, nur daß auf den geschnittenen Parallelen jeweils a bzw. b abgetragen werden.

A.13 obiger Gleichung

$$x^2 = 1 - x \quad \text{mit den Lösungen} \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

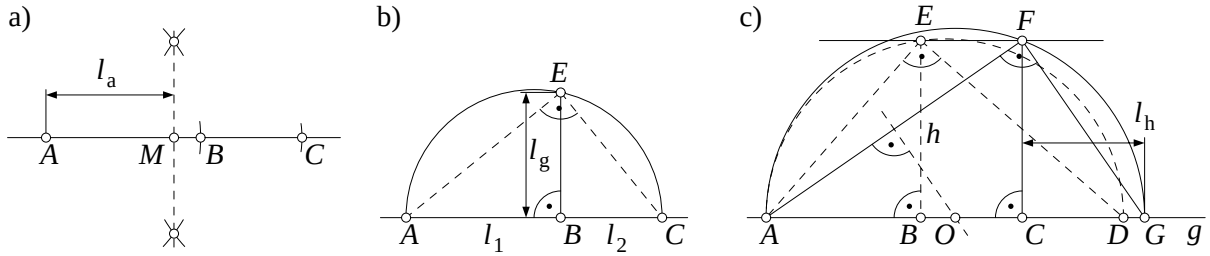


Die positive Wurzel $\varphi \equiv \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ heißt auch *Verhältniszahl des goldenen Schnitts* und kann wie folgt konstruiert werden: Wir beschreiben den Kreis $k \equiv A_B$ und bestimmen Punkt D so auf k, daß $\measuredangle DAB$ ein Rechter ist. E sei der Mittelpunkt von AD. Der Kreis E_B schneide DA in F. Dann ist der gesuchte Punkt C der Schnittpunkt von A_F mit AB. *Beweis:* Nach dem Satz des PYTHAGORAS ist $EB = \frac{\sqrt{5}}{2}$ und somit nach beschriebener Konstruktion $AF = AC = EF - EA = EB - \frac{1}{2} = \varphi$. □
Bemerkung: BF ist zugleich die Seitenlänge eines regelmäßigen Fünfecks, welches k einbeschrieben ist. Der Winkel $\measuredangle GAB$ beträgt somit $\frac{1}{5} \cdot 360° = 72°$. AF ist hingegen gerade die Seitenlänge eines einbeschriebenen regelmäßigen Zehnecks.

A.14 Das *arithmetische Mittel* beträgt $l_\mathrm{a} \equiv \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$, das *geometrische Mittel* (auch „dritte“ oder *mittlere Proportionale* genannt) $l_\mathrm{g} \equiv \sqrt{l_1 l_2}$; für das *harmonische Mittel* gilt:

$$\frac{1}{l_\mathrm{h}} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) \qquad \text{oder} \qquad l_\mathrm{h} = \frac{2\,l_1 l_2}{l_1 + l_2}. \tag{A.101}$$

Daraus ergeben sich folgende Möglichkeiten zur Konstruktion: a) Auf einer Geraden werden die beiden Strecken mit den Längen $l_1 \equiv AB$ und $l_2 \equiv BC$ hintereinander abgetragen und der Mittelpunkt von AC konstruiert (Bild a). Die Länge der Strecke AM ist dann gleich l_a. b) Für das geometrische Mittel gilt nach obiger Gleichung auch: $l_\mathrm{g}^2 = l_1 l_2$. Wenn es also gelingt, ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $l_1 l_2$ in ein flächengleiches Quadrat mit



dem Inhalt l_g^2 umzuwandeln, ist die Aufgabe gelöst. Dies läßt sich mit Hilfe des Höhensatzes $h^2 = pq$ im rechtwinkligen Dreieck erreichen (Bild b): Über dem Durchmesser der Länge $l_1 + l_2$ wird der THALES-Kreis gezeichnet. Die Länge der Höhe BE im rechtwinkligen $\triangle AEC$ ist dann nach dem Höhensatz gleich dem geometrischen Mittel l_g. c) Nach (A.101) gilt die Gleichung

$$l_1 \cdot 2\,l_2 = h^2 = (l_1 + l_2) l_\mathrm{h}, \tag{A.102}$$

die auf folgende Konstruktion führt (Bild c): Für ein rechtwinkliges $\triangle AED$ mit den Hypotenusenabschnitten $l_1 = AB$ und $2\,l_2 = BD$ wird die Kantenlänge des flächengleichen Quadrates $h \equiv BE$ ermittelt. Entsprechend der rechten Gleichung von (A.102) muß

dieses in ein flächengleiches Rechteck mit den Kantenlängen $l_1 + l_2$ und l_h umgewandelt werden. Dazu wird BE um l_2 parallel nach CF verschoben und ein weiterer THALES-Kreis konstruiert, in dem $AC = l_1 + l_2$ ein Hypotenusenabschnitt ist. Der Mittelpunkt O dieses Kreises ist dabei der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Sehne AF mit der Geraden $g(A, C)$. Der zweite Hypotenusenabschnitt CG hat dann die Länge l_h.

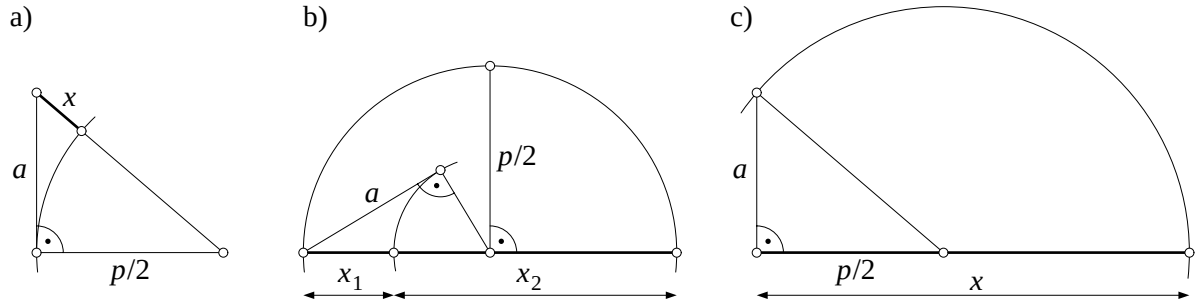
A.15 folgende drei Fälle zu unterscheiden ($a \equiv \sqrt{q}$):

$$\text{Fall } \textit{1}\text{:}\quad x^2 + px - q = 0 \quad \text{mit der Lösung} \qquad x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + a^2},$$

$$\text{Fall } \textit{2}\text{:}\quad x^2 - px + q = 0 \quad \text{mit den Lösungen} \quad x_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - a^2},\ \ \frac{p}{2} > a,$$

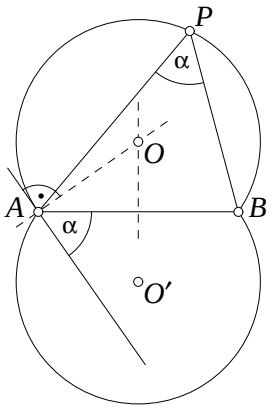
$$\text{Fall } \textit{3}\text{:}\quad x^2 - px - q = 0 \quad \text{mit der Lösung} \qquad x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + a^2}.$$

Durch die Struktur der Wurzeln ist die Konstruktionsidee bereits erkennbar: Wir benutzen natürlich den Satz des PYTHAGORAS. Im Fall *1* zeichnen wir ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $\frac{1}{2}p$ und a und vermindern die Hypotenuse um $\frac{1}{2}p$ (Bild a). Im Fall *2* wird ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse $\frac{1}{2}p$ und einer Kathete a konstruiert



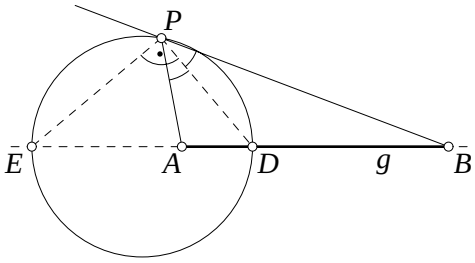
(Bild b). Die Länge der anderen Kathete wird dann einmal zu $\frac{1}{2}p$ addiert bzw. einmal von $\frac{1}{2}p$ subtrahiert. Der Fall *3* ist dem ersten ähnlich, nur daß die Hypotenuse um $\frac{1}{2}p$ verlängert wird (Bild c).

A.21 (Bild) Wir erinnern uns hierzu an den Peripheriewinkelsatz, nach dem alle Peripheriewinkel über gleichem Bogen gleich groß sind. Den Mittelpunkt O des zu diesem Bogen gehörenden Kreises finden wir am einfachsten mit Hilfe des Sehnen-Tangentenwinkel-Satzes (vgl. Aufgabe K.4): Wir tragen an AB nach unten den Winkel α ab und errichten auf dem freien Schenkel in A das Lot. Letzteres liefert mit der Mittelsenkrechten von AB den Mittelpunkt O. Ebenso ist der spiegelbildlich zu AB gelegene Punkt O' Mittelpunkt eines Kreisbogens, für den $\measuredangle APB \equiv \alpha$ gilt. Der gesuchte geometrische Ort besteht somit aus zwei zu AB symmetrischen Kreisbögen.



A.22 (Bild) Angenommen, P sei ein Punkt, der die Bedingung $PA/PB \equiv q = \text{const}$ erfüllt. Wir bemühen nun einen Satz, der besagt, daß in jedem $\triangle ABP$ sowohl die Winkelhalbierende eines Innenwinkels als auch die des zugehörigen Außenwinkels die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der dem Winkel anliegenden Seiten teilt (zum Beweis dieses Satzes s. Aufgabe D.8). Demnach gibt es auf der Geraden $g(A, B)$ zwei Punkte D, E, für die gerade

$$q = \frac{AD}{DB} = \left|\frac{AE}{EB}\right|$$

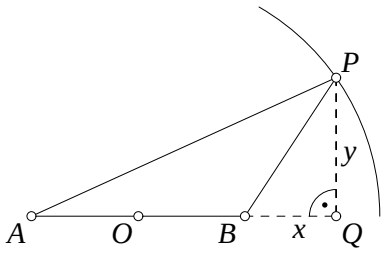


gilt, und durch die die Winkelhalbierenden PD und PE gehen. Nun stehen die Winkelhalbierenden zweier Nebenwinkel stets senkrecht aufeinander (vgl. Aufgabe D.7). Daraus folgt, daß die gesuchten Punkte P diejenigen sind, für die $\measuredangle DPE$ ein Rechter ist. Diese Bedingung erfüllen bekanntlich alle Punkte auf dem THALES-Kreis über dem Durchmesser DE. Der gesuchte geometrische Ort ist damit der sog. *Kreis des Apollonius*.

A.23 (Bild) Für einen Punkt P sei $AP^2 + BP^2 \equiv e^2 = \text{const}$ erfüllt. Wir ziehen die Gerade durch A, B und fällen darauf das Lot PQ. Dann gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS mit den Abkürzungen $AB \equiv c$, $BQ \equiv x$ und $PQ \equiv y$:

$$e^2 = (x+c)^2 + y^2 + x^2 + y^2 \qquad \text{bzw.}$$

$$\frac{e^2}{2} = x^2 + cx + \frac{c^2}{2} + y^2 = \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{c^2}{4}$$



Mit O als Mittelpunkt der Strecke AB und $r \equiv \frac{1}{2}\sqrt{2e^2 - c^2}$ folgt aus der letzten Gleichung nach der Umkehrung des des Satzes des PYTHAGORAS, daß $\triangle OQP$ stets ein rechtwinkliges Dreieck bei Q mit den Katheten $OQ = x + \frac{1}{2}c$ und $PQ = y$ sowie der Hypotenuse $OP = r = \text{const}$ ist. Da O und r unabhängig von der konkreten Lage von P sind, ist der gesuchte geometrische Ort der Kreis O_r.

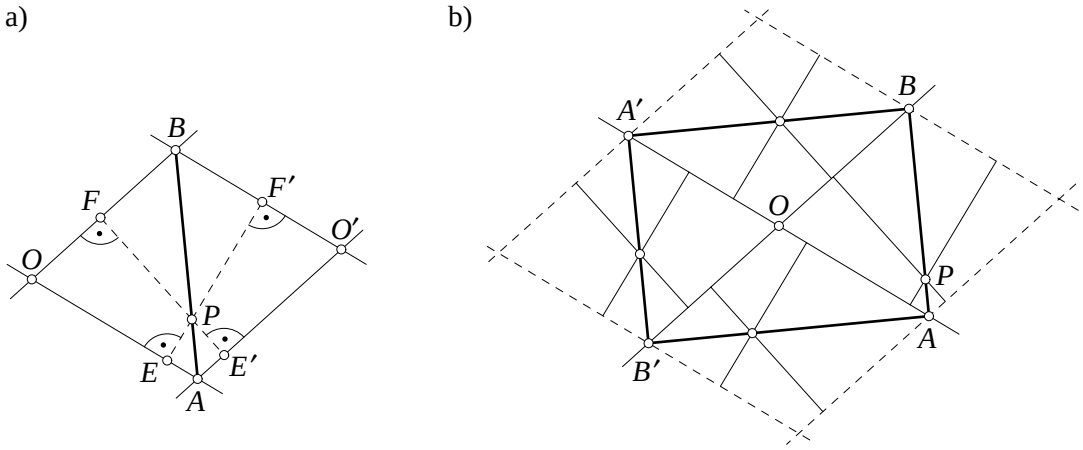
A.24 Zunächst sei der Begriff erklärt: Ein *Isoscelizer* eines Winkels mit dem Scheitel O ist eine Strecke AB mit Punkt A auf dem einen, Punkt B auf dem anderen Schenkel des Winkels und der Eigenschaft, daß $OA = OB$ gilt und somit $\triangle AOB$ gleichschenklig ist. Wir behaupten nun, daß der Isoscelizer durch P die geforderte Bedingung erfüllt. Um das einzusehen, spiegeln wir den Scheitelpunkt O an AB und erhalten O' (Bild a). Das Viereck $AOBO'$ ist dann offensichtlich ein Rhombus mit

$$AO \parallel BO' \quad \text{und} \quad BO \parallel AO'. \tag{A.103}$$

Nehmen wir einen beliebigen Punkt P auf AB und betrachten dessen Lotfußpunkte E, F, E' und F' auf den vier Seiten des Rhombus. Die vorgegebene Summe s der Abstände ist dann

$$s \equiv PE + PF = PE + PF' = EF',$$

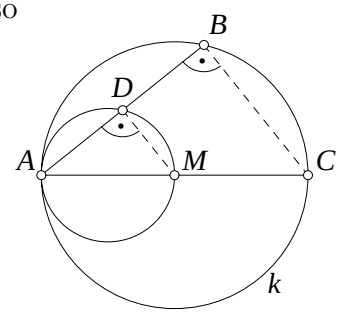
also gleich dem Abstand gegenüberliegender Seiten des Rhombus, und dieser ist für jeden Punkt auf AB wegen (A.103) konstant. Die Idee besteht also darin, den Streckenzug EPF



(mit einem Knick bei P) in den „geraden“ Streckenzug EPF' zu verwandeln. Damit sind wir aber noch nicht fertig. Da zwei sich schneidende Geraden die Ebene in vier Gebiete zerlegen (Bild b), gibt es insgesamt immer vier von O ausgehende Strahlenpaare, die einen Winkel kleiner als 180° einschließen, und damit vier Isoscelizer, die sich zu einem Rechteck zusammenfügen und von denen einer durch P geht. Der gesuchte geometrische Ort ist demnach ein aus vier Isoscelizern gebildetes Rechteck.

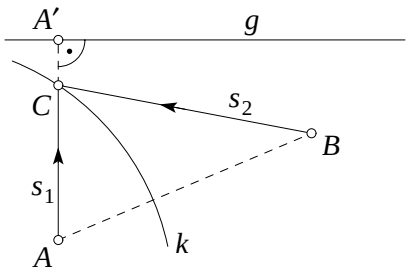
A.25 *Beweis:* (Bild) AB sei eine beliebige Sehne des Kreises k, AC ein Durchmesser von k. Nach Voraussetzung sei D der Mittelpunkt von AB sowie M der Mittelpunkt von AC und somit von k. In den Dreiecken ADM und ABC gilt also

$$q \equiv \frac{AD}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2}, \quad \text{woraus folgt} \quad DM \parallel BC.$$



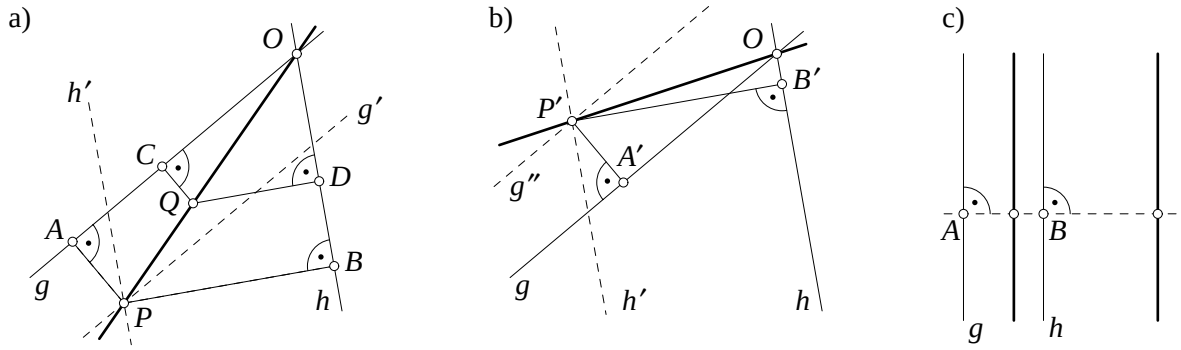
Da sie außerdem noch den Winkel bei A gemeinsam haben, sind sie ähnlich. Nach dem Satz des THALES ist $\triangle ABC$ ferner ein rechtwinkliges Dreieck (da AC Durchmesser von k ist). Für jeden beliebigen Punkt B auf der Peripherie ist $\triangle ADM$ also ebenfalls ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei D. Der geometrische Ort aller Halbierungspunkte D ist damit der THALES-Kreis über AM. □ — *Bemerkung:* Nach diesem Prinzip können wir jede beliebige ebene Figur mit Hilfe eines sog. *Storchenschnabels* oder *Pantographen* um einen Faktor q verkleinern ($q < 1$) oder vergrößern ($q > 1$).

A.26 (Bild) Die Positionen des Schmuggler- und Zoll-Bootes seien im Moment der Ortung A bzw. B, ihre Geschwindigkeiten v_1 bzw. v_2. Da sich bei konstanten Geschwindigkeiten die zurückgelegten Wege proportional zu den Geschwindigkeiten verhalten ($s = vt$), gilt $s_1/s_2 = v_1/v_2 \equiv q = \text{const}$. Damit ist der geometrische Ort des Rendezvous ein Kreis des APOLLONIUS k in bezug auf die Strecke AB (vgl. Aufgabe A.22). Trifft der Kreis den Fluchtweg AA' vor dem Ufer g im Punkt C, sollte das Manöver gelingen†.



†Falls nicht, sieht es gut für die Schmuggler aus, denn sie können meist schneller laufen.

A.27 a) Angenommen, ein Punkt P erfülle im Falle $g \nparallel h$ die Bedingung $PA/PB \equiv q =$ const mit A, B als Lotfußpunkte von P auf g bzw. h (Bild a). Dann ist leicht einzusehen, daß jeder Punkt auf der Geraden OP, wobei O der Schnittpunkt von g und h sei, ebenfalls

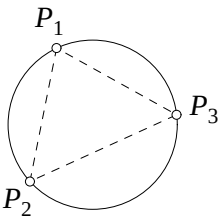


diese Bedingung erfüllt (außer O selbst). Denn nach dem 2. Strahlensatz gilt für jeden Punkt $Q \in OP$

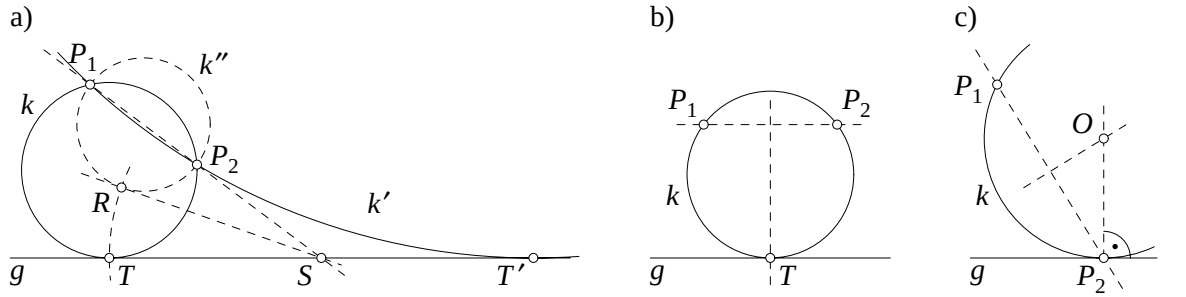
$$\frac{QC}{PA} = \frac{OQ}{OP} = \frac{QD}{PB}, \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{PA}{PB} = q = \frac{QC}{QD}.$$

Ein derartigen Punkt P finden wir, indem wir z. B. eine Gerade $g' \parallel g$ im Abstand q mit einer Geraden $h' \parallel h$ im Abstand 1 zum Schnitt bringen.
b) Selbstverständlich können wir auch die Parallele g'' auf der anderen Seite von g mit h' schneiden und erhalten so einen Punkt P', für den $P'A'/P'B' = q =$ const gilt (Bild b). Jeder Punkt auf OP' hat das gleiche Verhältnis der Abstände zu den Geraden g und h. Der gesuchte geometrische Ort besteht demnach aus zwei sich in O treffenden Geraden.
c) Im Falle $g \parallel h$ wählen wir zwei gegenüberliegende Punkte $A \in g$ und $B \in h$ und teilen die Strecke AB innerlich bzw. äußerlich im Verhältnis q; es entstehen die Punkte C bzw. D. Die beiden Geraden parallel zu g, die durch C und D gehen, sind hier der gesuchte Ort.

A.31 (Bild) Bilden die drei Punkte P_1, P_2 und P_3 ein Dreieck, so ist der Umkreis dieses Dreiecks die einzige Lösung. Das Konzept „geometrischer Ort“ sagt uns, wie dessen Mittelpunkt zu finden ist: Die Mittelsenkrechten der Strecken P_1P_2, P_2P_3 bzw. P_3P_1 sind die Orte gleicher Entfernungen zu den Endpunkten, also ist deren Schnittpunkt gleich weit von allen drei Punkten entfernt (vgl. Aufgabe A.8). Liegen dagegen die drei Punkte auf einer Geraden, gibt es keinen derartigen Kreis.

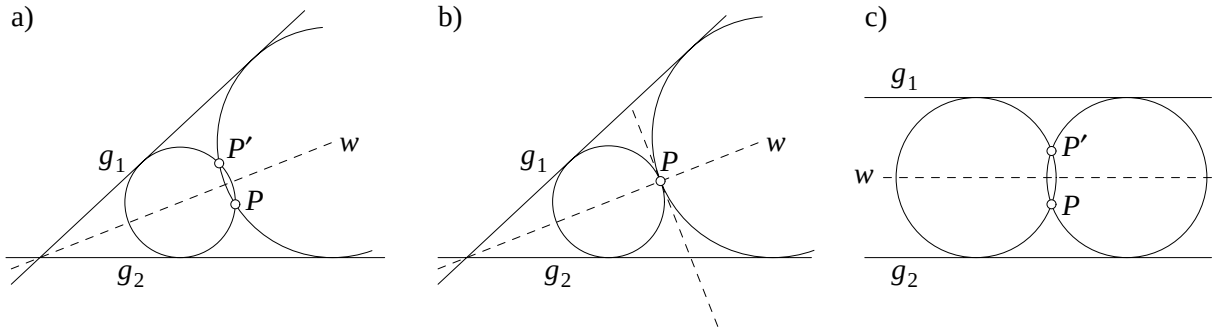


A.32 Angenommen, k sei einer der gesuchten Kreise. Da k die Gerade g in einem Punkt berühren soll, liegen alle Punkte auf der Peripherie von k in derselben von g geteilten Halbebene. Demzufolge müssen P_1 und P_2 in *einer* Halbebene liegen. Weiterhin sei angenommen, daß k die Gerade g in T berührt und die Gerade $h(P_1, P_2)$ g in S schneidet (Bild a). Nach dem Sekanten-Tangentensatz (s. Aufgabe K.13) gilt dann $SP_1 \cdot SP_2 = ST^2$, d. h., der Tangentenabschnitt ST ist die mittlere Proportionale aus SP_1 und SP_2 und damit konstruierbar. Dazu nehmen wir z. B. einen beliebigen Kreis k'', der durch P_1 und P_2 geht (etwa den THALES-Kreis über P_1P_2 wie im Bild) und konstruieren von S aus die Tangente



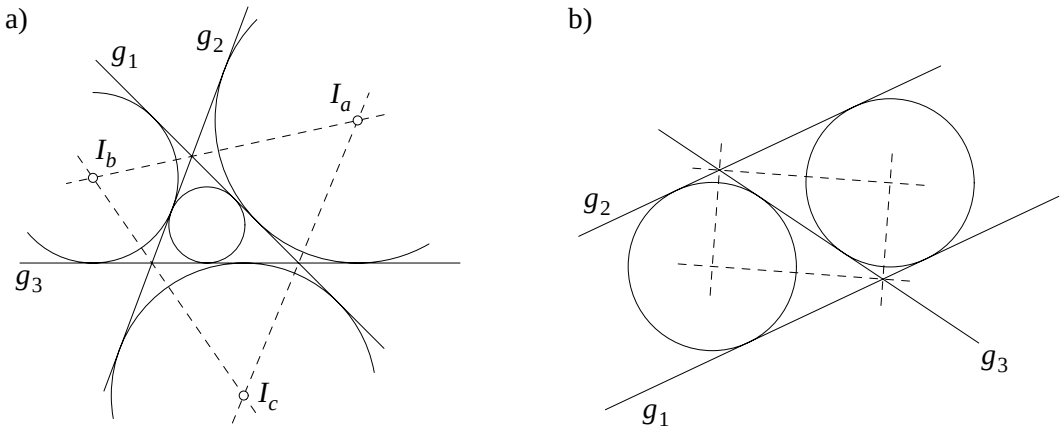
an diesen. Wir erhalten die Länge $SR = ST$ und damit Punkt T auf g. Somit ist das Berührungsproblem PPG auf das Problem PPP zurückgeführt (s. Aufgabe A.31). Tragen wir ST in die andere Richtung auf g ab, finden wir einen weiteren Kreis k'; es existieren also zwei Lösungen. Ist andererseits $h \parallel g$, läßt sich die angegebene Konstruktion nicht durchführen. Dann liegt T aber auf der Mittelsenkrechten von P_1P_2, und k ist eindeutig bestimmt (Bild b).
Schließlich gibt es noch den Fall, daß einer der gegebenen Punkte (Bild c) oder beide auf g liegen. Ist etwa $P_2 = T$, so liegt der Mittelpunkt O des gesuchten Kreises auf der Senkrechten in P_2 zu g und auf der Mittelsenkrechten von P_1P_2. Hier gibt es genau eine Lösung. Liegen beide Punkte P_1, P_2 auf g, existiert keine Lösung.
Bemerkung: Geometrische Orte führen im Fall $h \nparallel g$ nicht zu einer EUKLIDischen Konstruktion, da der g. O. aller derjenigen Punkte, die von einem gegebenen Punkt und einer Gerade denselben Abstand haben, eine *Parabel* ist und diese nicht mit Zirkel und Lineal gezogen werden kann.

A.33 Zunächst sei $g_1 \nparallel g_2$ vorausgesetzt. Dann ist ein geometrischer Ort für den Mittelpunkt des gesuchten Kreises k offenbar die Winkelhalbierende w desjenigen Winkels, der von g_1 und g_2 gebildet wird und P im Innern einschließt. Liegt nun P nicht auf dieser Winkelhalbierenden (Bild a), gibt es aus Symmetriegründen stets einen Punkt P', der als



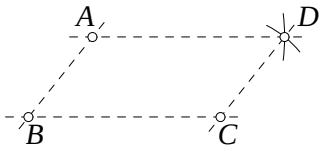
Spiegelbild zu P bezüglich w konstruierbar ist und durch den der gesuchte Kreis ebenfalls verläuft. Damit ist diese Aufgabe auf das Problem PPG zurückgeführt. Liegt P hingegen auf w (also $P \equiv P'$, Bild b), so berührt k die Senkrechte zu w in P; der Kreis ist also der Inkreis des von g_1, g_2 und dieser Senkrechten gebildeten Dreiecks (Problem GGG, vgl. Aufgabe A.34). Im Fall $g_1 \parallel g_2$ bleibt alles wie bisher, nur daß $w(g_1, g_2)$ nunmehr durch die *Mittelparallele* zu ersetzen ist (Bild c). Lösungen existieren dann nur, wenn P zwischen den Parallelen oder auf einer der Geraden liegt.

A.34 Schneiden sich die drei gegebenen Geraden g_1, g_2, g_3 in drei Punkten (Bild a), bilden diese ein Dreieck. Dann gibt es vier Kreise, die die (verlängerten) Seiten des Dreiecks berühren: den Inkreis und die drei Ankreise. Die Mittelpunkte I_a, I_b, I_c der letzteren finden wir, indem wir die Winkelhalbierenden der Außenwinkel des Dreiecks paarweise



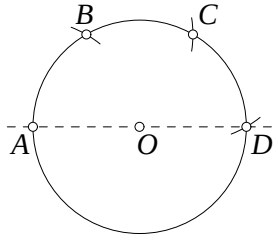
zum Schnitt bringen. Treffen sich die Geraden dagegen lediglich in zwei Punkten (Bild b), gibt es nur zwei Kreise, die die Geraden berühren. Deren Mittelpunkte sind ebenfalls die Schnittpunkte von Winkelhalbierenden. Im Fall, daß sich die Geraden in einem Punkt schneiden oder gar parallel verlaufen, gibt es keinen Kreis, der alle drei Geraden berührt.

A.41 (Bild) Es ist nur das Parallelogramm $ABCD$ zu bilden, indem wir den Punkt D als Schnittpunkt der beiden Kreise A_{BC} und C_{AB} bestimmen. Die Gerade AD ist dann wie gefordert parallel zu BC.



A.42 (Bild) Von einem der beiden Endpunkte aus (etwa von O) beschreiben wir den Kreis O_A und bestimmen daraufhin auf diesem die Punkte B, C, D, so daß

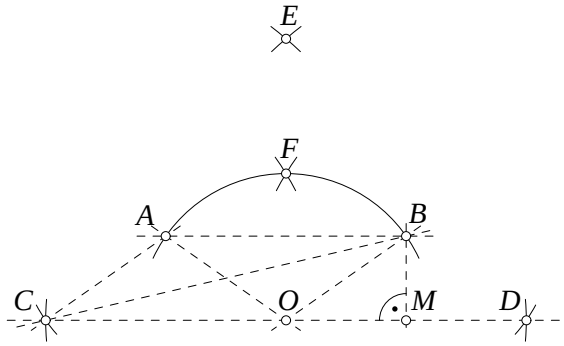
$$AB = BC = CD = OA.$$



Dann wird der Punkt D dem Punkt A diametral entgegengesetzt, und daher die Strecke AD das Doppelte von OA sein. Wenden wir diese Konstruktion wiederholt an, so können wir die Strecke OA verdreifachen, vervierfachen, ... allgemein mit n (n ganze Zahl) multiplizieren. Mit diesem Verfahren – ausgedehnt in alle Richtungen – läßt sich ausgehend von einer gegebenen Strecke die gesamte Ebene mit einem trigonalen Punktgitter (dessen Elementarzelle ein gleichseitiges Dreieck ist) überdecken.

A.43 Die Kreise A_C und B_C schneiden sich das zweite Mal im gesuchten Punkt.

A.44 (Bild) Es sei AB der gegebene Bogen, der zu einem Kreis mit dem Mittelpunkt O gehört. Mit Hilfe der Kreise A_O, B_O und O_{AB} bestimmen wir die Punkte C und



D, so daß wir die beiden Parallelogramme $ABOC$ und $ABDO$ erhalten, die einander kongruent sind. Nun beschreiben wir von den Mittelpunkten C und D aus zwei Kreise mit dem Radius $CB = DA$ und betrachten einen von ihren Schnittpunkten, etwa E. Nennen wir dann F irgendeinen der beiden Schnittpunkte der Kreise C_{OE} und D_{OE}, so wird der Punkt F auf dem gegebenen Kreis liegen und einen der beiden Bögen AB halbieren.

Beweis: Tatsächlich liegen infolge der ausgeführten Konstruktion die Punkte C, O, D in derselben Parallelen zu AB. Da außerdem in dem Parallelogramm $ABOC$ die Diagonale AO den Seiten AC und BO gleich ist, ergibt sich für den Radius $CB = CE$:

$$CB^2 = BM^2 + CM^2 = BO^2 - OM^2 + \big(CO + OM\big)^2 = AO^2 + 2CO^2, \qquad \text{(A.104)}$$

wobei M der Mittelpunkt von OD, also $OM = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{2}CO$ ist. Außerdem sind die Winkel $\measuredangle COE$ und $\measuredangle DOE$ Rechte, so daß

$$CE^2 = CB^2 = CO^2 + OE^2,$$

und da $OE = CF$, folgt daraus

$$CB^2 = CO^2 + CF^2. \qquad \text{(A.105)}$$

Aus dem Vergleich von (A.104) und (A.105) erhalten wir $CF^2 = AO^2 + CO^2$. Da nun ferner der Winkel $\measuredangle COF$ offenbar ein Rechter ist, ergibt sich $CF^2 = CO^2 + OF^2$. Aus dieser und der vorhergehenden Gleichung folgt $OA = OF$, und dies besagt, daß der Punkt F auf dem Kreis O_A liegt. Wenn wir ferner von den gleichen Winkeln $\measuredangle COF$ und $\measuredangle DOF$ die ebenfalls gleichen Winkel $\measuredangle COA$ und $\measuredangle DOB$ subtrahieren, so bleibt

$$\measuredangle AOF = \measuredangle BOF$$

übrig, was beweist, daß der Punkt F den Bogen AFB halbiert. □

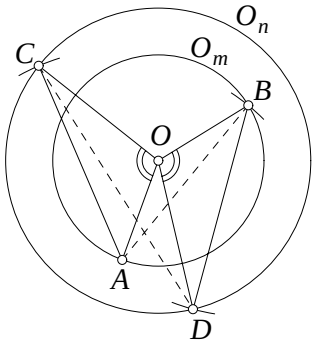
A.45 (Bild) Wir beschreiben, wenn O irgendein Punkt der Ebene ist, den Kreis O_m und nehmen auf diesem zwei Punkte A und B so an, daß die Sehne AB gleich p ist. Nun bringen wir den Kreis O_n zum Schnitt mit zwei weiteren Kreisen, die A bzw. B als Mittelpunkte und einen willkürlich gewählten, in beiden Fällen gleichen Radius haben. Der Abstand zwischen diesen beiden Schnittpunkten C und D ist die gesuchte vierte Proportionale.

Beweis: Die beiden Dreiecke OAC und OBD sind nach der obigen Konstruktion kongruent (SSS), also ist

$$\measuredangle AOC = \measuredangle BOD$$

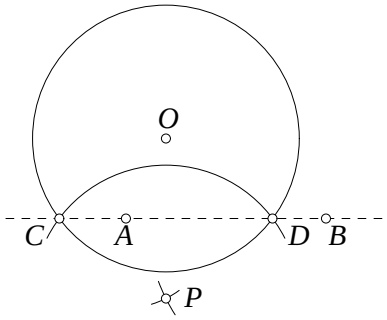
und, wenn wir zu diesen Winkeln den gemeinsamen Winkel $\measuredangle AOD$ hinzufügen (oder ihn ggf. fortnehmen): $\measuredangle COD = \measuredangle AOB$. Daraus folgt, daß die Dreiecke AOB und COD zueinander ähnlich sind; also besteht zwischen ihren Seiten die Proportion

$$\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}.$$

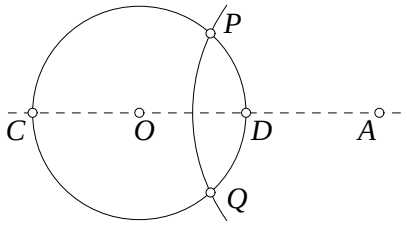


Wenn wir uns erinnern, daß $OA = m$, $OC = n$ und $AB = p$ ist, so folgt daraus, daß $CD = q$ tatsächlich die vierte Proportionale zu m, n und p ist. □
Bemerkung: Wenn $p > 2m$ ist, so ist es unmöglich, in den ersten Kreis die Sehne $AB = p$ einzuzeichnen. Die angegebene Konstruktion kann in diesem Fall dennoch angewendet werden, wenn anstelle der Strecken m und n die jeweils doppelten Strecken oder, falls das nicht genügt, die dreifachen Strecken usw. genommen werden, da in jedem Fall die Proportion $km : kn = m : n = p : q$ bestehen bleibt.

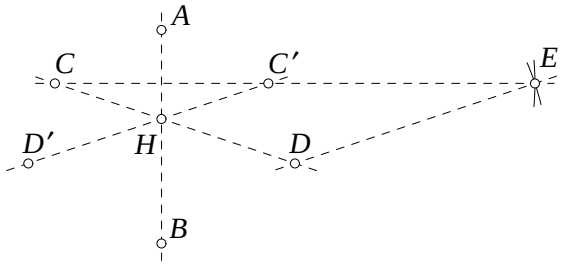
A.46 (Bild) Es sei O der Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius r und AB die gegebene Gerade. Wir spiegeln zunächst O an der Geraden AB und nennen diesen Punkt P. Sind dann C und D die (als existierend vorausgesetzten) gemeinsamen Punkte des Kreises und der Geraden AB, so sind die Seiten des Vierecks $OCPD$ offenbar sämtlich einander gleich. Wir müssen daher, um C und D zu erhalten, lediglich den gegebenen Kreis mit dem Kreis P_r schneiden.



A.47 (Bild) Ist A ein Punkt der Geraden, der vom Mittelpunkt O des Kreises verschieden ist, so beschreiben wir von A aus mit einem beliebigen Radius einen Kreis, der den gegebenen Kreis in zwei Punkten P und Q schneidet. Nun halbieren wir die beiden durch die Punkte P und Q auf dem Kreis bestimmten Bögen (s. Aufgabe A.44). Die Halbierungspunkte C und D sind dann die gesuchten Schnittpunkte.



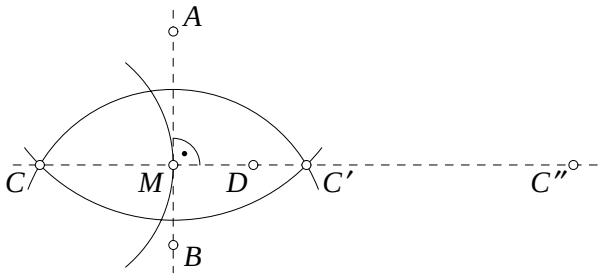
A.48 (Bild) Es seien AB und CD die beiden gegebenen Geraden. Wir konstruieren die Punkte C' und D', die zu C bzw. D spiegelbildlich bezüglich AB liegen, und bestimmen auf CC' den Punkt E so, daß das Viereck $C'D'DE$ ein Parallelogramm ist (s. Aufgaben A.41 und A.43). Damit ist klar, daß durch den gemeinsamen Punkt H von AB und CD auch die Gerade $C'D'$ hindurchgeht. Nach dem Strahlensatz ergibt sich nun folgende Proportion: $CE : CC' = CD : CH$, wobei von den darin auftretenden Strecken die ersten drei eine bekannte Länge haben. Wir können also mit Hilfe der Konstruktion in Aufgabe A.45 die Länge CH und damit die Lage des Punktes H als einer der gemeinsamen Punkte der beiden Kreise C_H und C'_{CH} bestimmen.



A.49 (Bild) Wir konstruieren den Punkt C', der bezüglich der Geraden AB spiegelbildlich zu C liegt, als zweiten Schnittpunkt der Kreise A_C und B_C (vgl. Aufgabe A.43). Der verlangte Schnittpunkt M beider Geraden ist nun offenbar der Mittelpunkt der Strecke CC'. Wird weiterhin mit C'' der bezüglich C' symmetrische Punkt zu C bezeichnet, so

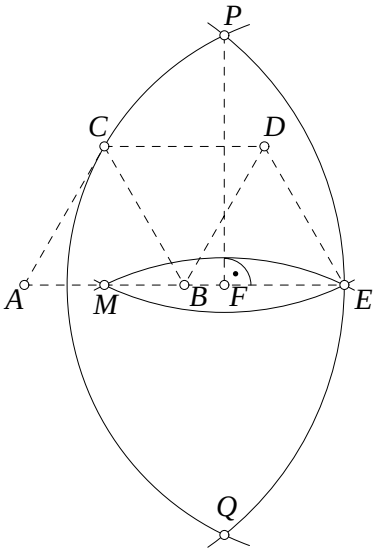
konstruieren wir diejenige Strecke, deren Länge $CM = m$ die mittlere Proportionale zu CC'' und CC' ist, d. h. der Gleichung

$$\frac{CC''}{CC'} = \frac{CC'}{m}$$



genügt (vgl. Aufgabe A.45). Dann beschreiben wir den Kreis C_m und bestimmen seinen zwischen C und C' auf der Geraden CC' liegenden Punkt nach der Lösung von Aufgabe A.47. Dieser wird dann der Mittelpunkt der Strecke CC' sein.
Bemerkung: In dieser Konstruktion wird von dem Punkt D kein Gebrauch gemacht. Das ist natürlich, da die Linie CD bereits durch die Bedingungen, durch C zu gehen und auf AB senkrecht zu stehen, festgelegt ist. Damit ist auch sofort ersichtlich, daß der gesuchte Punkt gleichzeitig der Fußpunkt des Lotes von C auf AB ist. Für eine elegantere Methode zur Konstruktion des Mittelpunktes einer Strecke siehe Aufgabe A.50.

A.50 *Konstruktion:* (Bild) Es sei AB die gegebene Strecke. Wir zeichnen zunächst mit Hilfe der Punkte C, D den zu A bezüglich B symmetrischen Punkt E und dann den Kreis A_E; auf diesem bestimmen wir die Punkte P und Q derart, daß $EP = EQ = EC$; anschließend beschreiben wir die Kreise P_{EC} und Q_{EC}. Diese schneiden sich außer in E noch im Punkt M, der der Mittelpunkt von AB ist.



Beweis: Mit $AB = a$ ist nach obiger Konstruktion

$$AE = AP = 2a, \quad CE = PE = \sqrt{3}a, \qquad \text{(A.106)}$$

da CE die doppelte Höhe der beiden gegenseitig anliegenden, gleichseitigen Dreiecke BDC und BDE ist. Ist weiterhin F der Fußpunkt des Lotes von P auf AE, so gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS

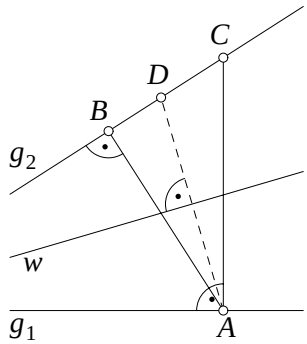
$$AP^2 = AF^2 + PF^2, \quad PE^2 = FE^2 + PF^2,$$

woraus nach Subtraktion und mit (A.106) folgt:

$$AP^2 - PE^2 = AF^2 - FE^2 = \big(AF + FE\big) \cdot \big(AF - FE\big)$$
$$4a^2 - 3a^2 = a^2 = 2a\big(AF - FE\big),$$

oder $AF - FE = AF - MF = AM = \frac{1}{2}a$. □

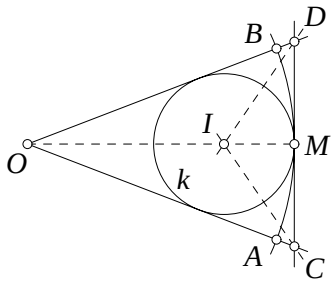
A.61 (Bild) Mit g_1 und g_2 seien diejenigen Geraden bezeichnet, auf denen die beiden Teile der Schenkel des Winkels liegen; der von ihnen eingeschlossene Winkel sei α.



Konstruktion: Wir legen einen beliebigen Punkt A auf g_1 fest, fällen das Lot auf g_2 (Punkt B) und errichten die Senkrechte zu g_1 in A; diese schneidet g_2 im Punkt C. Bringen wir die Halbierende des Winkels $\measuredangle BAC$ mit g_2 zum Schnitt, erhalten wir den Punkt D. Die Mittelsenkrechte von AD ist dann die gesuchte Winkelhalbierende w.

Beweis: Die Dreiecke ABO und ACO sind rechtwinklige Dreiecke (mit O als Scheitel des Winkels). Demzufolge ist $\measuredangle BAO = \measuredangle ACO = 90° - \alpha$ und daher $\measuredangle BAC = \alpha$. Nach Konstruktion beträgt der Winkel $\measuredangle DAB = \frac{1}{2}\alpha$, somit ist $\measuredangle DAO = 90° - \frac{1}{2}\alpha$; wegen der Innenwinkelsumme im $\triangle AOD$ gilt ebenfalls $\measuredangle ADO = 90° - \frac{1}{2}\alpha$. $\triangle AOD$ hat also gleiche Basiswinkel bezüglich der Seite AD und ist demnach gleichschenklig. Die Mittelsenkrechte von AD in diesem gleichschenkligen Dreieck ist gleichzeitig Winkelhalbierende von $\measuredangle AOD$ und somit diejenige von g_1 und g_2. □

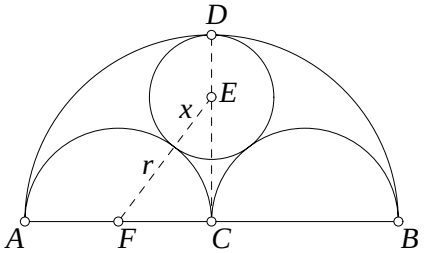
A.62 (Bild) AOB sei der Kreissektor, M der Mittelpunkt des Bogens AB. Da der einzubeschreibende Kreis k die Radien OA und OB berührt, muß sein Mittelpunkt I auf der Winkelhalbierenden OM liegen. Demzufolge berührt k den Bogen AB in M. Ohne an dem Berührungsproblem etwas zu ändern, können wir nun den Sektor AOB durch das Dreieck COD ersetzen, wobei C und D die Schnittpunkte der verlängerten Radien mit der durch M gehenden, zu OM senkrechten Geraden sind. I ist somit der Inkreismittelpunkt von $\triangle COD$, d. h. Schnittpunkt von OM mit der Winkelhalbierenden von $\measuredangle OCM$ bzw. $\measuredangle ODM$. — *Bemerkung:* Wir haben hier das Berührungsproblem des Apollonius (GGK) vorliegen, welches jedoch aufgrund der Symmetrie in das einfachere Problem (GGG) übergeht (vgl. Abschnitt A.3).



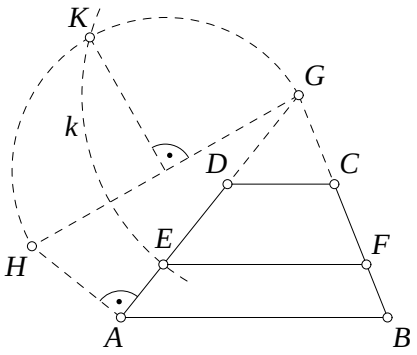
A.63 (Bild) Der Mittelpunkt E des gesuchten Kreises und sein Berührungspunkt D mit dem Halbkreis um C liegen offenbar auf der Symmetrieachse der Figur, die gleich der Mittelsenkrechten von AB ist. Bezeichnen wir ferner die Mitte von AC mit F, so geht FE durch den Berührungspunkt der beiden Kreise mit den Mittelpunkten F und E. Nun setzen wir $AF \equiv r$ und $ED \equiv x$. In dem rechtwinkligen $\triangle EFC$ gilt

$$(r + x)^2 = r^2 + (2r - x)^2 \quad \text{oder} \quad x = \frac{2}{3}\,r.$$

Damit genügt es, $r = \frac{1}{4}AB$ im Verhältnis 2 : 1 zu teilen (vgl. Aufgabe A.12) und das so konstruierte x auf DC in Richtung C abzutragen, womit Mittelpunkt und Radius des gesuchten Kreises gefunden sind.



A.64 *Analysis:* (Bild) Es sei EF die gesuchte Halbierungslinie. Wir verlängern AD und BC bis zum Schnittpunkt G und nennen die Strecken $GD \equiv d$, $GE \equiv x$ und $GA \equiv a$. Die Dreiecke GDC, GEF und GAB sind einander ähnlich; ihre Flächeninhalte verhalten sich daher wie die Quadrate ihrer Abmessungen: $[GDC] : [GEF] : [GAB] = d^2 : x^2 : a^2$. Folglich verhält sich auch



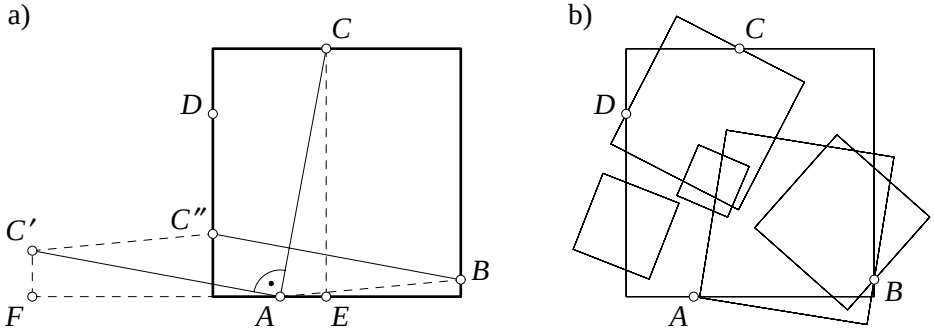
$$\frac{[GAB]-[GEF]}{[GEF]-[GDC]} = \frac{[ABFE]}{[EFCD]} = \frac{a^2-x^2}{x^2-d^2}.$$

Da EF das Trapez halbieren soll, folgt daraus

$$a^2 - x^2 = x^2 - d^2 \quad \text{oder} \quad x = \sqrt{\frac{a^2+d^2}{2}}.$$

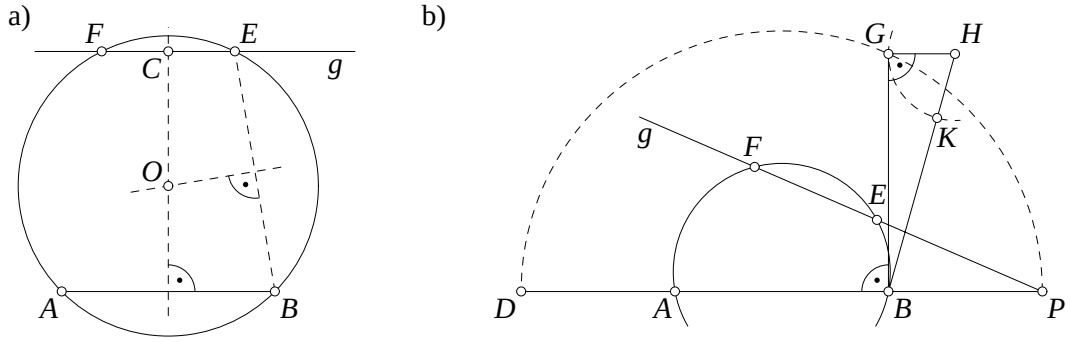
Konstruktion: Wir errichten das Lot AH auf AG der Länge GD. Die Verbindungsstrecke HG hat dann die Länge $HG = \sqrt{a^2+d^2}$. Nun beschreiben wir über HG als Durchmesser den Halbkreis und bringen ihn mit dem Mittellot von HG zum Schnitt; beide Linien treffen sich in K. $\triangle HKG$ ist dann gleichschenklig rechtwinklig, und nach dem Satz des PYTHAGORAS ist $GK = \sqrt{a^2+d^2}/\sqrt{2} = x$. Wir bringen den Kreis G_K zum Schnitt mit AD in E und ziehen durch E die Parallele zu AB, welche BC in F schneidet. EF ist somit die verlangte Gerade.

A.65 Dieses Problem ist zugegebenermaßen ziemlich hart. Angenommen, wir haben ein Quadrat, daß den Bedingungen der Aufgabe genügt (Bild a). Nehmen wir z. B. die Strecke AC und drehen sie um 90° in die Lage AC' und verschieben diese anschließend so parallel, daß A in B und C' in C'' zu liegen kommt. Nun ziehen wir die Gerade $g(D, C'')$, die Parallele dazu durch B sowie die Senkrechten zu g durch A und C. Die vier Schnittpunkte



dieser Geraden bilden dann das gesuchte Quadrat. Um einzusehen, daß dem so ist, betrachten wir die rechtwinkligen Dreiecke ACE und $AC'F$, die offenbar kongruent sind, da sie sich durch eine Drehverschiebung (d. i. die oben beschriebene Drehung mit anschließender Parallelverschiebung) ineinander überführen lassen. Der Abstand der konstruierten Geradenpaare ist dann $EA = FC$.
Da wir in der Auswahl der Anfangsstrecke und in der Richtung der Parallelverschiebung frei sind, gibt es mehrere Lösungsmöglichkeiten (Bild b), bei denen natürlich die gegebenen Punkte häufig nur auf den Verlängerungen der Seiten des Quadrats liegen.

A.66 (Bild) Ein geometrischer Ort für den Mittelpunkt O des gesuchten Kreises ist die Mittelsenkrechte von AB. Im Fall, daß die durch A, B gehende Gerade parallel zu g verläuft (Bild a), errichten wir über der Basis AB ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Spitze C auf g liegt. C ist dann offenbar Mittelpunkt aller von g herausgeschnittenen



Sehnen, so daß wir die Endpunkte E und F der Sehne einfach dadurch finden, indem wir $\frac{1}{2}s$ in beide Richtungen von C aus auf g abtragen. Damit liegt der Kreis fest; ein zweiter geometrischer Ort für O ist etwa die Mittelsenkrechte von BE.
Schneiden sich dagegen AB und g in einem Punkt P, so liefert der Sekantensatz (s. Aufgabe K.11) die Gleichung $PA \cdot PB = PE \cdot PF$, die sich mit $PA \equiv a$, $PB \equiv b$, $PE \equiv x$ und $PF = x + s$ als quadratische Gleichung für die unbekannte Länge x herausstellt:

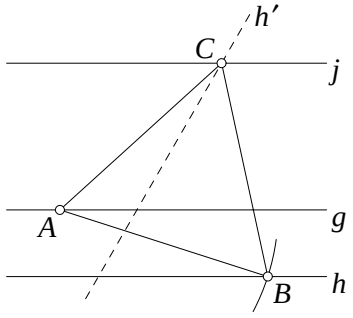
$$ab = x(x+s) \qquad \text{bzw.} \qquad x^2 + sx - ab = 0. \tag{A.107}$$

Als Lösung von (A.107) kommt wegen $x > 0$ nur

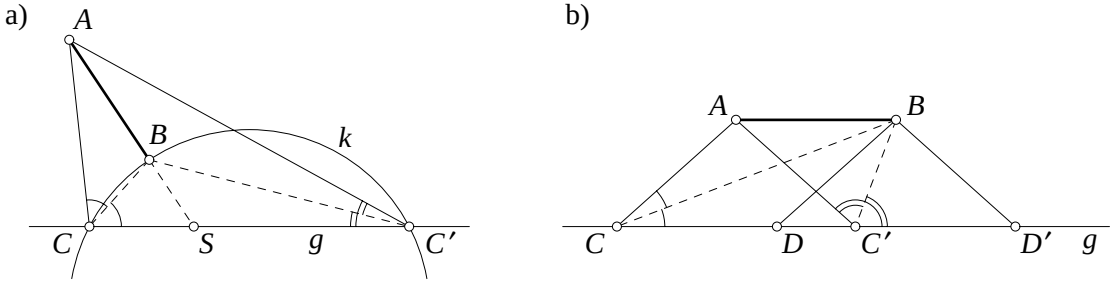
$$x = -\frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + ab} = -\frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + (\sqrt{ab})^2} \tag{A.108}$$

in Frage. — *Konstruktion:* Wir konstruieren den Schnittpunkt P und tragen die Länge a auf dem Strahl BA ab; der Endpunkt sei D. Der THALES-Kreis über PD schneide das Lot durch B im Punkt G. Nach dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck PGD gilt $BG = \sqrt{ab}$. (A.108) verlangt nun, ein weiteres rechtwinkliges Dreieck aus den Katheten $BG = \sqrt{ab}$ und $HG = \frac{1}{2}s$ zu errichten und von dessen Hypotenuse $HK = HG = \frac{1}{2}s$ zu subtrahieren. Die Länge von BK ist somit gleich $x = PE$. Die Endpunkte E und F finden wir schließlich durch Abtragen von x und $x + s$ auf g.

A.67 (Bild) ABC sei das gleichseitige Dreieck mit den Eckpunkten auf den Geraden g, h und j. Da $\triangle ABC$ längs der Parallelen beliebig verschoben werden kann, dürfen wir eine Ecke, etwa A auf g, nach Gutdünken auswählen. Drehen wir nun $\triangle ABC$ um A um 60° und nimmt bei dieser Drehung Ecke B die Gerade h mit, so gelangt AB in die Lage AC und h nach h'. Eckpunkt C wird demnach durch j und die um 60° gedrehte Gerade h bestimmt. Der dritte Eckpunkt B liegt auf h und zugleich dem Kreis A_C.



A.68 Im Fall $AB \nparallel g$ können wir AB bis zum Schnitt mit g in Punkt S verlängern (Bild a). CB ist dann Winkelhalbierende im Dreieck ACS. Erinnern wir uns an den guten,

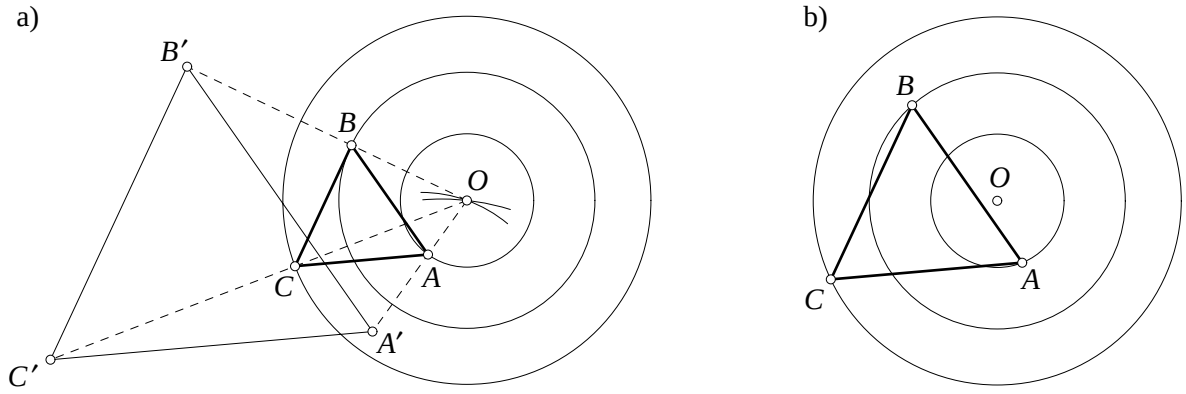


alten Satz, daß die Winkelhalbierende in einem Dreieck die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt (s. Aufgabe D.8), so folgt

$$\frac{CA}{CS} = \frac{AB}{BS} \equiv q = \text{const.}$$

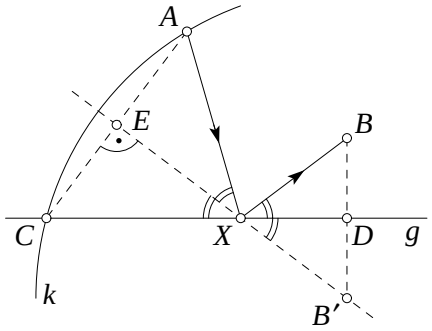
Dies ruft sofort den Kreis des Apollonius auf den Plan, da er bekanntlich der geometrische Ort aller Punkte ist, deren Quotient der Abstände CA/CS konstant ist (vgl. Aufgabe A.22). Wir haben den inneren Teilungspunkt B von AS, somit bereitet es keine Schwierigkeiten, auch den äußeren Teilungspunkt B' (im Bild nicht gezeigt) nach Aufgabe A.12 zu finden. Der Thales-Kreis k über BB' ist damit der Kreis des Apollonius, dessen Schnittpunkte C bzw. C' mit g mithin die geforderten Eigenschaften haben.
Im Fall $AB \parallel g$ konstruieren wir einfach die Rhomben $ABDC$ bzw. $ABD'C'$, indem wir die Kreise A_B bzw. B_A mit g zum Schnitt bringen; dies liefert die Punkte C bzw. D' (Bild b). Die Mittelsenkrechten von CB und AD' schneiden g dann in den Punkten D bzw. C'. Die geforderte Eigenschaft ergibt sich aus der Tatsache, daß die Diagonalen CB und $C'B$ gleichzeitig Winkelhalbierende sind.

A.69 (Bild) Mitunter sind Probleme einfacher zu lösen, wenn sie „umgedreht“ werden. Nehmen wir hier einmal an, wir haben bereits das gesuchte gleichseitige Dreieck ABC und suchen statt dessen den Mittelpunkt O der drei konzentrischen Kreise, deren Radien wir o. B. d. A. mit $0 < r_1 < r_2 < r_3$ bezeichnen. Von O wissen wir, daß seine Entfernungen von den Eckpunkten die gegebenen Längen $OA = r_1$, $OB = r_2$ bzw. $OC = r_3$ sind. Er liegt also auf einem Kreis des Apollonius, der zur Strecke AB gehört und für den $OA/OB = r_1/r_2$ gilt (vgl. Aufgabe A.22). Ebenso liegt O auf einem Kreis des Apollonius über AC mit $OA/OC = r_1/r_3$. Somit wäre O als Schnittpunkt dieser beiden Kreise sofort konstruierbar, wenn wir $\triangle ABC$ in der richtigen Größe vorzuliegen hätten. Dies ist jedoch keine unüberwindbare Hürde. Da die obigen Streckenverhältnisse unverändert bleiben, wenn wir die drei Radien mit einer beliebigen reellen Zahl λ strecken oder stauchen (d. i. eine zentrische Streckung), erhalten wir stets denselben Mittelpunkt O.
Konstruktion: Wir zeichnen ein beliebiges gleichseitiges Dreieck $A'B'C'$ und konstruieren O als Schnittpunkt zweier Apollonius-Kreise, indem wir beispielsweise $A'B'$ und $A'C'$ innerlich und äußerlich im Verhältnis r_1/r_2 bzw. r_1/r_3 teilen und über diesen Teilungspunkten jeweils den Thales-Kreis schlagen. Das gesuchte Dreieck erhalten wir schließlich durch die Schnittpunkte der Strahlen OA', OB' und OC' mit den drei Kreisen.



Bemerkung: Da es i. a. zwei Schnittpunkte der Bestimmungskreise für O gibt, existieren auch zwei verschiedene Lösungen (Bild a und b).

A.70 (Bild) *Konstruktion:* B' sei das Spiegelbild vom Zielpunkt B. Wir ziehen den Kreisbogen k um B' mit dem Radius $B'A$; dieser schneide die Gerade g in einem Punkt C. Die Mittelsenkrechte von AC schneidet g im gesuchten Punkt X. — *Beweis,* daß wie gefordert $\measuredangle AXC = 2\measuredangle BXD$ gilt, wobei D der Mittelpunkt von BB' ist: Die Mittelsenkrechte der Sehne AC, auf der nach Konstruktion X liegt, geht durch den Mittelpunkt B' des Kreises. Demzufolge sind sowohl $\triangle AB'C$ als auch $\triangle AXC$ gleichschenklige Dreiecke über der Basis AC, deren Winkelhalbierenden EX bzw. EB' übereinander fallen. Gleichzeitig sind aber $\measuredangle CXE = \measuredangle DXB'$ kongruente Scheitelwinkel, so daß tatsächlich

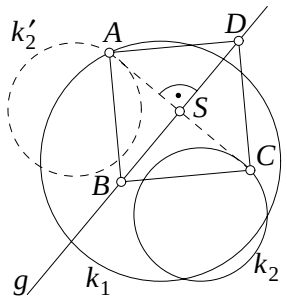


$$\measuredangle BXD = \measuredangle DXB' = \measuredangle CXE = \frac{1}{2}\measuredangle AXC$$

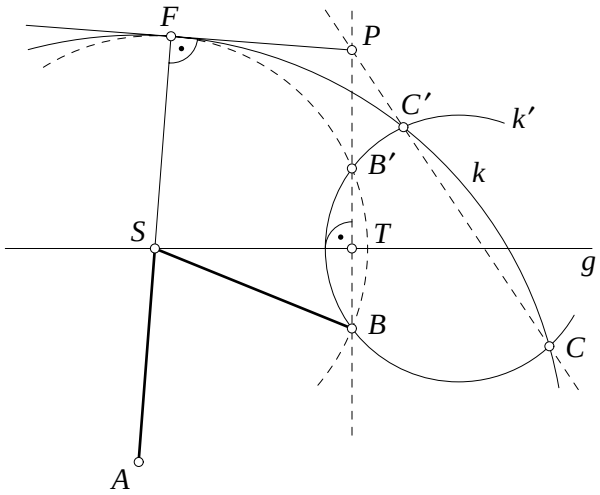
folgt. □

Bemerkung: Der zweite Schnittpunkt C' des Kreises k mit der Geraden g kommt nur dann in Frage, wenn er zwischen den Lotfußpunkten von A, B auf g liegt (ansonsten würde der Strahl auch in Längsrichtung zurückreflektiert werden, was physikalisch gesehen dem Impulserhaltungssatz widerspräche).

A.71 (Bild) Ist $ABCD$ das gesuchte Quadrat, so liegen o. B. d. A. die Punkte B und D auf g, die beiden anderen gegenüberliegenden Punkte A und C auf k_1 bzw. k_2. Da in einem Quadrat die Diagonalen AC und BD senkrecht aufeinander stehen und die Eckpunkte von deren Schnittpunkt S jeweils gleiche Abstände haben, ist klar, daß A und C symmetrisch zur Geraden g sind. Wir benutzen daher g als Symmetrieachse und spiegeln den Kreis k_2 an ihr; es entsteht der Kreis k_2'. Die Schnittpunkte von k_1 und k_2' erfüllen dann genau diese Symmetriebedingung. Die anderen Punkte des Quadrats ergeben sich anschließend auf einfache Weise.



A.72 (Bild) *Konstruktion:* Wir ziehen einen Kreisbogen $k \equiv A_s$ und spiegeln B an g, wodurch wir B' erhalten. Ein beliebiger, durch B und B' gehender Kreis k' schneide k in den Punkten C und C'. Der Schnittpunkt der Geraden BB' und CC' sei P. Legen wir von P aus die Tangenten an k, so erhalten wir die Punkte F bzw. F' (im Bild nicht dargestellt). Die Geraden AF bzw. AF' schneiden g in den gesuchten Punkten S bzw. S'.



Beweis: Es ist zu zeigen, daß tatsächlich $AS + SB = s$ gilt. PF ist Tangentenabschnitt an k, dessen Quadrat nach dem Sekanten-Tangentensatz gleich dem Produkt der Sekantenabschnitte $PC \cdot PC'$ ist. Letztere Strecken sind zugleich Sekantenabschnitte in k'; deren Produkt ist damit nach dem Sekantensatz ebenfalls gleich $PB \cdot PB'$. Mit T als Schnittpunkt von BB' und g erhalten wir somit folgende Gleichungskette:

$$PF^2 = PC \cdot PC' = PB \cdot PB' = (PT + TB) \cdot (PT - TB) = PT^2 - TB^2$$

(wegen $TB = TB'$). Die Dreiecke SFP und STP sind nun nach obiger Konstruktion bei F bzw. T rechtwinklig und es gilt weiter:

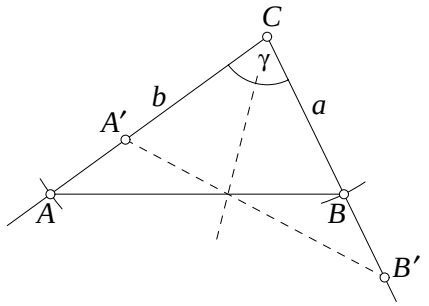
$$SF^2 = SP^2 - PF^2 = (ST^2 + PT^2) - PF^2 = ST^2 + PT^2 - PT^2 + TB^2 = SB^2,$$

also $SF = SB = SB'$, d. h., B, B' und F liegen auf einem Kreis um S. Da F auf dem Kreis k liegt, ist schließlich $s = AF = AS + SF = AS + SB$. □

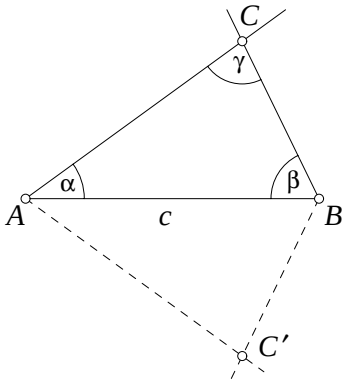
Bemerkung: Werden A und B als Brennpunkte einer Ellipse aufgefaßt, für welche s die Summe der Leitstrahlen bildet, haben wir hiermit die Aufgabe gelöst, die Schnittpunkte einer beliebig gegebenen Geraden mit einer gegebenen Ellipse zu bestimmen.

LÖSUNGEN: DREIECKSKONSTRUKTIONEN

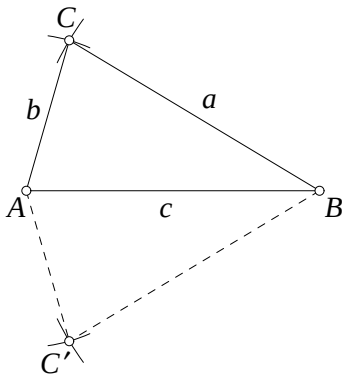
B.1 (Bild) Wir tragen von dem Scheitel C des Winkels γ aus auf dem einen Schenkel die Strecke b bis zum Punkt A ab, auf dem anderen a bis B und verbinden A mit B; dann entspricht $\triangle ABC$ den Forderungen der Aufgabe. Wir könnten noch ein zweites Dreieck erhalten, wenn wir umgekehrt auf dem ersten Schenkel a bis A', auf dem zweiten b bis B' abtragen und dann A' mit B' verbunden hätten. $\triangle A'B'C$ entspricht ebenso den Forderungen der Aufgabe; es sind aber die Ecken A', B' symmetrische Punkte zu den Ecken B, A des $\triangle ABC$ bezüglich der Winkelhalbierenden von $\measuredangle ACB \equiv \gamma$. Es ist daher $\triangle A'B'C \cong \triangle ABC$, und $\triangle A'B'C$ liefert keine andere Lösung der Aufgabe. — *Bemerkung:* Die Aufgabe ist nur für $\gamma = 180°$ nicht lösbar.



B.2 (Bild) Es gibt bei dieser Konstruktion zwei Möglichkeiten. Im ersten Fall liegt der fehlende Winkel der gegebenen Seite gegenüber (z. B. c, α, β gegeben), im zweiten Fall der Seite an (z. B. c, α, γ). Fall *1*: Wir zeichnen die Strecke $AB \equiv c$ und tragen an diese im Punkt A den Winkel α und im Punkt B nach der gleichen Seite hin (hier im Bild also nach oben) den Winkel β an und nennen den Schnittpunkt ihrer freien Schenkel C. Damit ist das geforderte Dreieck konstruiert. Wir können die Winkel auch zur anderen Seite von AB abtragen und erhalten so einen Punkt C', der dann bezüglich AB symmetrisch zu C liegt. Beide Dreiecke ABC und ABC' sind jedoch kongruent. Im Fall *2* wird aus den beiden gegebenen Winkeln zunächst der dritte Winkel bestimmt und anschließend wie in Fall *1* verfahren. Es ergibt sich wieder nur ein Dreieck. — *Bemerkung:* Da die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks gleich zwei Rechten ist, wird die Aufgabe unlösbar, wenn schon die beiden gegebenen Winkel zusammen zwei Rechte betragen oder gar überschreiten.

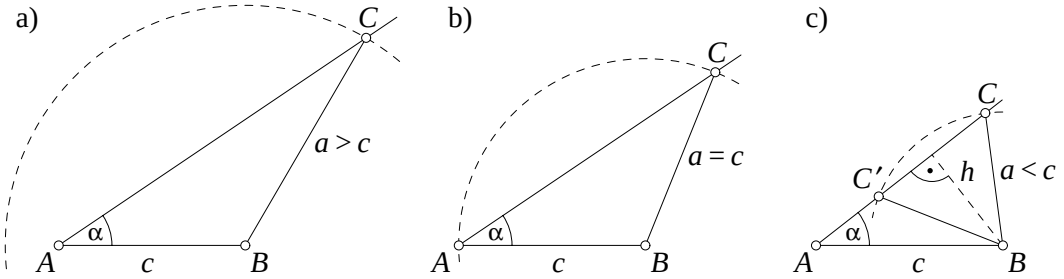


B.3 (Bild) Wir ziehen die Strecke $AB \equiv c$ und beschreiben die Kreise A_b und B_a. Die Schnittpunkte dieser Kreise seien C und C'. Verbinden wir C und C' mit A bzw. B, entstehen die Dreiecke ABC und ABC', die den Forderungen der Aufgabe genügen. Da C bzw. C' jeweils gleich weit von A und B entfernt sind, muß AB Symmetrieachse für diese Punkte sein. $\triangle ABC$ und $\triangle ABC'$ sind daher kongruent, und die Aufgabe hat nur eine Lösung. — *Bemerkung:* Die Aufgabe ist nur lösbar, wenn die Summe der Längen zweier gegebener Seiten größer ist als die Länge der dritten Seite (*Dreiecksungleichung*, vgl. Aufgabe U.3).



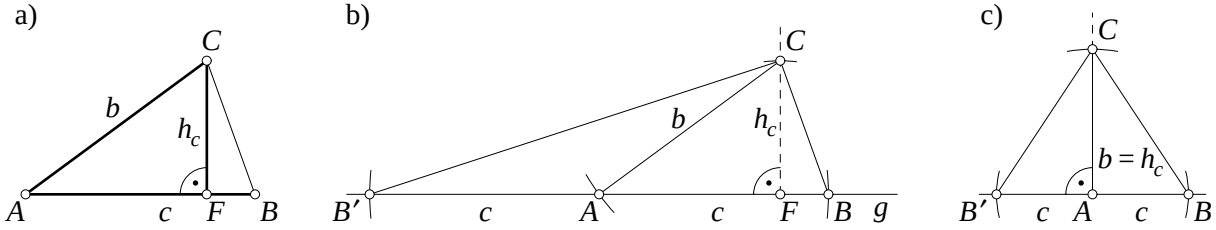
B.4 Wir tragen auf dem einen Schenkel des gegebenen Winkels α vom Scheitel aus die Strecke $AB \equiv c$ ab und beschreiben dann mit dem Radius a um B einen Kreis. Dieser

Kreis schneidet den freien Schenkel des Winkels α nur einmal, wenn $a > c$ ist (Bild a). In diesem Fall ist also das Dreieck durch die gegebenen Stücke eindeutig bestimmt, und



wir finden einen neuen Kongruenzsatz. Ist insbesondere $a = c$, so schneidet der Kreis B_a den freien Schenkel in A und noch in einem zweiten Punkt C. Das Dreieck wird gleichschenklig, und die Kongruenz folgt schon aus dem zweiten Kongruenzsatz WSW (Bild b). Ist aber $a < c$, so muß, solange a größer als das von B auf den freien Schenkel gefällte Lot h ist, B_a den Schenkel zweimal schneiden, und es entstehen zwei voneinander verschiedene Dreiecke (Bild c). Wird a gleich dem Lot h, so folgt wieder die Kongruenz nach dem zweiten Kongruenzsatz WSW, da dann der c gegenüberliegende Winkel gleich einem Rechten ist. Ist schließlich a kleiner als h, so gibt es überhaupt keine Lösung.

B.11 *Analysis:* In dem beliebig gezeichneten $\triangle ABC$ werden zunächst die drei als gegeben zu betrachtenden Stücke c, b und h_c kräftig hervorgehoben (Bild a). Wir bemerken, daß das bei F rechtwinklige Teildreieck AFC aus h_c und b konstruierbar ist (dieses ist das vorn erwähnte Hilfsdreieck). Von dem verlangten Dreieck kennen wir nun die Ecken A und C sowie die Richtung der Seite AB. Den dritten Eckpunkt B finden wir, indem wir c auf dem Strahl AF abtragen.

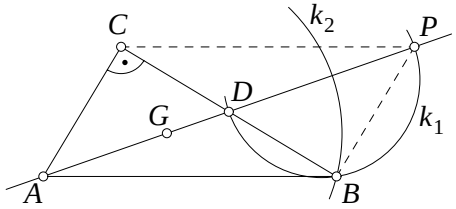


Konstruktion: Wir zeichnen eine Gerade g und errichten auf dieser in einem beliebigen Punkt F die Senkrechte $CF \equiv h_c$ (Bild b). Anschließend beschreiben wir C_b, der g in A schneidet, und A_c, der die Gerade in B trifft. Nun verbinden wir C mit A und B.
Behauptung: $\triangle ABC$ ist das verlangte, d. h. es ist 1. $AB = c$; 2. $AC = b$; 3. $CF = h_c$ und $CF \perp AB$.
Beweis: 1. $AB = c$ als Radius des um A beschriebenen Kreises; 2. $AC = b$ als Radius des um C beschriebenen Kreises; 3. $CF = h_c$ und $CF \perp AB$ nach obiger Konstruktion. $\square$
Determination: Die Aufgabe ist stets lösbar, wenn $b > h_c$ ist. Der Kreis C_b schneidet die Gerade g eigentlich in zwei Punkten A und A'. Diese Punkte liegen aber symmetrisch zu CF, und die beiden dadurch entstehenden Dreiecke CFA und CFA' sind kongruent; wir brauchen also nur einen Schnittpunkt zu berücksichtigen. Der Kreis A_c schneidet g ebenfalls in zwei Punkten B und B' (Bild b). Die Dreiecke ABC und $AB'C$ sind hier

jedoch voneinander verschieden; das eine Dreieck besitzt bei A einen spitzen Winkel, das andere bei A einen stumpfen Winkel. Es gibt also im Fall $b > h_c$ zwei Lösungen.
Die Aufgabe ist auch lösbar, wenn $b = h_c$ ist (Bild c). Dann fällt aber Punkt A mit F zusammen, und die Punkte B und B' liegen symmetrisch zu CA. Beide Dreiecke ABC und $AB'C$ sind daher kongruent, und wir brauchen nur den einen Schnittpunkt B zu berücksichtigen. Es gibt also für $b = h_c$ nur eine Lösung, und zwar ein rechtwinkliges Dreieck. Ist dagegen $b < h_c$, so gibt es keine Lösung, da dann der Kreis C_b die Gerade g nicht schneidet.

B.12 (Bild) *Analysis:* a) Angenommen, $\triangle ABC$ entspreche den Bedingungen der Aufgabe. Dann gibt es genau einen Punkt P, für den $ABPC$ ein Parallelogramm ist, und die Diagonalen AP und BC werden durch ihren Schnittpunkt D halbiert. Ferner sind $\measuredangle DBP$ und $\measuredangle DCA$ Rechte, also liegt nach der Umkehrung des Satzes des Thales B auf einem Halbkreis über DP. Ist weiter G der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden von $\triangle ABC$, so gilt $AG = \frac{2}{3}m_a$ und $BG = \frac{2}{3}m_b$ (vgl. Aufgabe D.10). b) Daher genügt ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende *Konstruktion* erhalten werden kann:

- Wir konstruieren auf einer Geraden die Punkte A, G, D, P in dieser Anordnung so, daß $AD = DP = m_a$ und $AG = \frac{2}{3}m_a$ gilt.
- Wir schlagen einen Halbkreis k_1 über DP.
- Wir schlagen den Kreis k_2 um G mit $\frac{2}{3}m_b$. Schneidet er k_1 in einem Punkt, so sei dieser mit B bezeichnet.
- Wir verlängern die Strecke BD über D hinaus um ihre eigene Länge und erhalten damit den Punkt C.

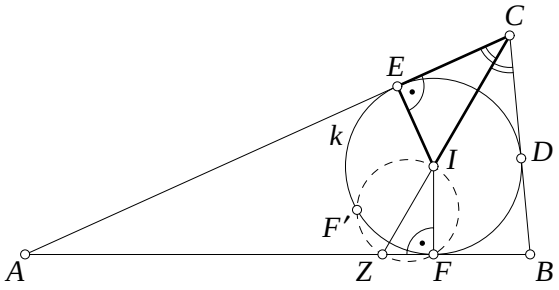


c) *Beweis*, daß jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe genügt: Nach Konstruktion ist AD Seitenhalbierende der Länge m_a in $\triangle ABC$. Wegen $AG = \frac{2}{3}m_a$ ist G der Schwerpunkt von $\triangle ABC$, also enthält die Verlängerung von BG die Seitenhalbierende durch B. Wegen $BG = \frac{2}{3}m_b$ hat sie die Länge m_b. Schließlich ist nach dem Satz des Thales $\measuredangle PBD = 90°$ und wegen $\triangle ADC \cong \triangle PDB$ daher auch $\measuredangle ACB = 90°$.
d) Die ersten drei Konstruktionsschritte ergeben bis auf Kongruenz eindeutig A, G, D, P, k_1, k_2. Dabei haben k_1, k_2 die Radien $r_1 = \frac{1}{2}m_a = 3\,\text{cm}$ bzw. $r_2 = \frac{2}{3}m_b = \frac{16}{3}\,\text{cm}$ und den Mittelpunktsabstand $d = \frac{1}{3}m_a + \frac{1}{2}m_a = \frac{5}{6}m_a = 5\,\text{cm}$. Diese Längen erfüllen die Dreiecksungleichungen (vgl. Lösung zu Aufgabe U.3)

$$r_2 - r_1 = \frac{7}{3}\,\text{cm} < d = \frac{15}{3}\,\text{cm} < r_2 + r_1 = \frac{25}{3}\,\text{cm}.$$

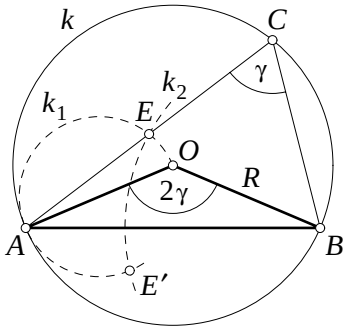
Daher existiert genau ein Schnittpunkt B von k_1 mit k_2, und hiernach ist auch C durch den letzten Konstruktionsschritt bestimmt. Somit existiert $\triangle ABC$ mit den geforderten Eigenschaften und ist durch die gegebenen Längen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

B.13 *Analysis:* (Bild) k sei der Inkreis des gesuchten $\triangle ABC$; sein Mittelpunkt I liegt auf der Winkelhalbierenden CZ. Weiterhin seien D, E und F die Berührungspunkte von k mit den Seiten BC, CA und AB.



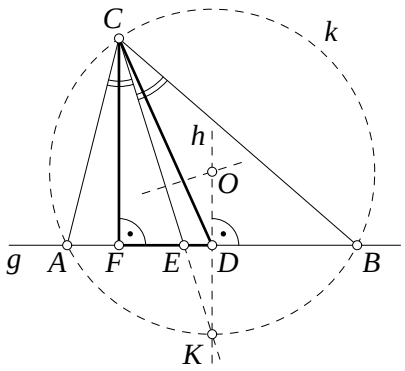
Konstruktion: Das rechtwinklige Hilfsdreieck IEC wird nach dem Kongruenzsatz WSW aus den Stücken $\measuredangle IEC = 90°$, $EI = r$ und $\measuredangle CIE = 90° - \gamma/2$ konstruiert. Um I als Mittelpunkt wird mit dem Radius r der Inkreis k gezeichnet und vom Punkt C aus die zweite Tangente an k konstruiert; deren Berührungspunkt sei D. Nun kann auf der Verlängerung von CI über I hinaus die Länge $CZ = w_c$ abgetragen werden. Dies liefert den Punkt Z. Anschließend wird von Z aus die Tangente an k konstruiert. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten (die Berührungspunkte F und F'), falls Z außerhalb von k liegt. Der Schnittpunkt dieser Tangente mit der Geraden durch CE liefert den Eckpunkt A, der mit der Geraden durch CD den Eckpunkt B. Im allgemeinen lassen sich also zwei Dreiecke aus den gegebenen Größen finden, die jedoch kongruent sind.

B.14 *Analysis:* (Bild) Die Seite AB ist eine Sehne des Umkreises k mit dessen Mittelpunkt O. Nach dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz ist der Zentriwinkel $\measuredangle AOB$ doppelt so groß wie der Peripheriewinkel $\measuredangle ACB = \gamma$. Daher ergibt sich folgende *Konstruktion:* Das gleichschenklige Hilfsdreieck ABO läßt sich nach dem Kongruenzsatz SWS aus den Schenkeln $AO = BO = R$ und dem eingeschlossenen Winkel 2γ konstruieren. Um O wird mit dem Radius R der Umkreis k gezeichnet, auf dem der dritte Eckpunkt C des gesuchten Dreiecks liegt. E sei die Mitte der Seite AC, d. h. $EB = m_b$ ist die gegebene Länge der Seitenhalbierenden m_b. Den Punkt E finden wir als Schnittpunkt zweier geometrischer Örter, der beiden Kreise k_1 und k_2. Der erste Kreis k_1 hat die Strecke AO als Durchmesser, kann also unmittelbar beschrieben werden. Er ist der geometrische Ort derjenigen Punkte, die alle von A ausgehenden Sehnen in k halbieren (vgl. Aufgabe A.25). Der zweite Kreis k_2 hat den Radius m_b mit B als Mittelpunkt. Haben wir E auf diese Weise gefunden, so ist der Schnittpunkt der Geraden AE mit dem Umkreis k der dritte Eckpunkt C.



Determination: Auch hier erhalten wir im allgemeinen zwei Schnittpunkte E und E' der beiden Kreise k_1 und k_2. Liegen jedoch E' und O in unterschiedlichen durch $g(A, B)$ bestimmten Halbebenen, so wäre der daraus folgende Peripheriewinkel $\gamma' = 180° - \gamma \neq \gamma$ (vgl. Aufgabe K.2, Fall *4*). E' erfüllt also nicht die Voraussetzungen. Ergeben sich dagegen zwei Schnittpunkte, die zusammen mit O in der gleichen Halbebene bezüglich $g(A, B)$ liegen, erhalten wir i. a. zwei verschiedene Dreiecke als Lösungen.

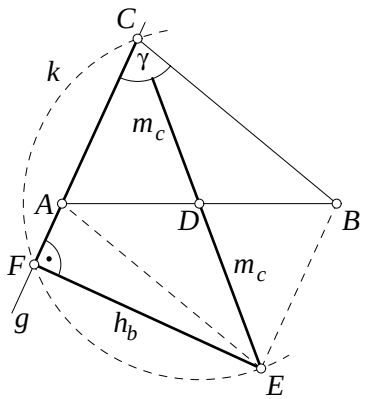
B.15 *Analysis:* (Bild) $\triangle ABC$ sei das gesuchte Dreieck, $CD = m_c$ die Seitenhalbierende, $CE = w_c$ die Winkelhalbierende und $CF = h_c$ die Höhe, wobei letztere senkrecht auf der Geraden $g(A, B)$ steht. Ferner schneide die Mittelsenkrechte von AB die Verlängerung der Winkelhalbierenden CE in einem Punkt K, der auf dem Umkreis k von $\triangle ABC$ liegt (vgl. Aufgabe D.3).



Konstruktion: Vom rechtwinkligen Hilfsdreieck CFD sind die Kathete h_c und die Hypotenuse m_c gegeben. Es läßt sich also aus den gegebenen Stücken unmittelbar nach Kongruenzsatz SSW konstruieren. Den Punkt E finden wir als Schnittpunkt eines Kreises mit dem Radius w_c um C mit der Geraden g, die bereits durch F und D bestimmt ist. Nun ergibt sich der Punkt K als Schnittpunkt der in D senkrecht zu g errichteten Geraden h mit der Verlängerung von CE über E hinaus. Der Mittelpunkt O des Umkreises muß nun seinerseits auf der Geraden h (die zugleich Mittelsenkrechte der noch unbekannten Seite AB ist) und auf der Mittelsenkrechten der Sehne CK liegen; er ist somit ihr gemeinsamer Schnittpunkt. Die beiden Eckpunkte A und B erhalten wir schließlich als Schnittpunkte von g mit dem Umkreis O_C.

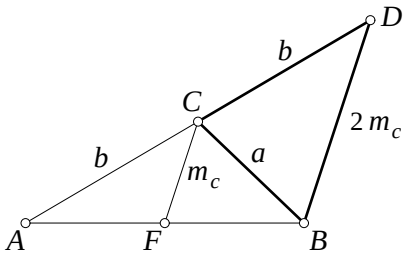
Bemerkung: Im allgemeinen gibt es noch einen zweiten Schnittpunkt E', der von C den Abstand w_c hat. Dieser liegt jedoch nicht zwischen dem Höhenfußpunkt F und der Seitenmitte D und führt somit nicht zum geforderten Dreieck.

B.16 (Bild) Dreieckskonstruktionen, bei denen die Länge einer Seitenhalbierenden gegeben ist, lassen sich oft dadurch lösen, indem das Dreieck ABC am Mittelpunkt der halbierten Seite um 180° gedreht wird. Wir erreichen dies, indem die Strecke $CD = m_c$ über den Seitenmittelpunkt D hinaus bis zum Punkt E so verlängert wird, daß $CE = 2m_c$ gilt. Das entstehende Viereck $ACBE$ ist dann ein Parallelogramm. Wenn F der Fußpunkt des Lotes von E auf die Gerade CA ist, dann ist wegen $BE \parallel CF$ die Länge von $EF = h_b$.



Konstruktion: Das $\triangle CEF$ ist aus den gegebenen Stücken konstruierbar: Wir zeichnen die Strecke CE der Länge $2m_c$ mit dem Mittelpunkt D und schlagen um D den THALES-Kreis k. Der Höhenfußpunkt F ist dann der Schnittpunkt von k mit einem Kreis vom Radius h_b um E. Nun kann die Gerade CF gezogen werden. In C wird an g der Winkel γ so abgetragen, daß CE zwischen beiden Schenkeln zu liegen kommt. Der Eckpunkt B ist dann der Schnittpunkt des freien Schenkels mit der Parallelen von g durch E. Schließlich finden wir A als Schnittpunkt der Geraden BD mit g.

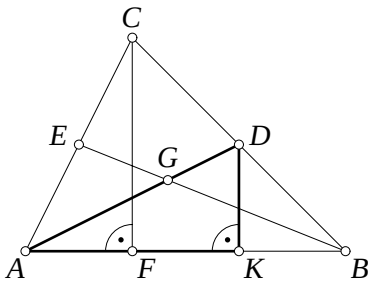
B.17 (Bild) Eine weitere Methode bei der Konstruktion von Dreiecken mit gegebener Länge von Seitenhalbierenden besteht darin, das gesuchte $\triangle ABC$ so zu erweitern, daß der Strahlensatz angewendet werden kann. Hier sei F der Mittelpunkt von AB, so daß $CB = a$, $CA = b$ und $CF = m_c$ die gegebenen Stücke sind. Wir verlängern die Seite AC um ihre Länge b über C hinaus und erhalten Punkt D. Da nun offenbar



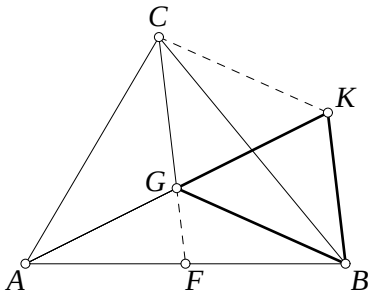
$$\frac{AC}{AD} = \frac{AF}{AB} = \frac{1}{2}$$

gilt, folgt aus der Umkehrung des 1. Strahlensatzes: $CF \parallel DB$ und ferner $DB = 2m_c$. Damit ist für diese Aufgabe ein unmittelbar herstellbares Hilfsdreieck gefunden ($\triangle DCB$ aus a, b und $2m_c$). Eckpunkt A erhalten wir durch Verlängerung von DC über C hinaus.

B.18 (Bild) Die Mittelpunkte der Seiten BC, CA seien D bzw. E; Punkt F sei der Lotfußpunkt von C auf AB. Ziehen wir die Parallele zu CF durch D, schneidet diese AB in K, und es gilt nach dem zweiten Strahlensatz: $BD : BC = DK : CF = 1 : 2$. Somit ist $\triangle ADK$ ein aus $AD = m_a$, $DK = \frac{1}{2}h_c$ und $\measuredangle AKD = 90°$ konstruierbares Hilfsdreieck. Ferner teilt der Schwerpunkt G die Seitenhalbierende AD im Verhältnis $1 : 2$ und ist damit ebenfalls bekannt. Eckpunkt B finden wir nun auf der Verlängerung von AK im Abstand $\frac{2}{3}m_b$ von G; den dritten Eckpunkt C durch Verdopplung von BD.



B.19 (Bild) G sei wie vereinbart der Schwerpunkt von $\triangle ABC$. Mit Hilfe des bekannten Satzes über die Teilungsverhältnisse auf den Seitenhalbierenden durch G (vgl. Aufgabe D.10) und einer Drehung von $\triangle GBC$ in $\triangle KCB$ wird sofort klar, daß z. B. das Hilfsdreieck $\triangle GKB$ aus den drei Seiten $GK = GA = \frac{2}{3}m_a$, $GB = \frac{2}{3}m_b$ und $BK = GC = \frac{2}{3}m_c$ konstruiert werden kann. Die beiden anderen Eckpunkte A, C finden wir einfach, indem wir KG verdoppeln und $\triangle GKB$ zum Parallelogramm $CGBK$ erweitern.

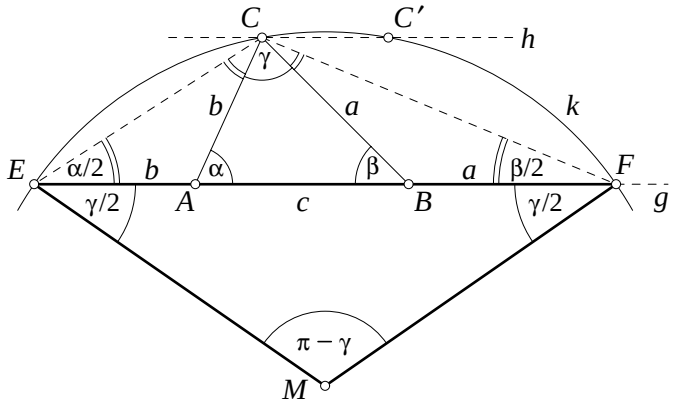


B.20 *Analysis:* (Bild) Von dem gesuchten $\triangle ABC$ klappen wir die Seiten $BC = a$ und $AC = b$ so nach außen, daß die dadurch entstehenden Punkte E und F auf der Geraden $g(A, B)$ zu liegen kommen und somit $EF = a + b + c$ die Länge des Umfangs wird. Die Dreiecke CAE und CBF sind dann gleichschenklig, und wir können uns leicht überzeugen, daß die Winkel $\measuredangle CEA = \measuredangle ECA = \frac{1}{2}\alpha$ und $\measuredangle CFB = \measuredangle FCB = \frac{1}{2}\beta$ betragen (Außenwinkelsatz). Weiterhin ist der Winkel

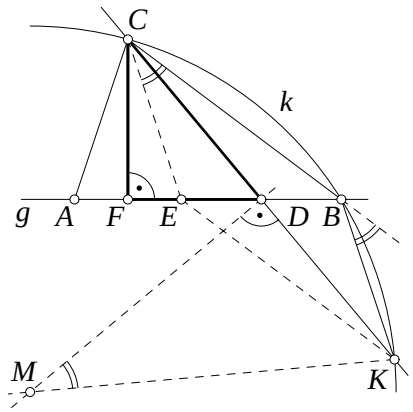
$$\measuredangle ECF = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 90° + \frac{\gamma}{2}.$$

Er ist ein Peripheriewinkel über der Sehne EF innerhalb des Umkreises k von $\triangle ECF$ (Mittelpunkt M). Der gegenüberliegende Peripheriewinkel beträgt demnach $90° - \frac{1}{2}\gamma$,

der zugehörige Zentriwinkel $\measuredangle EMF = 180° - \gamma$. — *Konstruktion:* Das gleichschenklige $\triangle EMF$ mit den Basiswinkeln $\measuredangle FEM = \measuredangle EFM = \frac{1}{2}\gamma$ kann nach dem Kongruenzsatz WSW aus den gegebenen Stücken unmittelbar gezeichnet werden. Für den Punkt C liegt als geometrischer Ort der Kreis $k = M_E$ fest; ein zweiter Ort ist die Parallele h zu $g(E,F)$ im Abstand h_c auf der M gegenüberliegenden Seite von EF. Damit ergeben sich als Schnittmenge beider geometrischer Örter zwei Punkte C bzw. C', die jedoch symmetrisch bezüglich der Mittelsenkrechten von EF liegen, so daß es genügt, allein C zu betrachten. Die beiden noch fehlenden Eckpunkte A und B erhalten wir schließlich, indem wir die Mittelsenkrechten von CE und CF mit $g(E,F)$ zum Schnitt bringen.



B.21 *Analysis:* (Bild) Die Lösungsidee bei dieser Konstruktion besteht darin, die Winkeldifferenz $\alpha - \beta$ in dem gesuchten Dreieck ABC ausfindig zu machen. Wir erreichen dies, indem wir $\triangle ACF$, wobei F der Fußpunkt des Lotes von C auf AB sei, an der Höhe $CF = h_c$ nach innen umklappen (dies ist wegen $0 < \alpha - \beta < 90°$ immer möglich). Dadurch entsteht das gleichschenklige $\triangle ACE$ mit den Basiswinkeln α. Nun ist leicht zu überprüfen, daß der Winkel $\measuredangle ECB = \alpha - \beta$ beträgt (Außenwinkelsatz im $\triangle ECB$). Weiter sei K derjenige Punkt, für den $CEKB$ ein Parallelogramm ist. Dann werden die Diagonalen EB und CK durch deren Schnittpunkt D halbiert und es gilt $\measuredangle CBK = 180° - (\alpha - \beta)$. Somit wird

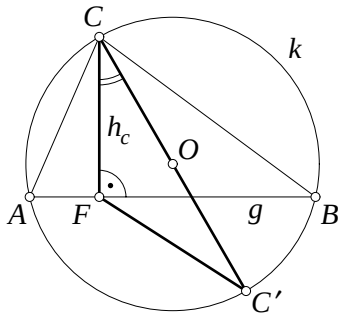


$$AB = AF + FE + ED + DB = c,$$

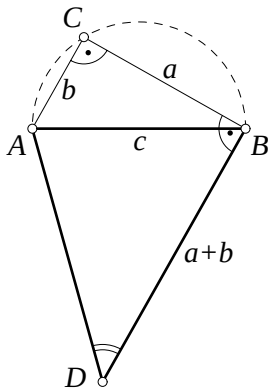
und aus $AF = FE$ und $ED = DB$ folgt $FD = \frac{1}{2}c$.

Konstruktion: Das Hilfsdreieck CFD ist aus den Größen h_c, $\frac{1}{2}c$ und $\measuredangle CFD = 90°$ herstellbar. Den Punkt K finden wir durch Verlängerung von CD über D hinaus. Eckpunkt B liegt nun einerseits auf der Geraden $g(F,D)$, andererseits auf einem Kreisbogen k, für den der Peripheriewinkel $\measuredangle CBK$ über der Sehne CK gleich $180° - (\alpha - \beta)$ ist. k ist somit ebenfalls konstruierbar (indem z. B. der Winkel $90° - (\alpha - \beta)$ in K an CK abgetragen und der freie Schenkel mit der Mittelsenkrechten von CK zum Schnitt gebracht wird; dies liefert den Mittelpunkt M von k). Der Rest ist nun schnell erledigt: Punkt E ist der Schnittpunkt von g mit der Parallelen von CB durch K; wird dieser noch an F gespiegelt, erhalten wir Eckpunkt A und das verlangte Dreieck ist konstruiert.

B.22 (Bild) Die geforderte Konstruktion wird nahezu trivial, wenn uns Aufgabe D.25 geläufig ist. Bezeichnen wir den Höhenfußpunkt von C auf AB mit F, so wird schnell klar, daß das Hilfsdreieck CFC' nach Kongruenzsatz SWS aus $CF = h_c$, $\measuredangle FCC' = \alpha - \beta$ und $CC' = 2R$ konstruierbar ist. Dann haben wir auch den Umkreismittelpunkt O als Mittelpunkt der Strecke CC', somit gleichfalls den Umkreis k. Die beiden verbleibenden Eckpunkte A und B ergeben sich nun einfach als Schnittpunkte der Gerade $g \perp CF$ durch F mit dem Umkreis. Bei deren Bezeichnung ist lediglich darauf zu achten, daß für $\alpha - \beta > 0$ bei Eckpunkt A tatsächlich der größere Innenwinkel zu liegen kommt.



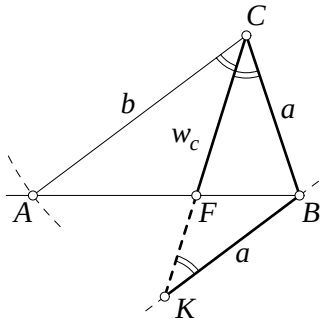
B.23 (Bild) Die Lösung wird besonders einfach, falls uns Trapeze vertraut sind, bei denen die Länge einer Grundseite gleich der Summe aus der Länge eines Schenkels und der gegenüberliegenden Grundseite ist (s. Aufgabe M.12). Haben wir also ein Trapez $DBCA$ mit $BC = a$, $CA = b$ und $\measuredangle ACB = \measuredangle DBC = 90°$, dann muß der Winkel $\measuredangle ADB = 45°$ sein. Das Hilfsdreieck ADB ist somit nach Kongruenzsatz SSW aus c, $a + b$ sowie dem Winkel 45° konstruierbar. Den dritten Eckpunkt C finden wir als Schnittpunkt des THALES-Kreises über AB mit der Parallelen zu DB durch A.



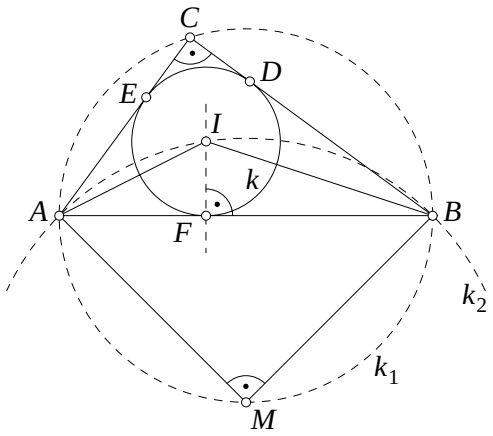
B.41 *Analysis:* (Bild) Die Parallele zur Seite AC durch B schneide die Verlängerung der Winkelhalbierenden $CF = w_c$ im Punkt K. Dann ist $\triangle CBK$ offenbar ein gleichschenkliges Dreieck mit den Basiswinkeln $\measuredangle BKC = \measuredangle ACK$ (Wechselwinkel) $= \measuredangle BCK$ (Winkelhalbierende). Mit Hilfe des 2. Strahlensatzes läßt sich jetzt die Proportion

$$\frac{w_c}{b} = \frac{FK}{a} = \frac{CK}{b+a}$$

ablesen, in der alle gegebenen Größen enthalten sind.
Konstruktion: Wir konstruieren nach obiger Gleichung die vierte Proportionale CK (s. Aufgabe A.11) und anschließend $\triangle CBK$ nach Kongruenzsatz SSS aus CK und a. Punkt F erhalten wir auf CK von C aus im Abstand w_c; A schließlich als Schnittpunkt des Kreises C_b mit der Geraden BF.

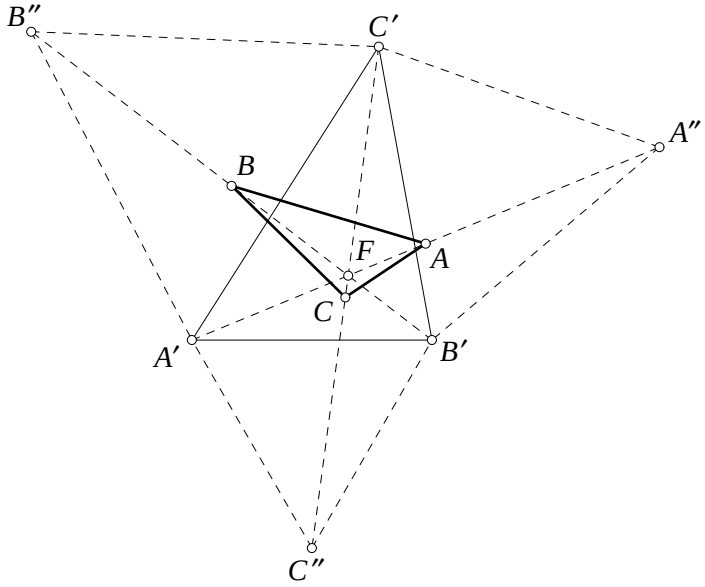


B.51 *Analysis:* (Bild) Jede Seite AB eines Dreiecks erscheint vom Inkreismittelpunkt I aus unter einem Winkel $90^\circ+\frac{1}{2}\gamma$ (s. Aufgabe D.9), hier mit $\gamma = 90^\circ$ also $\measuredangle AIB = 135^\circ$. k_1 sei der Kreis mit dem Durchmesser AB. Wir betrachten nun AB als Sehne eines anderen Kreises k_2 mit dem Mittelpunkt M und I auf seiner Peripherie liegend. Dann ist für dieselbe Sehne jeder Winkel $\measuredangle APB = 45^\circ$ Supplementwinkel (mit irgendeinem P auf k_2, aber auf dem anderen Bogen als I) und der zugehörige Zentriwinkel $\measuredangle AMB$ ein Rechter. Folglich ist M der Schnittpunkt von k_1 mit der Mittelsenkrechten von AB.



Konstruktion: Wir haben die Seite AB sowie darauf den Berührungspunkt F gegeben und können somit den Kreis k_1 und weiter M als dessen Schnittpunkt mit der Mittelsenkrechten von AB zeichnen. I ist der Schnittpunkt von M_A und der Senkrechten von AB in F. Jetzt spiegeln wir lediglich F an BI und AI und erhalten so die beiden anderen Berührungspunkte D und E. Schließlich finden wir den verlangten dritten Eckpunkt C als Schnittpunkt der verlängerten Tangentenabschnitte AE und BD.

B.52 (Bild) Die Aufgabenstellung gibt uns einen eindeutigen Hinweis auf das Problem von Fermat (s. Aufgabe D.53). Danach ist der Fermat-Punkt F derjenige Punkt im Innern eines Dreiecks ABC, für den gerade $\measuredangle AFB = \measuredangle BFC = \measuredangle CFA = 120^\circ$ gilt. Gleichzeitig ist er Fermat-Punkt des Dreiecks $A'B'C'$ (s. Aufgabe D.54). Wiederholen wir den Prozeß mit den aufgesetzten gleichseitigen Dreiecken nochmals, indem wir die



Dreiecke $B'C'A''$, $C'A'B''$ und $A'B'C''$ errichten, so ist F ebenfalls der Fermat-Punkt von $\triangle A''B''C''$. Außerdem ist klar, daß der gesuchte Eckpunkt A auf der Strecke $A'A''$, B auf $B'B''$ und C auf $C'C''$ liegt. Anstatt einen Schritt rückwärts zu gehen (von $\triangle A'B'C'$ zu $\triangle ABC$), gehen wir also einen Schritt vorwärts und anschließend zwei zurück.

Um nun noch die Lagen zu berechnen, gehen wir von den Gleichungen

$$s \equiv AA' = BB' = CC' = FA + FB + FC \qquad \text{und}$$
$$A'A'' = B'B'' = C'C'' = FA' + FB' + FC' \tag{B.101}$$

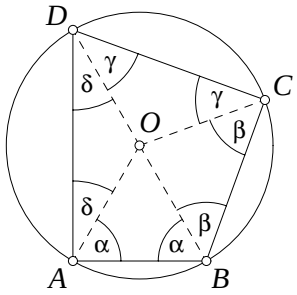
aus. Wegen $FA' = AA' - FA = s - FA$ und den analogen Gleichungen $FB' = s - FB$ und $FC' = s - FC$ folgt aus (B.101)

$$A'A'' = B'B'' = C'C'' = 3s - s = 2s = 2\,AA' = 2\,BB' = 2\,CC',$$

d. h., die gesuchten Eckpunkte A, B, C sind die Mittelpunkte der Strecken $A'A''$, $B'B''$ bzw. $C'C''$.

LÖSUNGEN: KREISE

K.1 *Beweis:* (Bild) Die Innenwinkel des Sehnenvierecks $ABCD$ sind Peripheriewinkel über den Sehnen AC und BD. Bewegen wir eine Ecke des Sehnenvierecks, etwa D, auf dem Kreise, während die Ecken A, B und C in Ruhe bleiben, so nimmt dabei der Peripheriewinkel $\measuredangle ADC$ nacheinander die Lage sämtlicher Peripheriewinkel an, die über dem Bogen ABC möglich sind. Wir erkennen aber, daß er dabei seine Größe $\gamma + \delta$ nicht ändern kann, da er stets den unverändert bleibenden Viereckswinkel $\measuredangle ABC = \alpha + \beta$ zu zwei Rechten ergänzen muß (vgl. Aufgabe V.21). □



Bemerkung: Eigentlich fällt der Peripheriewinkelsatz als Nebenprodukt des Peripherie-Zentriwinkel-Satzes (s. folgende Aufgabe K.2) mit ab.

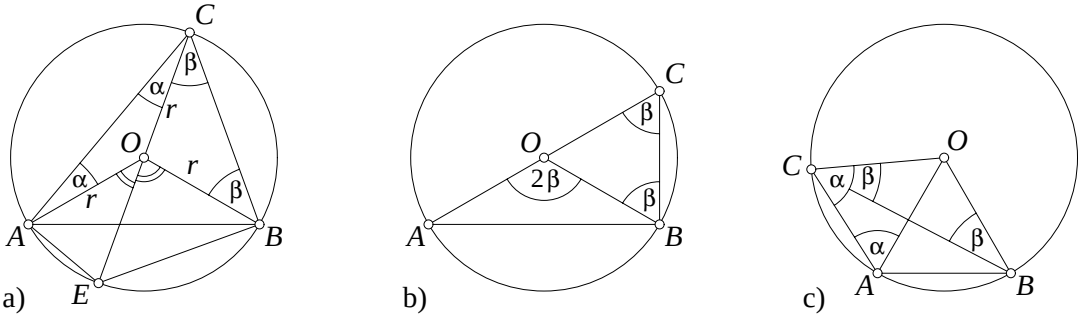
K.2 *Beweis:* (Bild) C sei ein beliebiger Punkt auf der Peripherie des Kreises; die dem Zentriwinkel $\measuredangle AOB$ mit O als Mittelpunkt des Kreises und dem Peripheriewinkel $\measuredangle ACB$ gemeinsame Sehne sei AB. Wir können nun vier verschiedene Fälle für die gegenseitige Lage der Punkte C und O bezüglich AB annehmen:

1. O liegt im Innern des $\triangle ABC$ (Bild a),

2. O liegt auf einer der beiden Seiten AC oder BC (Bild b),

3. O liegt außerhalb von $\triangle ABC$, jedoch mit C auf derselben Seite bezüglich der Geraden $g(A, B)$ (Bild c) und

4. C und O liegen bezüglich $g(A, B)$ auf verschiedenen Seiten (etwa mit $C = E$, Bild a).



Im Fall *1* sind die Dreiecke AOC und BOC wegen $r \equiv AO = BO = CO$ gleichschenklige Dreiecke mit jeweils gleich großen Basiswinkeln $\alpha \equiv \measuredangle ACO = \measuredangle CAO$ und $\beta \equiv \measuredangle BCO = \measuredangle CBO$. Verlängern wir den Radius CO bis zum Schnittpunkt E mit dem Kreis, so sind die Winkel $\measuredangle AOE$ und $\measuredangle EOB$ Außenwinkel dieser gleichschenkligen Dreiecke. Da der Außenwinkel in einem Dreieck gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel ist, folgt

$$\measuredangle AOE = \measuredangle ACO + \measuredangle CAO = 2\alpha \quad \text{und} \quad \measuredangle EOB = \measuredangle BCO + \measuredangle CBO = 2\beta.$$

Durch Addition beider Gleichungen erhalten wir für den Zentriwinkel

$$\measuredangle AOB = \measuredangle AOE + \measuredangle EOB = 2(\alpha + \beta) = 2\,\measuredangle ACB.$$

Für den Fall *2* ist der Zentriwinkel $\measuredangle AOB$ gerade Außenwinkel im gleichschenkligen $\triangle BOC$ (AC ist hierbei Durchmesser des Kreises) und damit doppelt so groß wie dessen Basiswinkel, der gleich dem Peripheriewinkel $\measuredangle ACB$ ist. Im Fall *3* folgt die Behauptung aus

$$\measuredangle AOB = \measuredangle COB - \measuredangle COA = (180^\circ - 2\beta) - (180^\circ - 2\alpha) = 2(\alpha - \beta) = 2\,\measuredangle ACB.$$

Liegen dagegen im Fall *4* C und O auf verschiedenen Seiten der Sehne AB (mit $C = E$ in Bild a), so sind die Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke $\triangle AOE$ und $\triangle EOB$

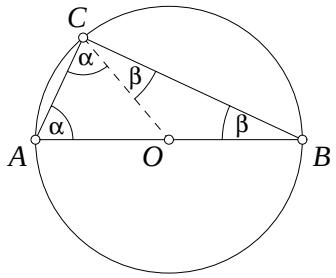
$$\measuredangle EAO = \measuredangle AEO = 90^\circ - \alpha \quad \text{und} \quad \measuredangle BEO = \measuredangle EBO = 90^\circ - \beta$$

und somit

$$\measuredangle AEB = \measuredangle AEO + \measuredangle BEO = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - \measuredangle ACB,$$

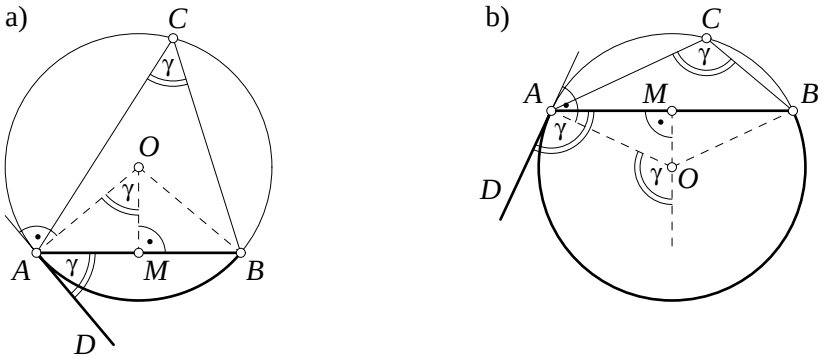
d. h., die beiden Peripheriewinkel $\measuredangle ACB$ und $\measuredangle AEB$ sind Supplementwinkel. □

K.3 *Beweis:* (Bild) Verbinden wir den Punkt C mit dem Mittelpunkt O des Kreises, so entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke AOC und BOC. Bezeichnen wir die Basiswinkel dieser Dreiecke mit α bzw. β, dann ist in dem Dreieck ABC $2\,\alpha + 2\,\beta = 180^\circ$, also $\alpha + \beta = 90^\circ$. Es ist daher $CA \perp CB$. □



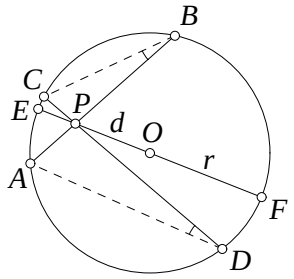
Bemerkung: Der Satz des THALES ist somit ein Spezialfall des Peripherie-Zentriwinkel-Satzes (vgl. Aufgabe K.2, Fall *2*).

K.4 (Bilder) Bewegen wir den Scheitel C des Peripheriewinkels $\measuredangle ACB = \gamma$ längs des Kreises, so ändern zwar AC und BC ihre Lage, aber der Winkel bei C bleibt nach dem Peripheriewinkelsatz konstant. Wird diese Bewegung so lange fortgesetzt, bis C mit A zusammenfällt, so nimmt schließlich CA die Lage der Tangente AD im Punkt A an, und BC fällt in die Richtung der Sehne BA. Der Winkel $\measuredangle DAB$ ist also gleich dem Winkel bei C; er heißt *Sehnen-Tangentenwinkel*.



Zum *Beweis* fällen wir das Lot M vom Mittelpunkt O des Kreises auf die Sehne AB. Dann ist OM die Winkelhalbierende im gleichschenkligen Dreieck AOB. Im Fall *1* sei γ ein spitzer Winkel (Bild a), so daß nach dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz $\measuredangle AOM = \gamma$ gilt. Daher ist im rechtwinkligen Dreieck AOM $\measuredangle OAM$ Komplementwinkel zu γ, und wegen $\measuredangle OAD = 90^\circ$ schließlich $\measuredangle BAD = \gamma = \measuredangle ACB$. Im Fall *2* mit γ als stumpfem Winkel (Bild b) führt eine analoge Betrachtung zum gleichen Ergebnis. □

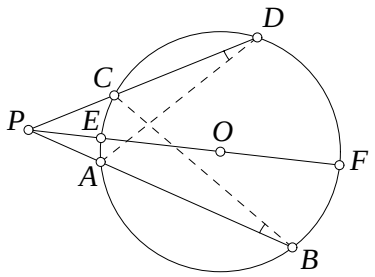
K.11 *Beweis:* (Bild) Wir führen den Beweis über die Ähnlichkeit der Dreiecke PAD und PCB. Dies ist offensichtlich der Fall, da beide in den Winkeln $\measuredangle ADC = \measuredangle ABC$ (Peripheriewinkel über der Sehne AC) und im Scheitelwinkel bei P übereinstimmen. Wir können daher sofort die Proportion $PA : PD = PC : PB$ aufstellen, die umgestellt die behauptete Konstanz des Produktes der Abschnittslängen ergibt: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. □



Insbesondere gilt dies auch für den Durchmesser EF des Kreises; mit dem Abstand $OP \equiv d$ und dem Radius $OE = OF \equiv r$ sowie der Vereinbarung, daß — falls die *gerichteten Strecken* PE und PF den gleichen Richtungssinn haben — deren Produkt positiv sei, anderenfalls negativ (vgl. auch Lösung zu Aufgabe A.12), folgt:

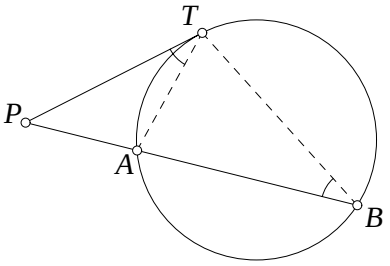
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE \cdot PF = -(r-d)(r+d) = d^2 - r^2 = \mathfrak{P}(P). \quad \text{(K.101)}$$

K.12 *Beweis:* (Bild) Auch im vorliegenden Fall, daß der Punkt P nun außerhalb des Kreises liegt, erkennen wir, daß $\triangle PAD \sim \triangle PCB$ gilt (ein Paar kongruenter Peripheriewinkel und ein gemeinsamer Winkel bei P, vgl. Aufgabe K.11). Mithin ist wiederum $PA : PD = PC : PB$. Die Zentrale PF schneidet den Kreis ein zweites Mal in E, so daß hier mit dem Abstand $PO \equiv d$ und dem Radius $OE = OF \equiv r$ gilt:



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE \cdot PF = (d-r)(d+r) = d^2 - r^2 = \mathfrak{P}(P). \ \square \quad \text{(K.102)}$$

K.13 *Beweis:* (Bild) Hier liegt der Grenzfall vor, daß eine Sekante zur Tangente wird. Wir bemühen daher anstelle des Peripheriewinkelsatzes den Sehnen-Tangentenwinkel-Satz, der uns zeigt, daß $\triangle PAT \sim \triangle PTB$ gilt. Dies führt zur Proportion $PA : PT = PT : PB$. Der Tangentenabschnitt PT ist somit die mittlere Proportionale der Sekantenabschnitte: $PT = \sqrt{PA \cdot PB}$. □



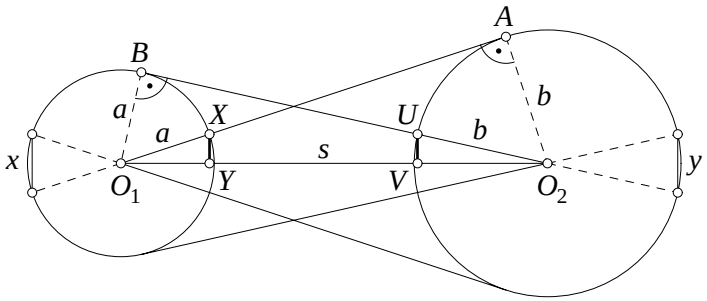
Bemerkung: Mit (K.102) ergibt sich hieraus eine anschauliche Interpretation der Potenz

$$\mathfrak{P}(P) = PA \cdot PB = PT^2, \quad \text{oder} \quad PT = \sqrt{\mathfrak{P}(P)},$$

d. h., die Potenz eines außerhalb des Kreises liegenden Punktes ist gleich dem Quadrat des zugehörigen Tangentenabschnitts.

K.14 *Beweis:* (Bild) A und B seien Berührungspunkte der Tangenten an beide Kreise O_{1a} bzw. O_{2b}; die Strecken $XY = \frac{1}{2}x$ und $UV = \frac{1}{2}y$ gerade die Hälften der in der Behauptung auftretenden Sehnen. Da nun einige rechtwinklige Dreiecke, wie z. B. O_1YX und O_1AO_2 zu erkennen sind, die darüber hinaus noch einen Winkel gemeinsam haben (hier $\measuredangle XO_1Y = \measuredangle AO_1O_2$), ist alles weitere fast zwangsläufig: 1.) Ähnlichkeit beider Dreiecke feststellen und 2.) Proportionen aufstellen. Dies führt auf

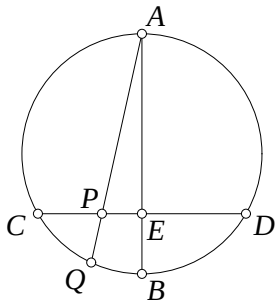
$$\frac{XY}{O_1X} = \frac{O_2A}{O_1O_2}, \quad \frac{x/2}{b} = \frac{a}{s}.$$



Analog folgt (vom anderen „Auge“ aus gesehen): $\triangle O_2VU \sim \triangle O_2BO_1$ und daraus $y/(2a) = b/s$. Aus beiden Gleichungen folgt die Bildgleichheit auf der „Netzhaut“: $x = y$. □

K.15 *Beweis:* (Bild) Eine kurze Rechnung führt auf:

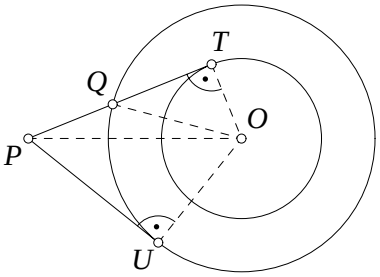
$$\begin{aligned} AP \cdot AQ &= AP(AP + PQ) = AP^2 + AP \cdot PQ \\ &= AP^2 + CP \cdot PD \\ &= AP^2 + (CE - PE) \cdot (CE + PE) \\ &= AP^2 + CE^2 - PE^2 = AE^2 + CE^2 = AC^2. \end{aligned}$$



Zweifellos ist AC unabhängig von der Lage von P. □

K.16 *Beweis:* (Bild) Zweifellos ist $OT \perp TQ$. Daraus folgt mit dem Satz des PYTHAGORAS:

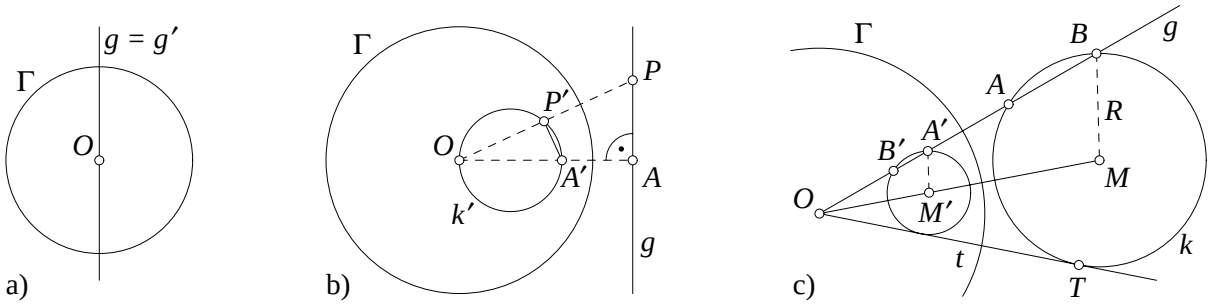
$$\begin{aligned} QT^2 &= OQ^2 - OT^2 = OU^2 - OT^2 \\ &= (OP^2 - PU^2) - (OP^2 - PT^2) \\ &= PT^2 - PU^2. \ \square \end{aligned}$$



K.21 *Beweis:* Die Behauptung a) ist selbstverständlich, da nach der Definition der Inversion jeder Punkt auf der Geraden durch O in einen anderen Punkt derselben Geraden abgebildet wird (Bild a). Auch wenn die Punkte ausgetauscht werden, bleibt die Gerade als Ganzes erhalten. Um b) zu beweisen, fällen wir das Lot von O auf die Gerade g; dessen Fußpunkt sei A und der inverse Punkt A' (Bild b). Wir wählen ferner einen beliebigen Punkt P auf g, und es sei P' der zugehörige inverse Punkt. Wegen $OA \cdot OA' = OP \cdot OP' = r^2$ folgt

$$\frac{OA'}{OP'} = \frac{OP}{OA},$$

die beiden Dreiecke $OP'A' \sim OAP$ sind also ähnlich. Da $\measuredangle OAP = 90°$, ist auch $\measuredangle OP'A' = 90°$, und P' liegt demzufolge auf dem THALES-Kreis k' mit dem Durchmesser OA'. Hiermit ist b) bewiesen. Die Behauptung c) folgt aus der Tatsache, daß, wenn k' invers zu g ist, auch g invers zu k' sein muß.



Es bleibt noch die Behauptung d). Sei $k \equiv M_R$ irgendein Kreis, der nicht durch O geht (Bild c). Um sein Bild zu finden, ziehen wir eine Gerade g durch O, die k in A und B schneidet, und untersuchen, wie sich die Bilder A', B' ändern, wenn g den Kreis k in allen möglichen Lagen schneidet. Es gilt nun $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2$ nach der Definition der Inversion sowie $OA \cdot OB = t^2$ nach dem Sekanten-Tangentensatz, wenn $t \equiv OT$ die Länge des Tangentenabschnitts von O an k ist. Dividieren wir die erste Beziehung durch die zweite, erhalten wir

$$\frac{OA'}{OB} = \frac{OB'}{OA} = \frac{r^2}{t^2} \equiv \lambda, \tag{K.103}$$

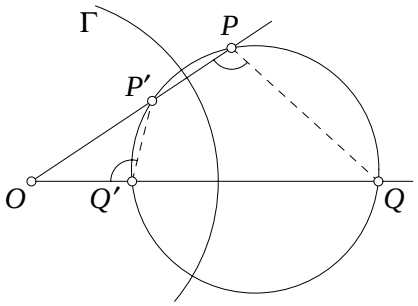
wobei λ eine Konstante ist, die nur von r und t abhängt und für alle Lagen A und B denselben Wert hat. Wir ziehen nun durch A' eine Parallele zu BM, die OM in M' schneidet. Dann ist nach den Strahlensätzen

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{OA'}{OB} = \frac{A'M'}{R}, \quad OM' = \frac{OM \cdot OA'}{OB} = OM \cdot \lambda, \quad A'M' = R\frac{OA'}{OB} = R \cdot \lambda.$$

Das bedeutet, daß für jede Lage von A und B der Punkt M' stets derselbe Punkt auf OM ist und der Abstand $A'M'$ immer denselben Wert hat. Ebenso ist wegen (K.103) auch $B'M' = A'M'$, d. h., die Bilder aller Punkte A, B auf k sind lauter Punkte, deren Abstand von M' konstant ist; mithin ist das Bild von k ein Kreis. □

K.22 *Beweis:* (Bild) Da P, P' und Q, Q' invers zueinander sind, gilt

$$OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' \quad \text{oder} \quad \frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}.$$

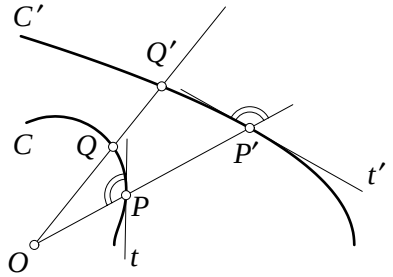


Die Dreiecke OPQ und $OQ'P'$ sind somit ähnlich (da sie den Winkel bei O gemeinsam haben). Daraus folgt für die Innenwinkel $\measuredangle OPQ = \measuredangle OQ'P'$, und (da letzterer Nebenwinkel zu $\measuredangle QQ'P'$ ist):

$$\measuredangle P'PQ + \measuredangle QQ'P' = 180°.$$

Nach Aufgabe V.21 ist $P'PQQ'$ also ein Sehnenviereck. □

K.23 *Beweis:* (Bild) Wir beweisen zunächst, daß der Winkel, den eine Kurve C mit einer Geraden durch das Inversionszentrum bildet, kongruent zu dem Winkel ist, unter dem die inverse Kurve C' dieselbe Gerade schneidet. P, P' und Q, Q' seien daher zwei inverse Punktepaare auf C bzw. C'. Die vier Punkte P, P', Q, Q' liegen allesamt auf einem Kreis (vgl. Aufgabe K.22), so daß gegenüberliegende Winkel Supplementwinkel sind:

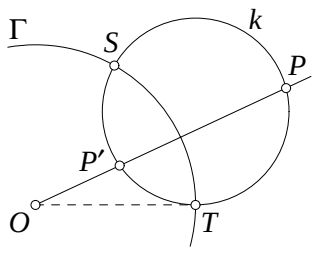


$$\measuredangle OPQ = \measuredangle OQ'P'.$$

Rücken wir mit Punkt Q immer näher an Punkt P auf der Kurve C heran, so wird aus der Sekante PQ die Tangente t und auf der inversen Kurve aus der Sekante $P'Q'$ die Tangente t'. Der Winkel $\measuredangle OPQ$ geht im Grenzfall gegen den eingezeichneten Winkel, dessen Supplementwinkel gegen den Grenzwinkel von $\measuredangle OP'Q'$ geht. Schneiden sich nun zwei beliebige Kurven, so ist der Schnittwinkel zwischen den Kurven natürlich der eingeschlossene Winkel der beiden Tangenten an die Kurven im Schnittpunkt. Damit läßt sich dieser allgemeinere Fall auf den Schnitt zweier Geraden zurückführen. Auch hier bleibt der Winkel bei der Inversion erhalten. □
Bemerkung: Während der Betrag des Schnittwinkels erhalten bleibt, kehrt sich jedoch die Richtung des Winkels um.

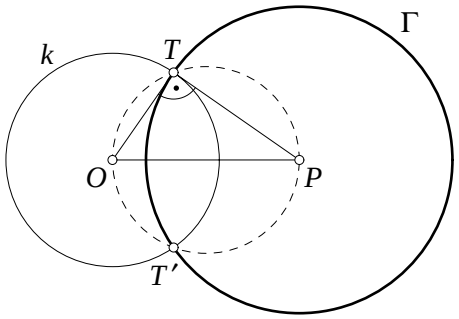
K.24 *Beweis:* (Bild) Der Radius OT des Inversionskreises $\Gamma \equiv O_r$ berühre den Kreis k tangential, d. h., beide Kreise mögen sich orthogonal schneiden. Eine beliebige Gerade durch das Inversionszentrum O schneide k in den Punkten P bzw. P'. Dann gilt nach dem Sekanten-Tangentensatz (s. Aufgabe K.13) stets

$$OP \cdot OP' = OT^2 = r^2,$$



so daß P und P' nach Definition inverse Punkte sind. Für jeden Punkt auf dem Bogen SPT gibt es demnach einen inversen Punkt auf dem Bogen $SP'T$, wobei S, T invariant sind. k geht also bei einer Inversion in sich selbst über. □

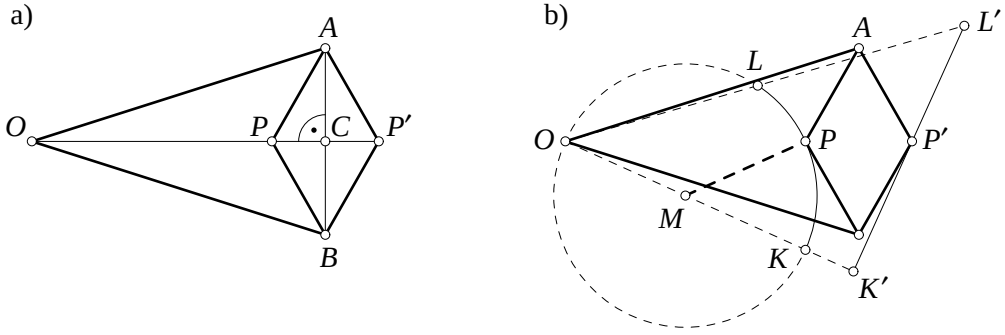
K.25 (Bild) Wie wir aus Aufgabe K.24 wissen, muß der gesuchte Inversionskreis Γ den gegebenen Kreis k in zwei Punkten T und T' *orthogonal* schneiden. Dies ist genau dann der Fall, wenn PT einerseits ein Tangentenabschnitt bzgl. k und andererseits OT Tangentenabschnitt bzgl. Γ ist. Der Winkel $\measuredangle OTP$ muß also ein Rechter sein. Wir finden T bzw. T', indem wir den THALES-Kreis über der Strecke OP mit k zum Schnitt bringen.



K.31 Da im Rhombus $APBP'$ die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, und sie sich in deren Schnittpunkt C halbieren (Bild a), liegen wegen $OA = OB$ die vier Punkte O, P, C, P' auf einer Geraden, die zugleich Mittelsenkrechte von AB ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} OP \cdot OP' &= (OC - PC)(OC + CP') = OC^2 - PC^2 \\ &= (OA^2 - AC^2) - (PA^2 - AC^2) = OA^2 - PA^2 \equiv r^2. \end{aligned}$$

Der letzte Term ist von der Konstruktion durch die Längen der Stäbe OA und PA vorgegeben und somit konstant. Nach der Definition der Inversion (K.1) ist der Kreis O_r der zugehörige Inversionskreis.



Fügt man einen siebenten Stab MP hinzu, der in M so festgehalten wird, daß $OM = PM$ ist (Bild b), beschreibt P einen Kreisbogen um M. Der inverse Punkt P' bewegt sich dann wie gefordert geradlinig.

Bemerkung: Konstruktionstechnisch sind zwei Nebenbedingungen zu beachten, wenn der Zeichenweg möglichst groß sein soll: Damit der Rhombus sich nicht an den Knien P, P' berührt oder „überschlägt“, sollte der Fall wie in Bild K.2b dargestellt vorliegen (d. h., der von P durchfahrene Kreisbogen sollte die von P' durchlaufene Strecke nicht berühren oder schneiden). Dies ist gleichbedeutend mit $OK = 2\,MP < r$. Außerdem kann man ihn nur so weit aufklappen, bis sich A und B berühren; P kommt dann in Punkt L zu liegen: $OL = OA - PA$. Der erreichbare Kreisbogen ist also KL sowie dessen Spiegelbild bezüglich des Durchmessers OK; die durchfahrbare Strecke $K'L'$ plus Spiegelbild (aus Platzgründen ist jeweils nur die Hälfte gezeichnet).

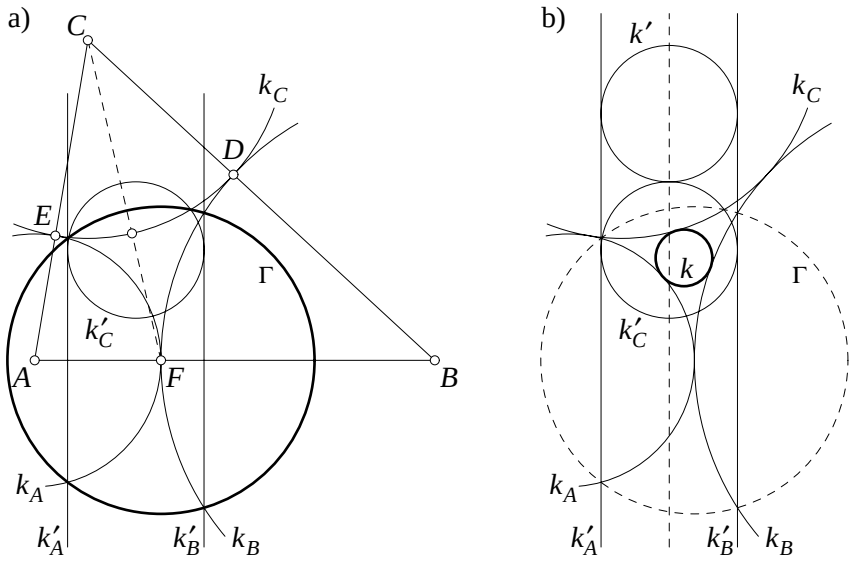
K.33 Das Problem besteht aus zwei Teilen: *1.* die drei Kreise k_A, k_B, k_C zu bestimmen und *2.* den Berührungskreis k zu finden. Bezeichnen wir im Teil *1* die Radien der drei Kreise mit r_A, r_B, r_C, so lassen sich nach Bild a) unmittelbar die Gleichungen

$$r_B + r_C = a, \qquad r_C + r_A = b, \qquad r_A + r_B = c$$

aufstellen, deren Lösung

$$r_A = \frac{1}{2}(b + c - a), \qquad r_B = \frac{1}{2}(c + a - b), \qquad r_C = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

ist (vgl. auch Aufgabe D.63 und Abschnitt G.1.1). Die Berührungspunkte D, E und F sind mithin leicht zu konstruieren; es zeigt sich, daß sie isotomische Punkte zu den Halbumfangspunkten (s. Abschnitt D.2, insbesondere Aufgabe D.39) sind.

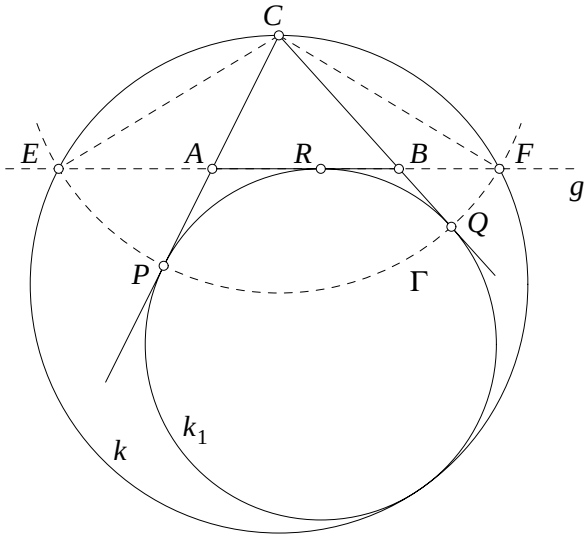


Im Teil *2* gilt es, einen geeigneten Inversionskreis zu finden, der das Berührungsproblem KKK auf ein Problem GGK vereinfacht (s. Abschnitt A.3). Dies erreichen wir jedoch nur, wenn zwei der ursprünglichen Kreise durch den Mittelpunkt des Inversionskreises Γ gehen (vgl. Bild K.2 b,c). Damit ist etwa F eine gute Wahl für den Mittelpunkt von Γ; sein Radius kann beliebig gewählt werden (Bild a). Die nunmehr bekannten Original-Kreise k_A, k_B, k_C gehen bei der Inversion in die parallelen Bild-Geraden k'_A, k'_B sowie den Bild-Kreis k'_C über. Letzterer muß nach dem Satz über die Invarianz der Schnittwinkel (vgl. Aufgabe K.23) die beiden Bild-Geraden tangieren (da sich die Original-Kreise ja berühren). Aus gleichem Grunde muß, da der gesuchte Kreis k die drei Original-Kreise berühren soll, sein Bild-Kreis k' die Bild-Geraden k'_A, k'_B und den Bild-Kreis k'_C tangieren (Bild b). k' zu finden ist nicht schwer; wir brauchen offensichtlich k'_C auf der Mittelparallelen von k'_A und k'_B nur so zu verschieben, daß sich beide berühren. Da es hierbei zwei Möglichkeiten gibt, existieren auch zwei Lösungen: einer der gesuchten Kreise tangiert die Original-Kreise von innen, der andere von außen.

K.35 *Beweis:* (Bild) P und Q seien die Berührungspunkte von k_1 mit den Seiten CA bzw. CB. Wegen

$$CP = CA + AR = CB + BR = CQ = s$$

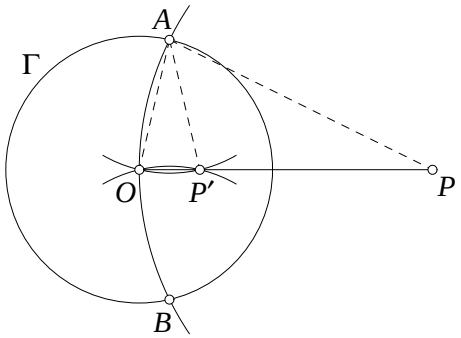
(vgl. Aufgabe **D.35**) liegen die vier Punkte E, P, Q und F auf einem Kreis $\Gamma \equiv C_s$. Nehmen wir diesen Kreis als Inversionskreis und bezeichnen mit i eine Inversion an Γ.



Dann ist, da $i(P) = P$ und $i(Q) = Q$, der Kreis k_1 orthogonal zu Γ und somit $i(k_1) = k_1$. Andererseits ist $i(E) = E$ und $i(F) = F$. Also ist $i(k) = g(A, B)$. Der Kreis k_1 berührt jedoch AB, mithin muß der Umkreis k den Kreis k_1 ebenfalls berühren. □

K.36 *Beweis:* (Bild) Betrachten wir zuerst den Fall, daß der gegebene Punkt P außerhalb von Γ liegt. Wir beschreiben den Kreisbogen P_O, der Γ in A und B schneidet. Um diese beiden Punkte schlagen wir Kreisbögen mit dem Radius r, welche sich (außer in O) in einem Punkte P' auf der Geraden OP schneiden.
Für die gleichschenkligen Dreiecke OAP und $OP'A$ gilt

$$\measuredangle OAP = \measuredangle POA = \measuredangle OP'A,$$



so daß die Dreiecke ähnlich sind und daher

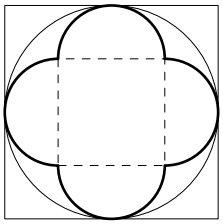
$$\frac{OP}{OA} = \frac{OA}{OP'}, \quad \text{oder} \quad OP \cdot OP' = r^2$$

ist. Somit ist P' der gesuchte inverse Punkt zu P.
Liegt dagegen P im Innern von Γ, behelfen wir uns mit folgendem Trick: Die Strecke OP wird vom Inversionszentrum ausgehend mit dem Zirkel so oft hintereinander abgetragen (wie das geht, vgl. Aufgabe **A.42**), bis wir zu einem Punkt Q außerhalb von Γ gelangen. Nach obiger Methode wird dessen inverser Punkt Q' konstruiert, und es gilt mit $n \in \mathbb{N}$:

$$r^2 = OQ' \cdot OQ = OQ' \cdot (n \cdot OP) = (n \cdot OQ') \cdot OP.$$

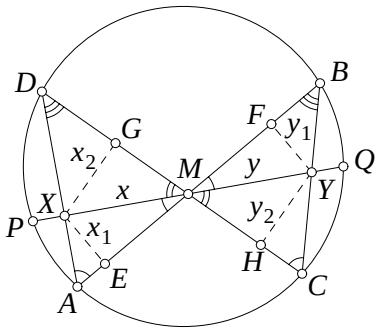
Mithin ist der Punkt P', für den $OP' = n \cdot OQ'$ ist, der gesuchte inverse Punkt. □

K.37 (Bild) Die Figur besteht aus vier Halbkreisbögen, die einem kleineren Quadrat im Innern aufgesetzt sind.



K.61 *Beweis:* (Bild) Wir fällen von X und Y die Lote x_1 und y_1 auf AB sowie x_2 und y_2 auf CD. Dadurch entstehen mehrere Paare ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke:

$$\triangle MEX \sim \triangle MFY, \quad \triangle MGX \sim \triangle MHY,$$
$$\triangle AEX \sim \triangle CHY, \quad \triangle DGX \sim \triangle BFY.$$



Mit den Abkürzungen $MP = MQ \equiv a$, $MX \equiv x$ und $MY \equiv y$ können wir nun folgende Gleichungen aufstellen:

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}, \quad \frac{x}{y} = \frac{x_2}{y_2}, \quad \frac{x_1}{y_2} = \frac{AX}{CY}, \quad \frac{x_2}{y_1} = \frac{XD}{YB},$$

aus denen mit Hilfe des Sehnensatzes

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1}{y_2} \cdot \frac{x_2}{y_1} = \frac{AX \cdot XD}{CY \cdot YB} = \frac{PX \cdot XQ}{PY \cdot YQ} = \frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)} = \frac{a^2-x^2}{a^2-y^2}$$

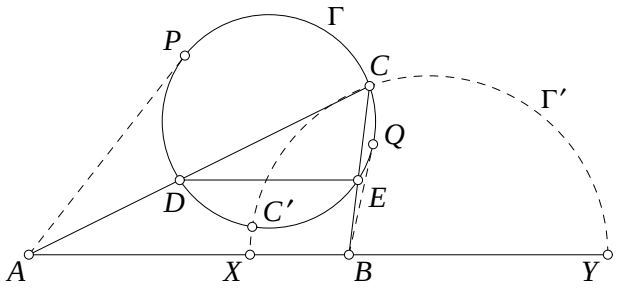
folgt. Betrachten wir in dieser Gleichungskette den ersten und letzten Term, folgt wie behauptet $x = y$. □

K.62 (Bild) $AP \equiv u$ und $BQ \equiv v$ seien die Tangentenabschnitte von A bzw. B an den Kreis Γ. Nach dem Sehnensatz gelten die Gleichungen $u^2 = AC \cdot AD$ und $v^2 = BC \cdot BE$, deren Division

$$\frac{u^2}{v^2} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AD}{BE}$$

ergibt. Da $DE \parallel AB$ gefordert ist, gilt außerdem $AC/BC = AD/BE$ und daher mit obiger Gleichung

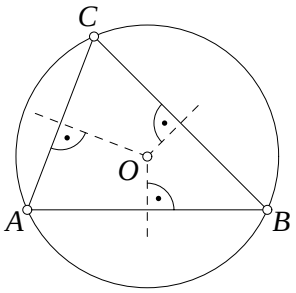
$$\frac{AC}{BC} = \frac{u}{v} \equiv q.$$



Nun sind A, B und Γ fest, so daß das Verhältnis q eine bekannte Konstante ist. Der geometrische Ort aller Punkte C, dessen Entfernungen von zwei Punkten A und B ein konstantes Verhältnis haben, ist der Kreis des Apollonius (vgl. Aufgabe A.22). Somit haben wir lediglich die Strecke AB innerlich und äußerlich im Verhältnis q zu teilen (s. *Bemerkung 2* zur Lösung von Aufgabe A.12), um die Punkte X und Y als Durchmesser des Apollonius-Kreises Γ' zu bestimmen. Die Schnittpunkte von Γ und Γ' sind also die gesuchten Punkte C (bzw. C'), wobei es sein kann, daß der zweite Schnittpunkt (im Bild C') herausfällt, da er keine weiteren Schnittpunkte D und E mit Γ zuläßt.

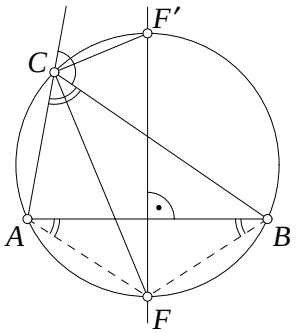
LÖSUNGEN: DREIECKE

D.1 *Beweis:* (Bild) Angenommen, O sei der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten AB und BC. Dann bleibt zu zeigen, daß die dritte Mittelsenkrechte ebenfalls durch O geht. Nun ist O gleich weit von den Punkten A und B entfernt: $OA = OB$. Wir nutzen dabei den geometrischen Ort „Mittelsenkrechte“, indem wir sagen: Wenn O auf der Mittelsenkrechten von AB liegt, dann sind seine Abstände zu A und B untereinander gleich (vgl. Punkt *2* aus Abschnitt A.2). Ebenso gilt $OB = OC$. Aus beiden Gleichungen folgt $OA = OC$. Jetzt nehmen wir die Umkehrung: Wenn die Abstände von O zu A bzw. C gleich sind, muß O auf der Mittelsenkrechten von AC liegen, und sind damit schon fertig. □



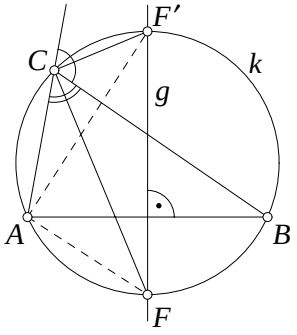
D.2 *Beweis:* (Bild) Da F auf der Mittelsenkrechten von AB liegt, ist $\triangle AFB$ ein gleichschenkliges Dreieck. Daraus folgt, daß dessen Basiswinkel $\measuredangle ABF$ und $\measuredangle BAF$ einander gleich sind. Diese sind aber wegen $AF = BF$ gleichzeitig Peripheriewinkel über den gleichen Bögen AF und BF. Nach dem Peripheriewinkelsatz ist somit

$$\measuredangle ACF = \measuredangle ABF = \frac{\gamma}{2}, \qquad \measuredangle BCF = \measuredangle BAF = \frac{\gamma}{2},$$



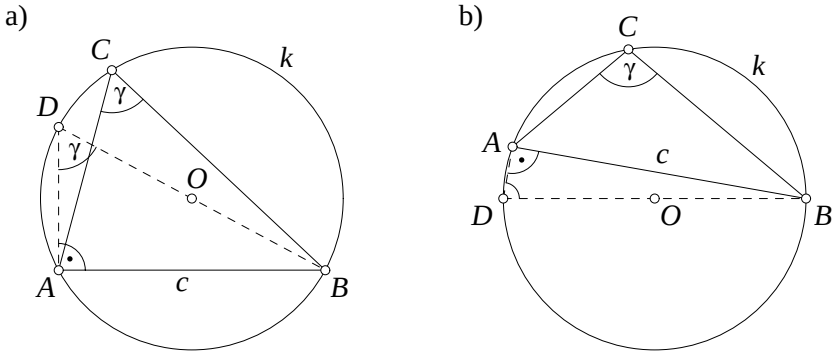
d. h., die Strecke CF ist tatsächlich Winkelhalbierende von $\measuredangle ACB \equiv \gamma$. Da ferner die Mittelsenkrechte einer Sehne stets durch den Mittelpunkt des Kreises geht, ist FF' ein Durchmesser und somit $\triangle FCF'$ nach dem Satz des Thales ein rechtwinkliges Dreieck. CF' steht also senkrecht auf der Winkelhalbierenden CF und ist damit Winkelhalbierende des Außenwinkels von γ (s. Aufgabe D.7). □

D.3 *Beweis:* (Bild) Jetzt seien F und F' die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten von AB mit der inneren und äußeren Winkelhalbierenden von $\measuredangle ACB \equiv \gamma$. Dann muß der Umkreismittelpunkt von $\triangle ABC$ auf der Geraden $g(F, F')$ liegen und irgendeine Strecke auf g gleich dem Durchmesser des Umkreises sein. Nun ist nach Aufgabe D.7 $\measuredangle FCF' = 90°$; somit geht der Thales-Kreis k über FF' durch Eckpunkt C. Gleichzeitig geht k durch A (und wegen der Symmetrie auch durch B) und ist somit gerade der Umkreis. Mithin liegen die Schnittpunkte F und F' auf dem Umkreis. □



D.4 *Auflösung:* Wie wir sicherlich schon erkannt haben, liegt der Schnittpunkt D nicht im Innern des Dreiecks, sondern auf dem Umkreis außerhalb von $\triangle ABC$.

D.5 *Beweis:* Wir betrachten sowohl ein spitzwinkliges Dreieck (Bild a) als auch ein stumpfwinkliges Dreieck (Bild b) und zeichnen jeweils den Durchmesser BD und die Sehne



AD des Umkreises k in unsere Planfigur ein. In beiden Fällen bemerken wir, daß $\measuredangle BAD$ ein Rechter ist, da er einem Halbkreis einbeschrieben ist. Es gilt somit

$$\sin(\measuredangle BDA) \equiv \sin\gamma = \frac{c}{BD} = \frac{c}{2R}. \tag{D.101}$$

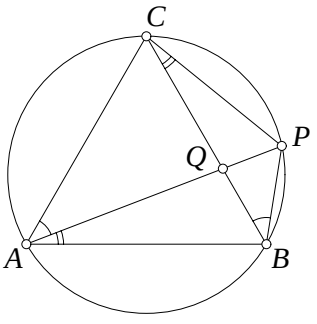
Dabei ist in Bild a) nach dem Peripheriewinkelsatz $\measuredangle BDA = \measuredangle BCA = \gamma$; in Bild b) $\measuredangle BDA = 180° - \measuredangle BCA = 180° - \gamma$, da sich gegenüberliegende Winkel im Sehnenviereck $ADBC$ zu 180° ergänzen. Wegen $\sin\gamma = \sin(180° - \gamma)$ ist also in beiden Fällen $\sin(\measuredangle BDA) = \sin(\measuredangle BCA)$. (D.101) umgestellt ergibt mithin

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Die gleiche Prozedur auf die beiden anderen Winkel des $\triangle ABC$ angewandt, ergibt die Behauptung. □

Bemerkung: Wir sollten uns beim Sinussatz also nicht nur die Tatsache merken, daß in einem Dreieck der Quotient aus Seitenlänge und Sinus des gegenüberliegenden Winkels konstant ist, sondern auch die Größe dieser Konstante, nämlich $2R$, den Durchmesser des Umkreises des Dreiecks.

D.6 *Beweis:* (Bild) $ABPC$ ist ein Sehnenviereck, dessen Diagonalen sich in Q schneiden und die das Viereck in vier Dreiecke zerlegen. Dann sind die jeweils gegenüberliegenden Dreiecke ähnlich (vgl. Aufgabe V.23): $\triangle BPQ \sim \triangle ACQ$, $\triangle CPQ \sim \triangle ABQ$. a) Daher können wir mit $AB = BC = CA \equiv a$ folgende Verhältnisgleichungen aufstellen: $PQ/PB = CQ/a$ und $PQ/PC = BQ/a$, deren Addition

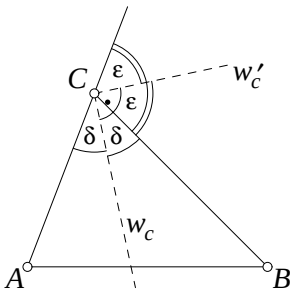


$$\frac{PQ}{PB} + \frac{PQ}{PC} = \frac{CQ + BQ}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

ergibt. Anschließende Division durch PQ führt auf die Behauptung. b) Der zweite Teil läßt sich am einfachsten mit dem Satz des Ptolemäus (s. Aufgabe V.26) zeigen: Aus $AC \cdot PB + AB \cdot PC = BC \cdot PA$ folgt nach Division durch a die behauptete Gleichung. □

D.7 *Beweis:* (Bild) Die Winkelhalbierende w_c teilt den Innenwinkel $2\,\delta$ zwischen den Seiten CA und CB, w_c' den zugehörigen Außenwinkel $2\,\varepsilon$ in zwei Hälften. Da beides Nebenwinkel und daher Supplementwinkel sind, also $2(\delta+\varepsilon) = 180°$ gilt, folgt daraus

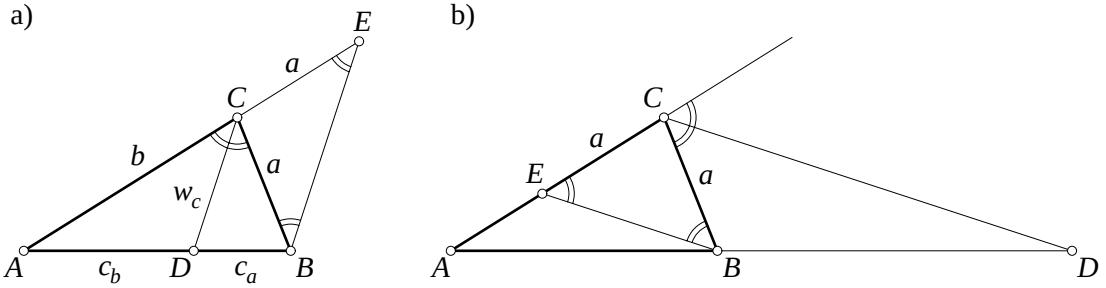
$$\delta + \varepsilon = 90°.$$



Dies ist genau der Winkel zwischen den beiden Winkelhalbierenden w_c und w_c'. □

Bemerkung: Diese Winkelbeziehung besteht natürlich ganz allgemein zwischen zwei sich schneidenden Geraden; wir hätten also eigentlich kein Dreieck benötigt.

D.8 *Beweis:* Die Winkelhalbierende w_c teilt die Seite $AB = c$ innerlich im Punkt D in die Abschnitte c_a und c_b (Bild a). Tragen wir nun die Länge der Seite $CB = a$ auf $g(A, C)$ über C hinaus ab, so erhalten wir Punkt E. Im gleichschenkligen $\triangle BCE$ ist dann der Innenwinkel an dessen Eckpunkt C Nebenwinkel zu $\measuredangle ACB = \gamma$; beträgt also $180°-\gamma$. Mit der Winkelsumme $180°$ folgt damit für die Basiswinkel $\measuredangle EBC = \measuredangle BEC = \frac{1}{2}\gamma$. Mithin



sind $\measuredangle ACD = \measuredangle AEB$ gleiche Stufenwinkel, d. h., EB ist parallel zu CD. Die Behauptung folgt nun direkt aus der Anwendung des 1. Strahlensatzes:

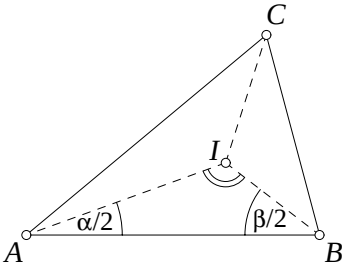
$$\frac{c_a}{c_b} = \frac{DB}{DA} = \frac{CE}{CA} = \frac{a}{b}.$$

Auch im Fall der Winkelhalbierenden des Außenwinkels CD (Bild b) finden wir mit $CE = a$, daß $EB \parallel CD$ ist und damit

$$\frac{DB}{DA} = \frac{CE}{CA} = \frac{a}{b}. \quad \square$$

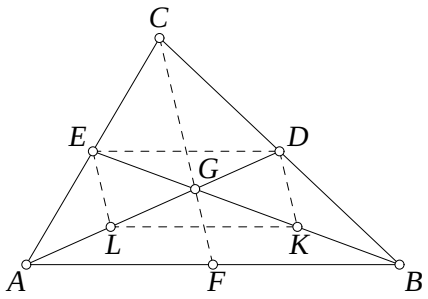
D.9 *Beweis:* (Bild) Der Inkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, so daß im $\triangle AIB$ gilt: $\measuredangle IAB = \frac{1}{2}\alpha$ und $\measuredangle IBA = \frac{1}{2}\beta$. Für den betrachteten Winkel $\measuredangle AIB$ gilt unter Beachtung der Innenwinkelsumme in den Dreiecken AIB und ABC:

$$\begin{aligned}\measuredangle AIB &= 180° - \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \gamma)\\ &= 90° + \frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$



Die gleichen Betrachtungen lassen sich natürlich auch für die anderen Seiten anstellen, woraus $\measuredangle AIC = 90° + \frac{1}{2}\beta$ bzw. $\measuredangle BIC = 90° + \frac{1}{2}\alpha$ folgt. □

D.10 *Beweis:* (Bild) G sei der Schnittpunkt der beiden Seitenhalbierenden AD und BE. Die Dreiecke ACB und ECD sind ähnlich, da sie den Winkel bei C gemeinsam haben und



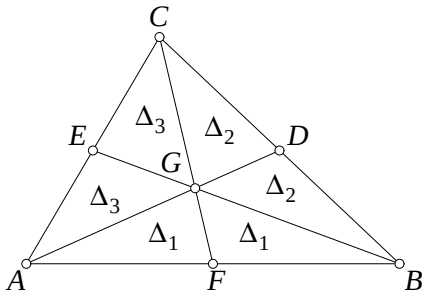
$$\frac{CE}{CA} = \frac{CD}{CB} = \frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{CE}{CD} = \frac{CA}{CB}$$

gilt. Mithin sind auch die Winkel $\measuredangle CED$ und $\measuredangle CAB$ gleich (Stufenwinkel), d. h. ED ist parallel zu AB und nach dem 2. Strahlensatz halb so groß wie die Grundseite AB. Weiterhin seien L und K die Mittelpunkte der Strecken AG und BG. Dann folgt aus den vorangegangenen Überlegungen, jetzt bezogen auf das $\triangle ABG$, daß $LK \parallel AB$ und $LK = \frac{1}{2}AB = ED$ ist. Das Viereck $EDKL$ ist somit ein Parallelogramm. Da sich die Diagonalen in einem Parallelogramm stets halbieren, gilt

$$DG = GL = LA, \quad EG = GK = KB \qquad \text{bzw.} \qquad DG = \frac{1}{3}AD, \quad EG = \frac{1}{3}BE.$$

Somit teilt G die beiden Seitenhalbierenden AD und BE im Verhältnis $2:1$, wobei das längere Teilstück die Entfernung zum jeweiligen Eckpunkt ist. Ebenso läßt sich zeigen, daß der gleiche Punkt G Schnittpunkt eines der beiden anderen Paare von Seitenhalbierenden, etwa von BE und CF ist. Damit ist der Schwerpunkt G als gemeinsamer Schnittpunkt aller drei Seitenhalbierenden nachgewiesen. □

D.11 *Beweis:* (Bild) Die Teildreiecke haben die Flächeninhalte $\Delta_i, i = 1, 2, 3$. Ganz offensichtlich ist dann



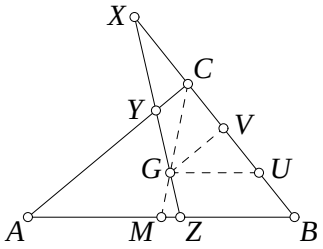
$$[AFG] = [BFG] = \Delta_1, \quad [BDG] = [CDG] = \Delta_2,$$
$$[CEG] = [AEG] = \Delta_3,$$

da paarweise jeweils gleiche Grundseiten und gleiche Höhen vorliegen und daher unsere Bezeichnung gerechtfertigt ist. Außerdem gilt

$$[AFC] = \Delta_1 + 2\Delta_3 = [BFC] = \Delta_1 + 2\Delta_2,$$

woraus $\Delta_2 = \Delta_3$ folgt. Völlig analog beweisen wir $\Delta_1 = \Delta_2$. □
Bemerkung: Dies ist schon ein Vorgeschmack auf das *Flächenprinzip* (s. Abschnitt M.4).

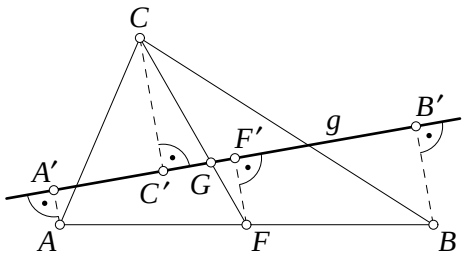
D.12 *Beweis:* (Bild) Wir erinnern uns daran, daß G die Seitenhalbierende CM im Verhältnis $2:1$ teilt und dritteln daher die Seite BC durch die Punkte U, V so, daß $BU = UV = VC$ gilt. Dann ist wegen $CG : CM = CU : CB = 2 : 3$ nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes $GU \parallel AB$ und ebenso $GV \parallel AC$. Weiterhin gilt nach dem 1. Strahlensatz mit $UV = VC = -UB$:



$$GX\left(\frac{1}{GX} + \frac{1}{GY} + \frac{1}{GZ}\right) = 1 + \frac{VX}{VC} + \frac{UX}{UB} = 1 + \frac{VX - UX}{VC} = 1 + \frac{VU}{UV} = 0,$$

also nach Division durch GX die behauptete Gleichung. □

D.13 *Beweis:* (Bild) Die Lotfußpunkte der Ecken A, B, C auf der Geraden g bezeichnen wir mit A', B' bzw. C'; die Seitenmitte von AB mit F. Dann ist $AA'B'B$ offensichtlich ein Trapez und FF' dessen Mittellinie. Deren Länge beträgt $FF' = \frac{1}{2}(AA' + BB')$. Desweiteren sind die rechtwinkligen Dreiecke $CC'G$ und $FF'G$ einander ähnlich; ferner teilt der Schwerpunkt G die Seitenhalbierende CF im Verhältnis $2:1$. Somit gilt auch $CC' = 2FF' = AA' + BB'$. □



Bemerkung: Im Falle, daß g durch einen Eckpunkt (etwa A) geht, gilt: $BB' = CC'$ (vgl. Aufgabe D.11).

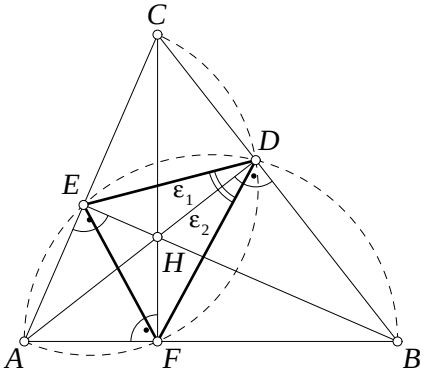
D.21 *Beweis:* (Bild) Die Punkte D, E, F seien die Fußpunkte der Höhen im $\triangle ABC$, und $\triangle DEF$ ist damit das Höhenfußpunktdreieck. Da die Winkel $\measuredangle AEB = \measuredangle ADB$ Rechte sind, liegen die Punkte D, E auf dem Thales-Kreis über dem Durchmesser AB, d. h., das Viereck $AEDB$ ist ein Sehnenviereck. Bezeichnen wir $\measuredangle ADE = \varepsilon_1$ und $\measuredangle ADF = \varepsilon_2$, so gilt, da sich gegenüberliegende Winkel in einem Sehnenviereck zu 180° ergänzen (vgl. Aufgabe V.21):

$$\measuredangle EAB + \measuredangle EDB = \measuredangle EAB + \varepsilon_1 + 90° = 180°.$$

Ebenso ist $CDFA$ ein Sehnenviereck mit

$$\measuredangle CAF + \measuredangle CDF = \measuredangle CAF + \varepsilon_2 + 90° = 180°.$$

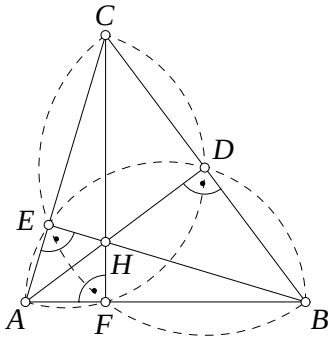
Wegen $\measuredangle EAB = \measuredangle CAF$ folgt aus beiden Gleichungen $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, d. h., die Höhe AD ist Winkelhalbierende im Höhenfußpunktdreieck DEF. Ebenso beweisen wir $\measuredangle BEF = \measuredangle BED$ und $\measuredangle CFD = \measuredangle CFE$. Mithin ist H als Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden in $\triangle DEF$ dessen Inkreismittelpunkt. □



D.22 *Beweis:* (Bild) Wie wir in Aufgabe D.21 gesehen haben, sind die Vierecke $AEDB$, $BFEC$ und $CDFA$ Sehnenvierecke, in denen die Höhen AD, BE bzw. CF paarweise Sehnen sind und die sich darüber hinaus im Höhenschnittpunkt H schneiden. Die behaupteten Gleichungen

$$HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF$$

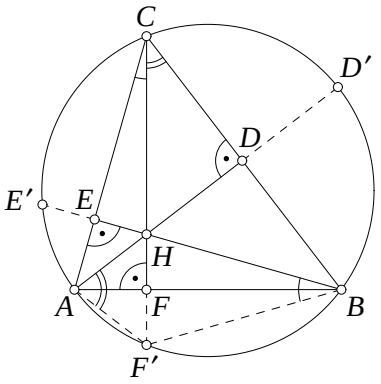
folgen dann direkt aus der Anwendung des Sehnensatzes (vgl. Aufgabe K.11).



D.23 *Beweis:* (Bild) Die Höhenfußpunkte seien D, E, F, die gespiegelten Punkte entsprechend D', E', F'. Es genügt nachzuweisen, daß

$$\measuredangle ACB + \measuredangle AF'B = 180^\circ$$

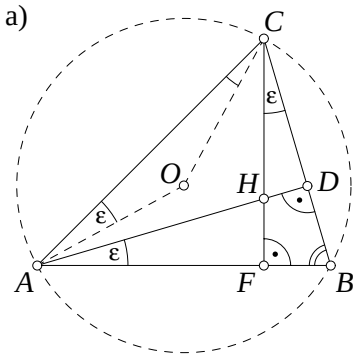
gilt. Offenbar sind $\triangle AFH$ und $\triangle CDH$ ähnliche Dreiecke (zwei gleiche Winkel), ebenso ist $\triangle BFH \sim \triangle CEH$. Außerdem ist wegen $HF = FF'$ und $AB \perp HF'$ das Viereck $AF'BH$ ein Drachenviereck. Somit ergibt sich

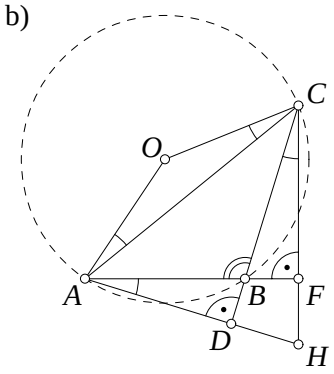


$$\begin{aligned}\measuredangle ACB &= \measuredangle ECH + \measuredangle DCH = \measuredangle FBH + \measuredangle FAH \\ &= \measuredangle FBF' + \measuredangle FAF' = 180^\circ - \measuredangle AF'B.\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß F' auf dem Umkreis von $\triangle ABC$ liegt; gleiches folgt für die beiden anderen Punkte D' und E'. □

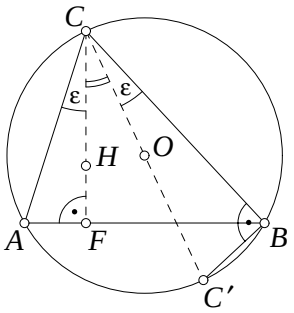
D.24 *Beweis:* (Bild) Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden; a) $\triangle ABC$ ist spitzwinklig und b) $\triangle ABC$ hat einen stumpfen Innenwinkel, so daß der Höhenschnittpunkt H bekanntlich außerhalb des Dreiecks liegt. Bezeichnen wir $\measuredangle HAB = \measuredangle DAB = \varepsilon$, so können wir im ersten Fall wie folgt schließen (Bild a): $\triangle BDA$ ist rechtwinklig, also ist $\measuredangle ABD = \measuredangle ABC = 90^\circ - \varepsilon$. Letzterer ist Peripheriewinkel über der Sehne AC des Umkreises, somit ist der zugehörige Zentriwinkel doppelt so groß: $\measuredangle AOC = 2\measuredangle ABC = 180^\circ - 2\varepsilon$. Da $\triangle AOC$ gleichschenklig ist, sind die Basiswinkel dieses Dreiecks nach dem Innenwinkel-





satz $\measuredangle OAC = \measuredangle OCA = \frac{1}{2}[180^\circ - (180^\circ - 2\varepsilon)] = \varepsilon$. Im Falle eines stumpfwinkligen Dreiecks sei $\measuredangle HAB = \measuredangle DAB = \varepsilon$ (Bild b). Der Außenwinkel $\measuredangle ABC$ des rechtwinkligen $\triangle BDA$ beträgt somit $90^\circ + \varepsilon$ und ist gleichzeitig Peripheriewinkel von AC, der nicht auf derselben Seite wie der Zentriwinkel $\measuredangle AOC$ liegt. Daher ist $\measuredangle AOC = 360^\circ - 2\measuredangle ABC = 180^\circ - 2\varepsilon$. Wie in a) ist $\triangle AOC$ gleichschenklig, damit gilt $\measuredangle OAC = \varepsilon = \measuredangle HAB$. □

D.25 *Beweis:* (Bild) Wir bezeichnen den Höhenfußpunkt von C auf der Seite AB mit F; CC' sei ein Durchmesser des Umkreises. Dann ist es nicht schwer zu bemerken, daß die Dreiecke CAF und $CC'B$ ähnlich sind: Beide sind rechtwinklig (letzteres da CC' ein Durchmesser ist) und haben gleiche Peripheriewinkel über der Sehne BC; somit gilt für den dritten Winkel



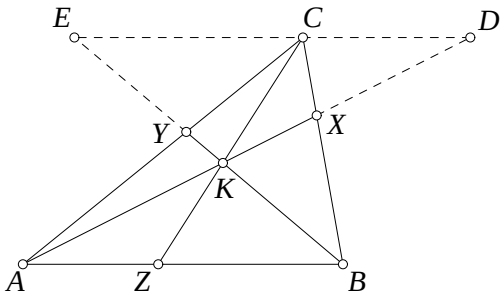
$$\varepsilon \equiv \measuredangle ACH = 90^\circ - \alpha = \measuredangle C'CB.$$

Wegen $\measuredangle ACB = \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ errechnen wir für den betrachteten Winkel

$$\measuredangle HCO = \gamma - 2\varepsilon = 180^\circ - \alpha - \beta - 180^\circ + 2\alpha = \alpha - \beta.$$

Damit der Beweis auch im Fall $\alpha < \beta$ gültig bleibt, schreiben wir $\measuredangle HCO = |\alpha - \beta|$. □

D.31 *Beweis:* (Bild) Der gemeinsame Schnittpunkt der Ecktransversalen sei K. Wir zeichnen die Parallele zu $g(A, B)$ durch C und bringen diese mit den Verlängerungen der Transversalen AX und BY zum Schnitt; es entstehen die Punkte D und E. Damit erhalten wir folgende Paare ähnlicher Dreiecke:



$$\triangle ABY \sim \triangle CEY, \quad \triangle BAX \sim \triangle CDX,$$

$$\triangle CEK \sim \triangle ZBK, \quad \triangle CDK \sim \triangle ZAK.$$

Mit Hilfe der Strahlensätze können wir nun daraus in dieser Reihenfolge die Proportionen

$$\frac{CY}{YA} = \frac{CE}{AB}, \qquad \frac{BX}{XC} = \frac{AB}{CD}, \qquad \frac{ZB}{CE} = \frac{ZK}{CK} = \frac{AZ}{CD} \quad \text{oder} \quad \frac{AZ}{ZB} = \frac{CD}{CE}$$

ablesen. Die Behauptung folgt schließlich, wenn wir diese Gleichungen miteinander multiplizieren:

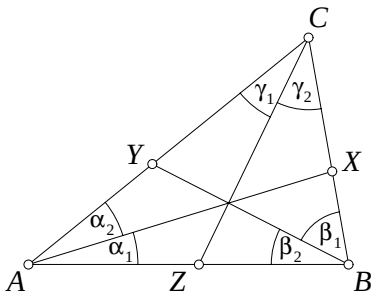
$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{CD}{CE} \cdot \frac{AB}{CD} \cdot \frac{CE}{AB} = 1. \ \square$$

D.32 (Bild) Bezeichnen wir die Winkel $\alpha_1, \ldots, \gamma_2$ wie im Bild gezeigt, so finden wir für AZ und ZB mit Hilfe des Sinussatzes

$$AZ = CZ\,\frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha}, \quad ZB = CZ\,\frac{\sin\gamma_2}{\sin\beta},$$

somit

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$



Analog erhalten wir (durch zyklische Vertauschung)

$$\frac{BX}{XC} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}, \quad \frac{CY}{YA} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

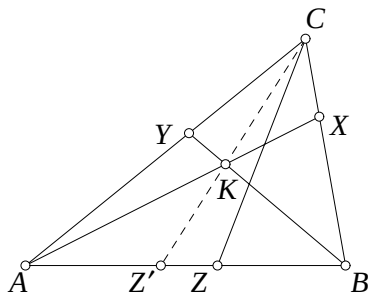
Die CEVAsche Gleichung (D.2) schreibt sich dann als

$$\frac{\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1}{\sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2} = 1. \tag{D.102}$$

D.33 *Beweis:* (Bild) Wir führen den Beweis indirekt, indem wir annehmen, daß

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$

erfüllt ist, wenn eine der Ecktransversalen CZ *nicht* durch den Schnittpunkt K der beiden anderen geht. Dann ziehen wir die Ecktransversale, die durch K geht, und die AB in Z' schneiden möge. Dann sagt uns der Satz von CEVA, daß



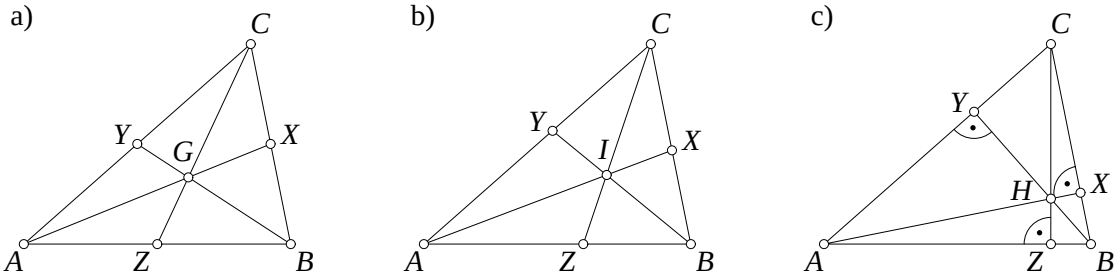
$$\frac{AZ'}{Z'B} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$

gilt. Beide Gleichungen lassen sich jedoch wegen $AZ+ZB = AZ'+Z'B$ nur für $AZ/ZB = AZ'/Z'B$, also $AZ = AZ'$ und $ZB = Z'B$ bzw. $Z = Z'$ erfüllen, was im Widerspruch zu unserer Annahme $Z \neq Z'$ steht. □

D.34 *Beweis:* a) Sind die Punkte X, Y, Z die Seitenmitten von BC, CA, AB (Bild a), so ist jeder Teilungsfaktor

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{BX}{XC} = \frac{CY}{YA} = 1, \quad \text{somit auch} \quad \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1.$$

Nach der Umkehrung des Satzes von CEVA schneiden sich die drei Seitenhalbierenden in einem Punkt. □ b) Bezeichnen jetzt X, Y, Z die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden



mit deren gegenüberliegenden Seiten und wie üblich $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ (Bild b), so gilt nach dem Satz aus Aufgabe D.8

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{b}{a}, \quad \frac{BX}{XC} = \frac{c}{b}, \quad \frac{CY}{YA} = \frac{a}{c}, \quad \text{also} \quad \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{bca}{abc} = 1, \tag{D.103}$$

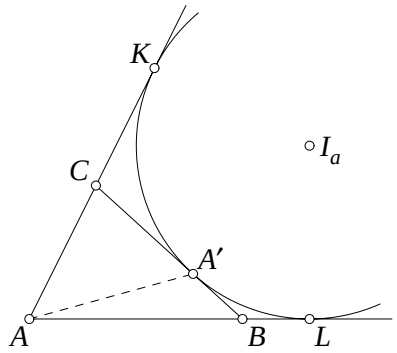
so daß sich die drei Winkelhalbierenden ebenfalls in einem Punkt schneiden. □ c) Hier seien X, Y, Z die Höhenfußpunkte auf BC, CA, AB (Bild c). Dann sind die rechtwinkligen Dreiecke CZB und AXB ähnlich, da sie außer dem Rechten den Winkel $\measuredangle ABC$ gemeinsam haben, also in allen drei Winkeln übereinstimmen. Somit gilt

$$\frac{ZB}{CB} = \frac{BX}{AB} \quad \text{oder} \quad \frac{BX}{ZB} = \frac{AB}{CB} = \frac{c}{a}.$$

Analog folgt $\triangle AXC \sim \triangle BYC$ bzw. $\triangle BYA \sim \triangle CZA$ und daraus $CY/XC = a/b$ sowie $AZ/YA = b/c$. Die Multiplikation dieser drei Verhältnisgleichungen liefert wiederum (D.103); damit schneiden sich auch die Höhen in einem gemeinsamen Punkt. □

D.35 *Beweis:* (Bild) Wir zeigen die Behauptung an einem Ankreis: Sei A' der Berührungspunkt des Ankreises (Mittelpunkt I_a) mit der Seite BC; K, L diejenigen mit den (verlängerten) Seiten AC bzw. AB. Dadurch, daß wir drei Tangenten an den Ankreis haben, liegen mehrere gleiche Tangentenabschnitte vor:

$$AK = AL, \quad CK = CA', \quad BL = BA'.$$



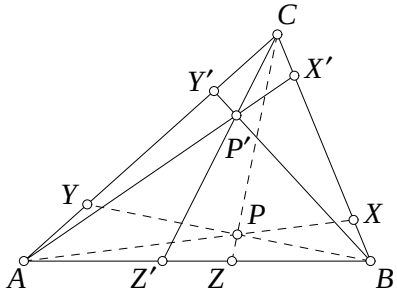
Somit ist

$$AK = AC + CK = AC + CA'$$
$$= AL = AB + BL = AB + BA',$$

also $AB + BA' = AC + CA'$. Völlig ähnlich sind die Längenverhältnisse bezüglich der anderen Ankreise. □

D.36 *Beweis:* (Bild) Die im Satz von Ceva auftretende Gleichung ist so universell, daß sie auch bestehen bleibt, wenn wir auf beiden Seiten die Kehrwerte bilden:

$$\frac{ZB}{AZ} \cdot \frac{XC}{BX} \cdot \frac{YA}{CY} = 1.$$



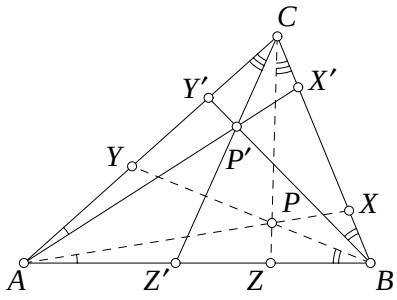
Für die isotomischen Punkte X', Y', Z' gilt nun bekanntermaßen $ZB = AZ'$, $AZ = ZB'$, usw. so daß wir daraus

$$\frac{AZ'}{Z'B} \cdot \frac{BX'}{X'C} \cdot \frac{CY'}{Y'A} = 1$$

erhalten. Dies ist nach der Umkehrung des Satzes von Ceva genau die Bedingung dafür, daß sich die isotomischen Geraden ebenfalls in einem Punkt treffen. □

D.37 *Beweis:* (Bild) Betrachten wir anstelle der Ecktransversalen AX, BY, CZ deren isogonale Gegenstücke AX', BY', CZ', so gilt nach Definition

$$\measuredangle BAX = \measuredangle X'AC,$$
$$\measuredangle CBY' = \measuredangle YBA,$$
$$\measuredangle ACZ' = \measuredangle ZCB.$$

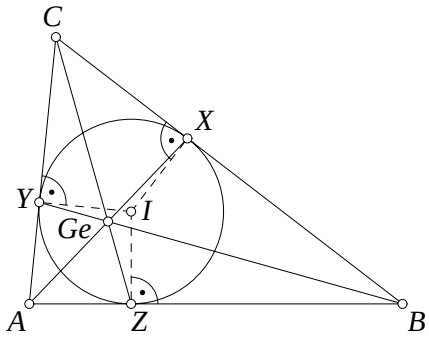


Für die trigonometrische Form (D.102) der Cevaschen Gleichung (vgl. Aufgabe D.32),

$$\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1 = \sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2,$$

bedeutet das eine Vertauschung der Winkel α_1, β_1, γ_1 mit den Winkeln α_2, β_2, γ_2, welche die Bedingung natürlich unverändert läßt. □

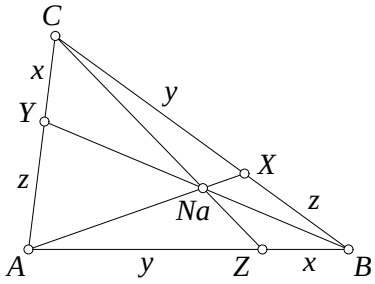
D.38 *Beweis:* (Bild) Zunächst gilt offensichtlich stets $AZ \cdot BX \cdot CY = BX \cdot CY \cdot AZ$, unabhängig davon, welche Bedeutung diese Strecken haben. Nun sind X, Y, Z die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten, folglich sind AZ und YA gleich lange Tangentenabschnitte; ebenso gilt $BX = ZB$ und $CY = XC$. Setzen wir diese Beziehungen in obige Gleichung ein, erhalten wir



$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Nach der Umkehrung des Satzes von Ceva folgt somit die Behauptung. □

D.39 *Beweis:* (Bild) Da die Berührungspunkte der Ankreise und die Halbumfangspunkte zusammenfallen, genügt es, hier nur letztere zu betrachten. Die Bedingung dafür, daß z. B. Punkt X auf der Seite BC gerade auf halbem Umfange liegt, ist $c + BX = XC + b$; andererseits ist $BX + XC = a$. Dieses einfache lineare Gleichungssystem hat die Lösung



$$BX = \frac{1}{2}(a + b - c) = s - c \equiv z,$$

$$XC = \frac{1}{2}(c + a - b) = s - b \equiv y.$$

Analog gilt für die anderen Halbumfangspunkte Y, Z:

$$CY = \frac{1}{2}(b + c - a) = s - a \equiv x, \qquad YA = z, \qquad AZ = y, \qquad ZB = x.$$

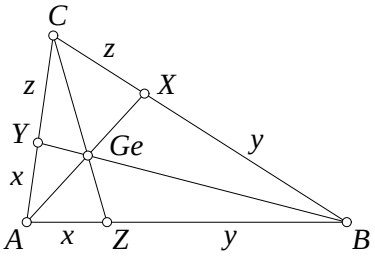
Fügen wir diese Ergebnisse zusammen, ergibt sich

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{y}{x} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z} = 1,$$

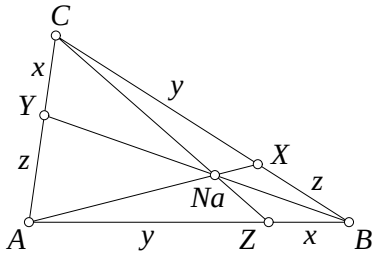
womit nach der Umkehrung des Satzes von Ceva die Behauptung folgt. □
Bemerkung: Bezüglich der Größen x, y, z vgl. auch Aufgabe D.63 sowie Abschnitt G.1.1.

D.40 *Beweis:* Wie aus beiden Bildern zu erkennen ist, sind die Abschnitte x und y auf der Seite AB gerade vertauscht; gleiches gilt auch auf den anderen Dreieckseiten. Dies

a)



b)



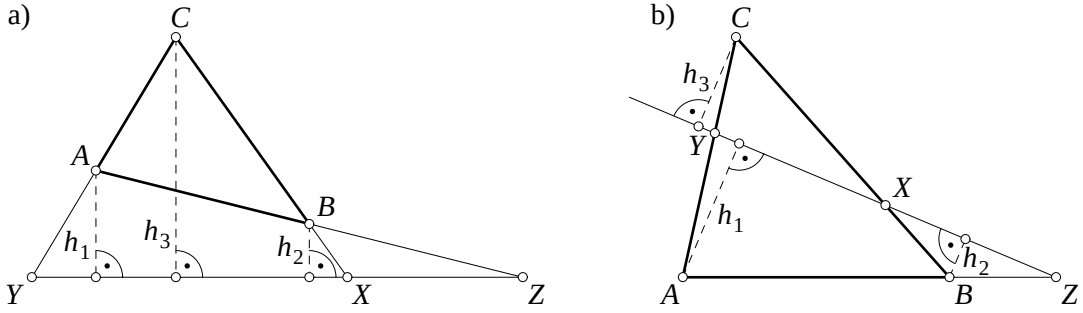
sind aber genau die Bedingungen dafür, daß die zugehörigen Ecktransversalen isotomisch konjugiert sind. □

D.41 *Beweis:* Die Symmedianen sind die isogonalen Geraden zu den Seitenhalbierenden. Da sich letztere im Schwerpunkt schneiden, müssen sich die Symmedianen nach Aufgabe D.37 auch in einem Punkt treffen. □
Bemerkung: Dieser Satz könnte auch so formuliert werden:

In einem Dreieck sind der Schwerpunkt und der Lémoine-Punkt isogonal konjugierte Punkte.

D.42 Aus Aufgabe D.24 ist uns bekannt, daß z. B. der Winkel $\measuredangle HAB$ gleich dem Winkel $\measuredangle OAC$ ist; die Geraden AH und AO somit isogonale Geraden sind. Gleiches gilt auch für die Paare BH, BO und CH, CO. Der Höhenschnittpunkt und der Umkreismittelpunkt sind demnach isogonal konjugierte Punkte.

D.43 *Beweis:* Wenn eine Gerade die Seiten eines Dreiecks (bzw. deren Verlängerungen) schneidet, so kann dieses nur geschehen, indem entweder *keine* Seite direkt geschnitten wird (Fall *1*, Bild a) oder *zwei* Seiten innere Schnittpunkte mit der Geraden haben (Fall *2*, Bild b). Anders ausgedrückt, müssen entweder alle drei Seiten oder nur eine Dreieckseite



verlängert werden. In beiden Fällen bezeichnen wir mit h_1, h_2, h_3 die Längen der Lote von den Eckpunkten A, B, C des Dreiecks auf die Gerade $g(Y,Z)$. Die Strahlensätze liefern uns nun unter Berücksichtigung des Vorzeichens (positives bei innerer, negatives bei äußerer Teilung) folgende Gleichungen

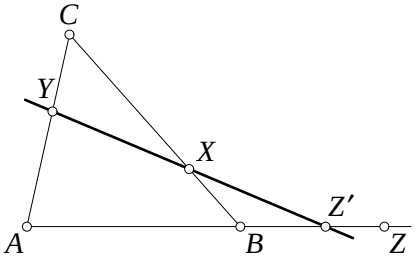
$$\text{Fall } 1\text{:}\quad \frac{AZ}{ZB} = -\frac{h_1}{h_2}, \qquad \frac{BX}{XC} = -\frac{h_2}{h_3}, \qquad \frac{CY}{YA} = -\frac{h_3}{h_1},$$

$$\text{Fall } 2\text{:}\quad \frac{AZ}{ZB} = -\frac{h_1}{h_2}, \qquad \frac{BX}{XC} = \frac{h_2}{h_3}, \qquad \frac{CY}{YA} = \frac{h_3}{h_1},$$

die jeweils miteinander multipliziert direkt die behauptete Gleichung ergeben:

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA} = -\frac{h_1\cdot h_2\cdot h_3}{h_2\cdot h_3\cdot h_1} = -1. \ \square$$

D.44 *Beweis:* (Bild) X, Y und Z seien drei Punkte, jeder auf einer Seite des Dreiecks ABC, für die das Produkt der Verhältnisse gleich -1 sei. Außerdem schneide XY die Seite AB in Z'. Zu zeigen ist also $Z' = Z$. Der Satz von Menelaus fordert nun



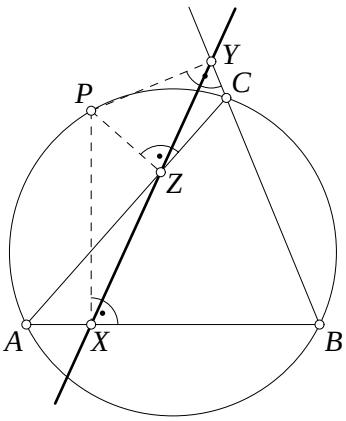
$$\frac{AZ'}{Z'B}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=-1,$$

was jedoch

$$\frac{AZ'}{Z'B}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA},\quad \frac{AZ'}{Z'B}=\frac{AZ}{ZB},\quad \frac{AZ'+Z'B}{Z'B}=\frac{AZ+ZB}{ZB}$$

bedeutet. Wegen $AB=AZ'+Z'B=AZ+ZB$ muß aber $Z'B=ZB$ bzw. $Z'=Z$ sein, d. h., X, Y und Z sind kollinear. □

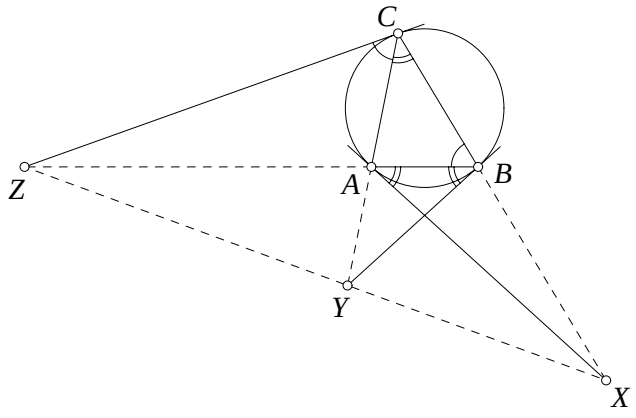
D.45 *Beweis:* (Bild) Nach Voraussetzung sind PX, PY die Lote auf AB, BC (bzw. auf deren Verlängerungen), also gilt $\measuredangle BXP=\measuredangle BYP=90°$, und $XBYP$ ist somit ein Sehnenviereck. Ebenso folgt aus $\measuredangle CZP=\measuredangle CYP=90°$, daß $CYPZ$ ein Sehnenviereck ist. Schließlich ist auch $ABCP$ ein Sehnenviereck. Nun kann unter Verwendung des Peripheriewinkelsatzes folgende Gleichungskette aufgestellt werden:



$$\begin{aligned}\measuredangle XYP&=\measuredangle XBP\ \text{(Peripheriewinkel über } XP)\\&=\measuredangle ABP\ \text{(da } X \text{ auf } AB)\\&=\measuredangle ACP\ \text{(Peripheriewinkel über } AP)\\&=\measuredangle ZCP\ \text{(da } Z \text{ auf } AC)\\&=\measuredangle ZYP\ \text{(Peripheriewinkel über } ZP).\end{aligned}$$

Es ist also $\measuredangle XYP-\measuredangle ZYP=\measuredangle XYZ=0$, was beweist, daß X, Y und Z auf einer Geraden liegen. □

D.46 *Beweis:* (Bild) Wir bezeichnen die Schnittpunkte der Tangenten in A, B, C mit den jeweils gegenüberliegenden Seiten mit X, Y, Z. Der Satz von Menelaus verlangt nun die Berechnung der Verhältnisse AZ/ZB, BX/XC und CY/YA. Die darin auftretenden sechs Längen sind Seiten von Dreiecken, die in dieser Figur zahlreich vorhanden sind. Wenn wir also ähnliche Dreiecke finden, können wir auf eine Lösung hoffen. Tatsächlich ist z. B. im Dreieck ZCA der Winkel bei C Sehnen-Tangentenwinkel und damit gleich dem Peripheriewinkel $\measuredangle ABC=\measuredangle ZBC$. Die beiden Dreiecke ZCA und ZBC haben außerdem noch den Winkel bei Z gemeinsam, sind somit ähnlich. Analog schließen wir aus $\measuredangle YBA=\measuredangle YCB=\measuredangle ACB=\measuredangle XCA=\measuredangle XAB$: $\triangle XAB\sim\triangle XCA$ und $\triangle YBC\sim\triangle YAB$. Aus diesen Ähnlichkeiten lesen wir nun folgende Proportionen ab:



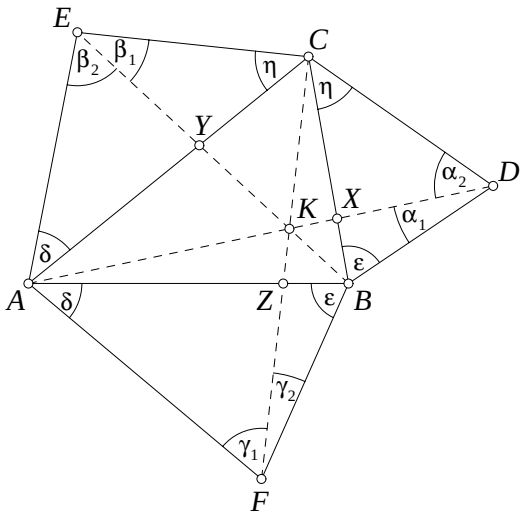
$$\frac{AZ}{CZ}=\frac{CZ}{ZB}=\frac{b}{a},\qquad \frac{BX}{AX}=\frac{AX}{XC}=\frac{c}{b},\qquad \frac{CY}{BY}=\frac{BY}{YA}=\frac{a}{c}.$$

Die Seiten AB, BC und CA werden also äußerlich in den Verhältnissen

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{AZ}{CZ} \cdot \frac{CZ}{ZB} = -\frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{BX}{XC} = \frac{BX}{AX} \cdot \frac{AX}{XC} = -\frac{c^2}{b^2}, \quad \frac{CY}{YA} = \frac{CY}{BY} \cdot \frac{BY}{YA} = -\frac{a^2}{c^2}$$

geteilt. Multiplikation aller drei Gleichungen ergibt $(AZ/ZB)\cdot(BX/XC)\cdot(CY/YA) = -1$; nach der Umkehrung des Satzes von MENELAUS liegen X, Y, Z auf einer Geraden. □

D.47 *Beweis:* (Bild) Durch die beschriebene Konstruktion entstehen drei Aufsatzdreiecke BDC, CEA und AFB, die durch die Geraden AD, BE bzw. CF in insgesamt sechs kleinere Dreiecke zerlegt werden. Führen wir noch die im Bild bezeichneten Winkel α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 ein, können wir mit Hilfe des Sinussatzes die benötigten Abschnitte auf den Dreieckseiten berechnen:



$$AZ = FZ\,\frac{\sin\gamma_1}{\sin\delta}, \qquad ZB = FZ\,\frac{\sin\gamma_2}{\sin\varepsilon},$$
$$BX = DX\,\frac{\sin\alpha_1}{\sin\varepsilon}, \qquad XC = DX\,\frac{\sin\alpha_2}{\sin\eta},$$
$$CY = EY\,\frac{\sin\beta_1}{\sin\eta}, \qquad YA = EY\,\frac{\sin\beta_2}{\sin\delta}.$$

Unser Zielausdruck (D.2) nimmt damit zunächst folgende Form an:

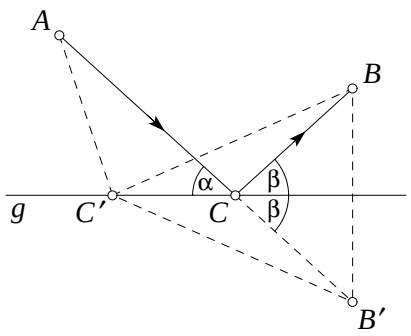
$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}. \tag{D.104}$$

Die Hilfswinkel $\alpha_1, \ldots, \gamma_2$ werden wir wieder los, indem wir die Dreiecke ABD, CAD, BCE, ABE, CAF, BCF heranziehen: Diese haben paarweise die Winkel $\beta+\varepsilon$, $\gamma+\eta$ und $\alpha+\delta$ sowie die Seiten AD, BE, CF gemeinsam. Der Sinussatz liefert hier:

$$\sin\alpha_1 = \sin(\beta+\varepsilon)\,\frac{c}{AD}, \qquad \sin\alpha_2 = \sin(\gamma+\eta)\,\frac{c}{AD},$$
$$\sin\beta_1 = \sin(\gamma+\eta)\,\frac{a}{BE}, \qquad \sin\beta_2 = \sin(\alpha+\delta)\,\frac{a}{BE},$$
$$\sin\gamma_1 = \sin(\alpha+\delta)\,\frac{b}{CF}, \qquad \sin\gamma_2 = \sin(\beta+\varepsilon)\,\frac{b}{CF}.$$

Setzen wir diese Gleichungen in (D.104) ein, kürzt sich auf wundersame Weise alles heraus, so daß tatsächlich 1 übrig bleibt und damit nach der Umkehrung des Satzes von CEVA die Behauptung bewiesen ist. □

D.51 (Bild) Bleiben wir kurz bei dem physikalischen Problem der Reflexion der Billardkugel an der Bande. Dies ist in guter Näherung ein elastischer Stoß, und dabei gilt das Reflexionsgesetz, welches besagt, daß der Einfallswinkel α gleich dem Reflexionswinkel β ist. Dies könnte uns auf die Idee bringen, Zielpunkt B an der Bande (dargestellt durch die Gerade g) zu spiegeln; wir erhalten so Punkt B'. Dann ist $\triangle BCB'$ ein gleichschenkliges Dreieck, in dem g Winkelhalbierende ist. Damit nun $\alpha = \beta$ wird, muß der gesuchte Punkt C auf g gerade der Schnittpunkt der Geraden AB' mit g sein.

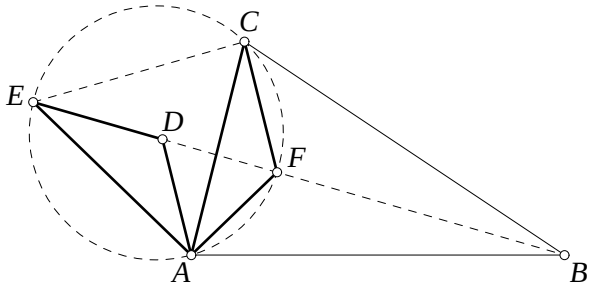


Es bleibt jetzt noch zu zeigen, daß $AC+CB$ tatsächlich ein Minimum ist. Dies bedeutet, es ist $AC + CB < AC' + C'B$ für jeden anderen Punkt C' auf g. Aufgrund der Spiegelung ist aber

$$AC + CB = AC + CB' = AB' \qquad \text{und} \qquad AC' + C'B = AC' + C'B'.$$

Nach der Dreiecksungleichung ist $AB' < AC' + C'B'$, also auch $AC + CB < AC' + C'B$, wie behauptet. □

D.53 (Bild) Wir betrachten zunächst einen willkürlich gewählten Punkt F innerhalb des Dreiecks und verbinden ihn mit A, B und C. Wenn es uns gelingt, die drei Strecken AF, BF, CF so anzuordnen, daß sie sich aneinanderreihen und außerdem noch auf einer Geraden zu liegen kommen, wäre die Minimaleigenschaft ihrer Gesamtlänge offensichtlich und der gesuchte Punkt F gefunden. Wir wählen als Gerade diejenige, die durch die Punkte F und B geht, und drehen das $\triangle AFC$ um 60° um A nach außen. Dadurch entsteht das $\triangle ADE$. Die Dreiecke ACE und AFD sind somit gleichseitig, und es gilt für die Summe der Abstände



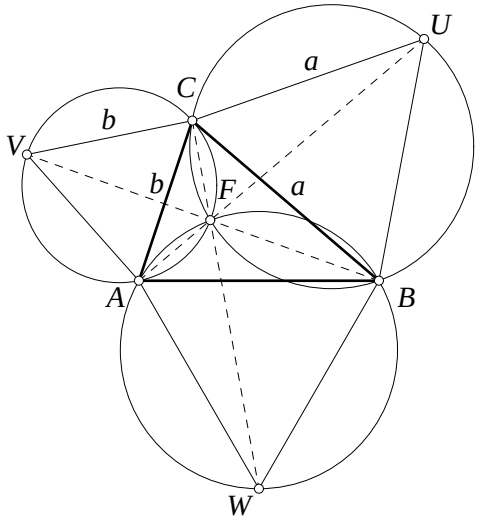
$$d = CF + AF + BF = ED + DF + FB.$$

Im allgemeinen ist der Weg von E nach B gebrochen mit Winkeln ungleich 180° bei D und F. Die Summe d wird minimal, wenn alle drei Teilstrecken auf einer Geraden liegen, d. h. $\measuredangle EDF = \measuredangle DFB = 180°$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\measuredangle AFB = 180° - \measuredangle AFD = 120° \text{ und } \measuredangle AFC = \measuredangle ADE = 180° - \measuredangle ADF = 120°$$

gilt. Der gesuchte sog. FERMAT-Punkt F ist somit derjenige, von dem aus jede der drei Seiten des Dreiecks unter einem Winkel von 120° gesehen wird. Die vier Punkte A, C, E und F bilden ein Sehnenviereck, d. h. F liegt auf dem Umkreis des gleichseitigen $\triangle ACE$. Dies wird ersichtlich, wenn wir die Winkel $\measuredangle ECA = \measuredangle EFA = 60°$ betrachten. Beide sind Peripheriewinkel über der Sehne EA. Zur *Konstruktion* von F errichten wir z. B. auf der Seite AC das gleichseitige $\triangle ACE$ und bringen dessen Umkreis mit der Strecke EB zum Schnitt. Der zweite, von E verschiedene Schnittpunkt ist dann der FERMAT-Punkt F.

D.54 *Beweis:* (Bild) a) Die beiden Dreiecke ACU und VCB sind nach Kongruenzsatz SWS einander kongruent, da sie in ihren Seiten $CU = CB = a$, $AC = VC = b$ sowie dem eingeschlossenen Winkel $\measuredangle ACU = \gamma + 60° = \measuredangle VCB$ übereinstimmen. Daraus folgt sofort $AU = BV$. Ebenso kann man aus der Kongruenz der Dreiecke $\triangle VAB \cong \triangle CAW$ schließen, daß $BV = CW$ gelten muß, mithin also die geforderte Gleichung. Die drei Strecken AU, BV, CW schneiden sich im FERMAT-Punkt F und für die Abstände gilt: $AU = BV = CW = AF + BF + CF$ (vgl. Aufgabe D.53). □



b) Um zu zeigen, daß F ebenfalls der FERMAT-Punkt von $\triangle UVW$ ist, genügt es

$$\measuredangle UFV = \measuredangle VFW = \measuredangle WFU = 120° \tag{D.105}$$

nachzuweisen. Betrachten wir dazu das Sehnenviereck $AFBW$ mit $\measuredangle AFB = 120°$. Da die Bögen bzw. Sehnen AW und BW gleich sind, gilt nach dem Peripheriewinkelsatz $\measuredangle AFW = \measuredangle BFW = 60°$. Ebenso sind FU und FV Winkelhalbierende von $\measuredangle BFC$ und $\measuredangle CFA$, woraus

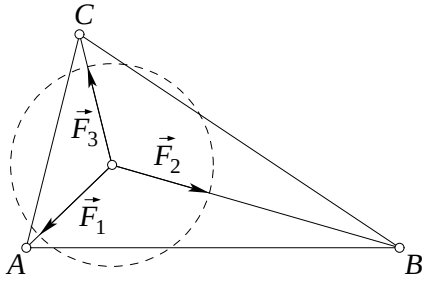
$$\measuredangle AFW = \measuredangle WFB = \measuredangle BFU = \measuredangle UFC = \measuredangle CFV = \measuredangle VFA = 60°$$

und damit (D.105) folgt. □

D.55 (Bild) Der Knoten befindet sich genau dann in Ruhe, wenn die Summe der an ihm angreifenden Gewichtskräfte gleich null ist. Da Kräfte entlang ihrer Wirkungslinie, hier also entlang der Fäden, verschoben werden können, muß für die drei in die Tischebene verschobenen Kräfte $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ und $\boldsymbol{F}_3$ im gesuchten Punkt

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = 0 \quad \text{mit} \quad |\boldsymbol{F}_1| = |\boldsymbol{F}_2| = |\boldsymbol{F}_3|$$

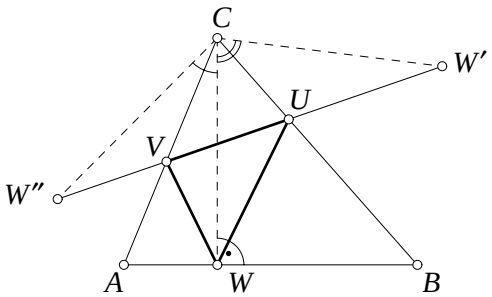
gelten. Die Vektorsumme dreier gleich langer Vektoren verschwindet genau dann, wenn sie paarweise Winkel von 120° einschließen. Somit kommt der Knoten genau im FERMAT-Punkt (vgl. Aufgabe D.53) des Dreiecks zur Ruhe.



D.56 (Bild) Wir betrachten zunächst ein beliebiges Dreieck UVW mit U auf BC, V auf CA und W auf AB. Seien W' und W'' die Spiegelbilder von W an BC bzw. CA. Dann gilt

$$WU + UV + VW = W'U + UV + VW''.$$

Dies ist im allgemeinen ein gebrochener Weg von W' nach W'' mit Winkeln ungleich 180° bei U und V. Ein solcher Weg ist dann so kurz wie möglich, wenn er *gerade* wie im Bild ist. Unter allen eingeschriebenen Dreiecken mit fester Ecke W auf AB besitzt daher dasjenige den kleinsten Umfang,



für welche U und V auf der Geraden $W'W''$ liegen. Es ist also W auf AB so zu wählen, daß der Umfang $W'W''$ minimal wird. Da CW' und CW'' Bilder von CW bei Spiegelung an BC bzw. CA sind, sind diese Strecken gleich und somit ist

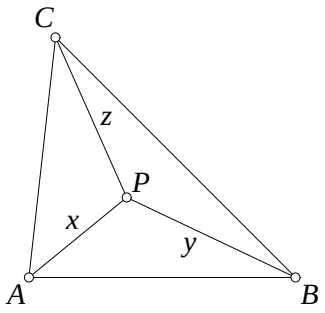
$$\measuredangle W'CW'' = 2\measuredangle BCA.$$

Somit ist im gleichschenkligen $\triangle CW'W''$ der Winkel bei C unabhängig von der Wahl von W. Die Basis ist am kürzesten, wenn die Schenkel möglichst klein sind, d. h., wenn CW minimal ist. CW ist daher die von C auf AB gefällte Höhe. Dies führt zu dem Ergebnis:

Das einem spitzwinkligen Dreieck ABC eingeschriebene Dreieck kleinsten Umfangs ist das Höhenfußpunktdreieck.

D.57 (Bild) Mit $PA \equiv x$, $PB \equiv y$ und $PC \equiv z$ lautet unsere Extremwertaufgabe $x^2+y^2+z^2 \Rightarrow \text{Min}$. Die auftretenden Quadrate lassen hier die Verwendung von Vektoren als geeignet erscheinen: Schreiben wir nach Abschnitt M.1 für die Ortsvektoren $\overrightarrow{OA} \equiv \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} \equiv \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC} \equiv \boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{OP} \equiv \boldsymbol{p}$ (wobei O ein beliebiger Punkt ist), so finden wir mit der Abkürzung $3\boldsymbol{g} \equiv \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ für den zu minimierenden Ausdruck

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a})^2+(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{c})^2 \\ &= 3p^2-2\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+a^2+b^2+c^2 \\ &= 3p^2-6\boldsymbol{p}\boldsymbol{g}+3g^2-3g^2+a^2+b^2+c^2 \\ &= 3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{g})^2-3g^2+a^2+b^2+c^2. \end{aligned}$$



Dieser Ausdruck nimmt offensichtlich ein Minimum an, wenn die runde Klammer verschwindet, also für $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{g}$. Nach Aufgabe M.1 ist $\boldsymbol{g}$ leicht als Ortsvektor zum Schwerpunkt des Dreiecks zu erkennen; demnach ist der gesuchte Punkt der Schwerpunkt G von $\triangle ABC$.

D.58 Wir lassen zunächst einmal jedwede Geometrie außer Acht und nehmen die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (vgl. Aufgabe U.11) mit den beiden Tripeln (a,b,c) und (u,v,w). Gleichung (U.13) lautet dann

$$(a^2+b^2+c^2)(u^2+v^2+w^2) \geq (au+bv+cw)^2.$$

Der rechts stehende Ausdruck ist aber gerade das Quadrat des doppelten Flächeninhalts des Dreiecks, so daß daraus

$$u^2+v^2+w^2 \geq \frac{4\,\Delta^2}{a^2+b^2+c^2} \tag{D.106}$$

folgt. Nun sagt uns entweder eine geometrische Interpretation des rechts stehenden Ausdrucks in (D.106) oder (U.13), wann Gleichheit vorliegt: Beide Tripel (a,b,c) und (u,v,w) müssen proportional sein, d. h.

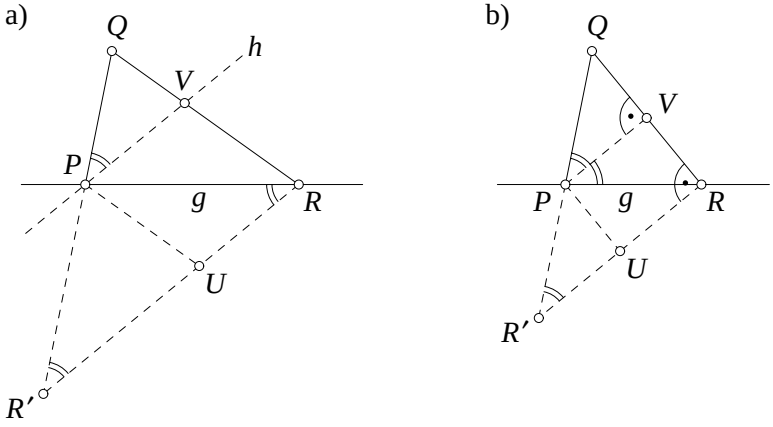
$$\frac{u}{a} = \frac{v}{b} = \frac{w}{c} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Diese Bedingung ist identisch mit derjenigen aus Aufgabe D.91; es handelt sich demnach bei dem gesuchten Punkt um den Lémoine-Punkt des Dreiecks ABC.

Bemerkung: Aus (D.106) wird unter Beachtung von Aufgabe D.73 mit dem BROCARD-Winkel ω

$$u^2 + v^2 + w^2 \geq \frac{\Delta}{\cot\omega}.$$

D.59 Wenn es darum geht, Summen von Streckenlängen zu vergleichen, die nicht auf einer Geraden liegen (hier $QP + PR$), ist es immer eine gute Idee, diese auf eine Gerade zu bringen. Wir erreichen dies hier, indem wir anstelle von $R \in g$ denjenigen Punkt R' auf der Verlängerung von QP betrachten, für den $PR' = PR$ gilt (Bild a). In dem so

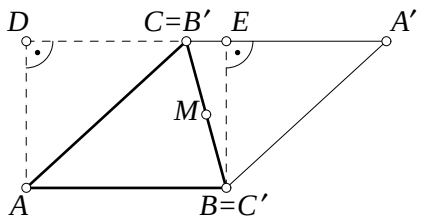


entstehenden $\triangle RR'Q$ ziehen wir noch die Parallelen zu RQ und RR' jeweils durch P, so daß $PURV$ ein Parallelogramm wird. Nach dem ersten Strahlensatz finden wir somit

$$\frac{QP + PR}{QR} = \frac{QR'}{QR} = \frac{QP}{QV} \Rightarrow \text{Max.}$$

Wegen $QP = \text{const}$ lautet die Forderung $QV \Rightarrow \text{Min}$. Das Dreieck $R'PR$ ist aber für jede beliebige Lage von R gleichschenklig mit gleichen Basiswinkeln, weshalb die Gerade $h(P, V)$ als Parallele zu $R'R$ ebenfalls unabhängig von R ist. Unsere obige Minimalforderung wird also genau dann erfüllt, wenn V der Lotfußpunkt von Q auf h ist (Bild b). Aus $\measuredangle PR'R = \measuredangle R'RP = \measuredangle RPV = \measuredangle QPV$ folgt: $\triangle PVQ \cong \triangle PVR$; also ist $\triangle QPR$ gleichschenklig mit $PR = PQ$.

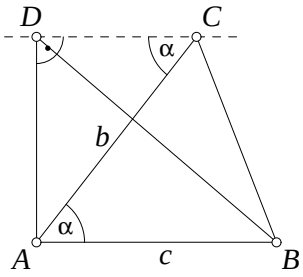
D.61 *Beweis:* (Bild) Drehen wir das gegebene $\triangle ABC$ um den Mittelpunkt M der Seite BC um 180°, so geht A in A', B in $B' = C$ und C in $C' = B$ über, und $ABA'B'$ ist wegen $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ offensichtlich ein Parallelogramm. D und E seien die Lotfußpunkte von A bzw. B auf der Geraden $g(A', B')$. Dann ist nach Kongruenzsatz SWS $\triangle C'A'E \cong \triangle ACD$ und somit



$$2\Delta = [ABA'B'] = [C'A'E] + [ABEB'] = [ABED] = AB \cdot BE = ch_c.$$

Durch Drehung an den anderen beiden Seiten erhalten wir analog $2\,\Delta = ah_a = bh_b$. □

D.62 *Beweis:* (Bild) Wir verwandeln das gegebene Dreieck ABC in ein flächengleiches rechtwinkliges Dreieck ABD, indem wir z. B. den Punkt D als Lotfußpunkt von A auf der Parallelen zu AB durch C bestimmen (s. Aufgabe D.61). Dann benötigen wir nur noch die Länge der Strecke AD, die sich aber im rechtwinkligen Dreieck ADC aus der Definition des Sinus zu $AD = b\sin\alpha$ ergibt ($\measuredangle BAC = \measuredangle DCA$ sind Wechselwinkel). Somit ist:



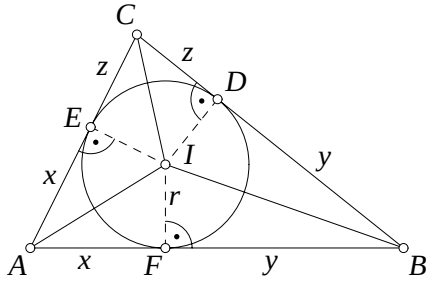
$$\Delta = [ABC] = [ABD] = \frac{1}{2}\,c\cdot AD = \frac{1}{2}\,bc\sin\alpha.$$

Völlig analog erhalten wir die anderen Gleichungen. □

D.63 *Beweis:* (Bild) Der Mittelpunkt I des Inkreises zerlegt die Dreiecksfläche in drei Teildreiecke ABI, BCI und CAI. Bezeichnen wir die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten BC, CA, AB mit D, E, F, so sind

$$ID = IE = IF = r$$

offenbar gerade die Höhen dieser Teildreiecke, da die Berührungsradien stets senkrecht auf den tangierenden Seiten stehen. Darüber hinaus sind die Strecken $AE = AF = x$, $BF = BD = y$ sowie $CD = CE = z$ Tangentenabschnitte von paarweise gleicher Länge, so daß mit $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = x+y+z$ gilt:

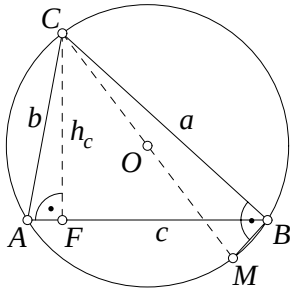


$$\Delta = [ABI] + [BCI] + [CAI] = \frac{1}{2}\big[(x+y)r + (y+z)r + (z+x)r\big]$$
$$= \frac{1}{2}\,r\cdot 2(x+y+z) = rs. \quad \square$$

Bemerkung: Die drei Gleichungen $x+y=c$, $y+z=a$, $z+x=b$ ergeben — aufgelöst nach den x, y, z — die oft nützlichen Beziehungen (vgl. Abschnitt G.1.1)

$$x = \frac{1}{2}(b+c-a), \quad y = \frac{1}{2}(c+a-b), \quad z = \frac{1}{2}(a+b-c).$$

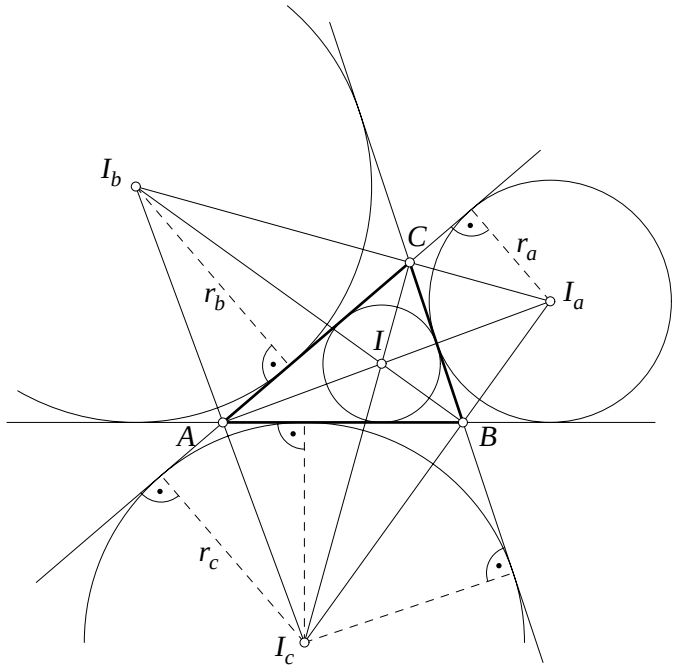
D.64 *Beweis:* (Bild) Wir zeichnen außer dem Umkreis von $\triangle ABC$ mit seinem Mittelpunkt O noch den Durchmesser CM sowie die Höhe $CF = h_c$ ein. Dann sind die beiden Dreiecke AFC und MBC ähnlich, da sie einerseits rechtwinklig sind und außerdem nach dem Peripheriewinkelsatz noch in ihren Winkeln $\measuredangle CAF = \measuredangle CAB = \measuredangle CMB$ übereinstimmen. Mithin gilt die Proportion



$$\frac{h_c}{b} = \frac{a}{2R} \qquad \text{oder} \qquad h_c = \frac{ab}{2R},$$

welche in $\Delta = \frac{1}{2}ch_c$ eingesetzt $\Delta = abc/(4R)$ ergibt. □

D.65 *Beweis:* Das Bild zeigt die drei Ankreise mit den Mittelpunkten I_a, I_b, I_c bzw. Radien r_a, r_b, r_c sowie den Inkreis des Dreiecks ABC. Betrachten wir z. B. das Viereck AI_cBC, so finden wir für dessen Flächeninhalt $[AI_cBC] = [CBI_c] + [CAI_c] = [ABI_c] + \Delta$.



Nun hat jedes der Dreiecke CBI_c, CAI_c und ABI_c gerade r_c als Höhe auf den Grundseiten $BC = a$, $CA = b$ bzw. $AB = c$, so daß gilt:

$$\Delta = [CBI_c] + [CAI_c] - [ABI_c] = \frac{1}{2}(a + b - c)r_c = (s - c)r_c.$$

Völlig ähnliche Ausdrücke für Δ erhalten wir, wenn wir die obigen Betrachtungen auf die Vierecke BI_aCA und CI_bAB anwenden: $\Delta = (s - a)r_a = (s - b)r_b$. □

D.66 *Beweis:* Um die Richtigkeit dieser Formel zu zeigen, benötigen wir nur ein wenig Trigonometrie. Nach dem Kosinussatz ist

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

und damit

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2}}{2bc}.$$

Diesen Ausdruck setzen wir in $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ ein:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{4}\sqrt{-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)} = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.\end{aligned}$$ □

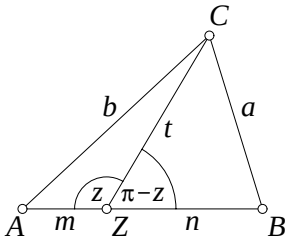
D.67 *Beweis:* Durch Gleichsetzen der Ausdrücke (D.6) und (D.7) für den Flächeninhalt in den Aufgaben D.63 und D.64 erhalten wir die angegebene Gleichung. □

D.68 *Beweis:* Aus Aufgabe D.65 und D.63 folgt:

$$\frac{1}{r_a}=\frac{s-a}{\Delta},\quad \frac{1}{r_b}=\frac{s-b}{\Delta},\quad \frac{1}{r_c}=\frac{s-c}{\Delta},\quad \frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{3s-2s}{\Delta}=\frac{s}{\Delta}=\frac{1}{r}.\ \square$$

D.69 *Beweis:* (Bild) Die bei Z auftretenden Winkel $\measuredangle AZC = z$ und $\measuredangle BZC = \pi - z$ sind Supplementwinkel, so daß wir die Gleichung $\cos z = -\cos(\pi - z)$ ausnutzen können. Nach dem Kosinussatz gilt nun in den Dreiecken AZC und BZC:

$$\cos z=\frac{m^2+t^2-b^2}{2mt},\qquad \cos(\pi-z)=\frac{n^2+t^2-a^2}{2nt}.$$

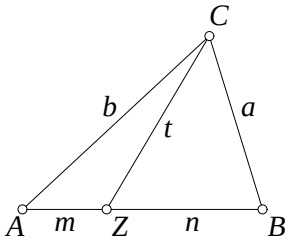


Diese Ausdrücke in obige Gleichung eingesetzt, ergibt

$$t^2=\frac{ma^2}{c}+\frac{nb^2}{c}-mn=\frac{ma^2+nb^2}{m+n}-mn.\ \square$$

D.70 (Bild) Wir wenden den Satz von STEWART an und müssen lediglich geeignete Ausdrücke für die Längen der Abschnitte m und n finden:

$$t=\sqrt{\frac{ma^2+nb^2}{m+n}-mn}.$$



a) Auf der Seite c ist $m=n=\frac{1}{2}c$ und damit

$$m_c=\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)-\frac{1}{4}c^2}\qquad\text{(D.107)}$$

b) Dank Aufgabe D.8 kennen wir hier das Teilungsverhältnis $m:n=b:a$. Mit $c=m+n$ ergibt sich $m=bc/(a+b)$ und $n=ac/(a+b)$, somit

$$w_c=\sqrt{ab\left[1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right]}.\qquad\text{(D.108)}$$

c) Hier ist es am einfachsten, (D.5) und (D.9) zu kombinieren:

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.\qquad\text{(D.109)}$$

Analoge Formeln für h_a und h_b ergeben sich durch zyklische Vertauschung von (a,b,c).

D.71 *Beweis:* Nach Aufgabe D.70 b und der Voraussetzung $w_a = w_b$ gilt:

$$w_a^2=bc\left[1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right]=ca\left[1-\frac{b^2}{(c+a)^2}\right]=w_b^2$$

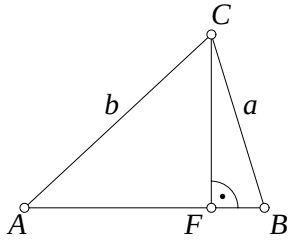
und damit

$$\begin{aligned}0&=(a-b)+\left[\frac{a^2b}{(b+c)^2}-\frac{ab^2}{(c+a)^2}\right]=(a-b)+\frac{a^2b(c+a)^2-ab^2(b+c)^2}{(b+c)^2(c+a)^2}\\&=(a-b)\left[1+ab\frac{c^2+2c(a+b)+a^2+b^2}{(b+c)^2(c+a)^2}\right].\end{aligned}$$

Da der zweite Faktor nicht verschwinden kann, folgt zwangsläufig $a=b$. $\square$

D.72 (Bild) $\triangle ABC$ wird durch die Höhe CF in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt, in denen wir den Satz des PYTHAGORAS anwenden können:

$$CF^2 = b^2 - AF^2 = a^2 - BF^2, \qquad \text{oder}$$
$$b^2 - a^2 = AF^2 - BF^2 = c(AF - BF).$$



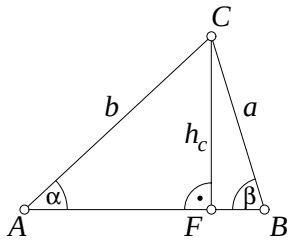
Dieses Ergebnis nochmals mit $c = AF + BF$ kombiniert, ergibt

$$AF = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c} \qquad \text{und} \qquad BF = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}.$$

Bemerkung: Durch zyklische Vertauschung erhalten wir die Formeln für die Abschnitte auf den anderen Seiten.

D.73 *Beweis:* (Bild) Es gilt $\cot\alpha = AF/h_c$ und mit dem Resultat von Aufgabe D.72 für den Abschnitt AF sowie $4\Delta = 2ch_c$:

$$\cot\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2ch_c} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\,\Delta}.$$

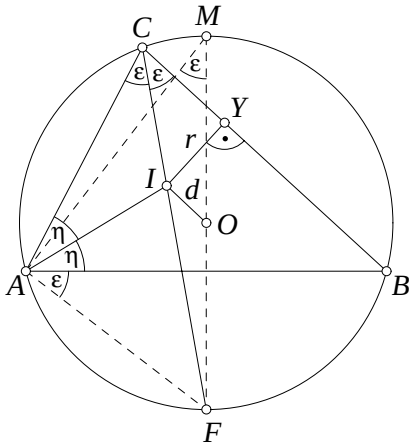


Durch zyklische Vertauschung erhalten wir

$$\cot\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4\,\Delta}, \qquad \cot\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4\,\Delta}.$$

Addition der Gleichungen liefert die Behauptung. □
Bemerkung: Es gilt $\cot\omega = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma$ mit dem BROCARD-Winkel ω.

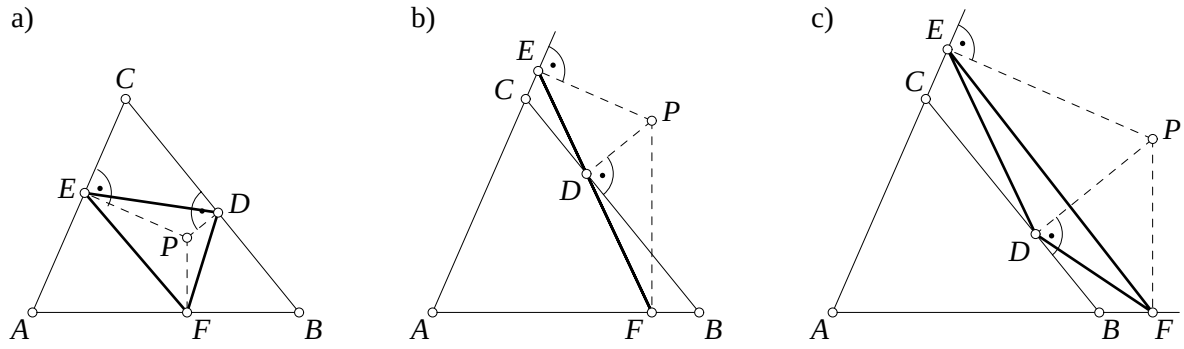
D.79 *Beweis:* (Bild) Aus Aufgabe K.3 wissen wir, daß die verlängerte Winkelhalbierende von $\measuredangle ACB$, auf der I liegt, die Mittelsenkrechte von AB, auf der O liegt, gerade im Punkt F auf dem Umkreis schneidet. FM sei der Durchmesser des Umkreises senkrecht zu AB. Schreiben wir zur Abkürzung $\varepsilon = \frac{1}{2}\measuredangle ACB$ und $\eta = \frac{1}{2}\measuredangle CAB$, so ist aus dem Bild leicht $\measuredangle AMF = \measuredangle ACF = \varepsilon$ und $\measuredangle FAB = \measuredangle FCB = \varepsilon$ abzulesen. Der Außenwinkel von $\triangle CAI$ bei I ist $\measuredangle AIF = \varepsilon + \eta = \measuredangle FAI$, $\triangle FAI$ ist demzufolge gleichschenklig: $FA = FI$. Nun können wir den Sehnensatz aus Aufgabe K.11 vorteilhaft auf die Sehne FC mit ihrem Teilungspunkt I anwenden:



$$\begin{aligned} R^2 - d^2 &= FI \cdot IC = FA \cdot IC \\ &= FM\,\frac{FA/FM}{IY/IC}\,IY \\ &= FM\,\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon}\,IY = FM \cdot IY = 2Rr. \end{aligned}$$

Damit wird $d^2 = R^2 - 2rR$. □

D.81 *Beweis:* Mit D, E als Fußpunkte der Lote von P auf die Seiten BC, CA gilt für die Winkel $\measuredangle PDC = \measuredangle PEC = 90°$, d. h., die Punkte P, D, C, E liegen sämtlich auf einem Kreis mit $CP \equiv z$ als Durchmesser (Bild a). Nun können wir den Sinussatz in seiner erweiterten Form (vgl. Aufgabe D.5) bezüglich des Winkels $\measuredangle BCA = \gamma$ einmal auf



das $\triangle EDC$, zum anderen auf das $\triangle ABC$ anwenden:

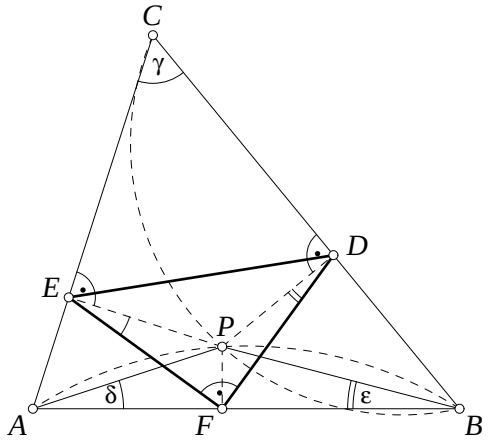
$$\frac{DE}{\sin\gamma} = z \quad \text{bzw.} \quad \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Eliminieren wir hieraus $\sin\gamma$, so folgt die Seitenlänge $DE = z\sin\gamma = cz/(2R)$. Analog verfahren wir mit den beiden anderen Sehnenvierecken $PEAF$ und $PFBD$ und erhalten

$$EF = x\sin\alpha = \frac{by}{2R} \qquad \text{bzw.} \qquad FD = y\sin\beta = \frac{ax}{2R}. \ \square$$

Bemerkung: Auch im Falle, daß einige der Lotfußpunkte auf den Verlängerungen der Seiten liegen (Bild b,c) bleibt das Ergebnis dasselbe; wir haben im $\triangle EDC$ lediglich den Supplementwinkel $\measuredangle BCE = 180° - \gamma$ zu nehmen mit $\sin(180° - \gamma) = \sin\gamma$. In Bild b entartet das Lotfußpunktdreieck gerade zur Simson-Geraden (vgl. Aufgabe D.45).

D.82 (Bild) Wir haben hier zwar nicht so viel rechte Winkel wie beim Höhenfußpunktdreieck, aber diejenigen an den Lotfußpunkten D, E und F reichen schon, um drei Sehnenvierecke zu erkennen: $PEAF$, $PFBD$ und $PDCE$. In ihnen sind die Strecken PA, PB, PC jeweils Durchmesser. Und wo Sehnenvierecke sind, gibt es auch (gleiche) Peripheriewinkel. Nehmen wir o. B. d. A. an, daß das $\triangle DEF$ seinen rechten Winkel bei F hat und bezeichnen $\measuredangle PAF \equiv \delta$ und $\measuredangle PBF \equiv \varepsilon$, so gilt nach dem Peripheriewinkelsatz



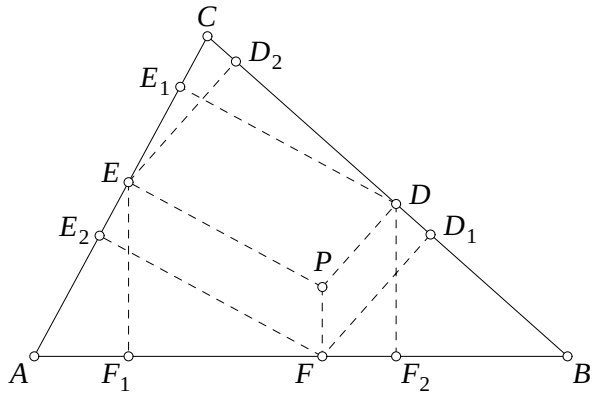
$$\measuredangle PEF = \delta, \quad \measuredangle PDF = \varepsilon.$$

Aus der Innenwinkelsumme im Viereck $CEFD$ folgt nun $\delta + \varepsilon = 90° - \gamma$. Für $\measuredangle EFD = 90°$ ist also $\measuredangle APB = 180° - (\delta + \varepsilon) = 90° + \gamma$ notwendig. P liegt somit auf einem Kreisbogen, den wir nach Aufgabe A.21 konstruieren können. Ferner ist aufgrund der geforderten Gleichschenkligkeit des Lotfußpunktdreiecks $\measuredangle DEF =$

$\measuredangle EDF = 45°$ vorgegeben. Mit demselben Argument finden wir als zweiten geometrischen Ort für P einen Kreisbogen mit $\measuredangle BPC = 45° + \alpha$.

D.83 *Beweis:* (Bild) Seien D_1 und D_2 die Lotfußpunkte von F und E auf BC; entsprechend seien die Punkte E_1, E_2 und F_1, F_2 auf den anderen Seiten erklärt. Aus Aufgabe D.82 wissen wir, daß z. B. $PFBD$ ein Sehnenviereck ist. Daher ist $\measuredangle FDB = \measuredangle FDD_1 = \measuredangle FPB$ und die rechtwinkligen Dreiecke FDD_1 und BPF sind ähnlich. Daraus folgt für die Länge

$$D_1D = \frac{PF}{PB} \cdot FD.$$



Dieses Argument können wir insgesamt sechsmal verwenden, was wir an dieser Stelle auch einmal ausführlich hinschreiben:

$$\begin{aligned}
\measuredangle DFB = \measuredangle DFF_2 = \measuredangle DPB &\Rightarrow \triangle DFF_2 \sim \triangle BPD &&\Rightarrow FF_2 = \tfrac{PD}{PB} \cdot FD,\\
\measuredangle DEC = \measuredangle DEE_1 = \measuredangle DPC &\Rightarrow \triangle DEE_1 \sim \triangle CPD &&\Rightarrow E_1E = \tfrac{PD}{PC} \cdot DE,\\
\measuredangle EDC = \measuredangle EDD_2 = \measuredangle EPC &\Rightarrow \triangle EDD_2 \sim \triangle CPE &&\Rightarrow DD_2 = \tfrac{PE}{PC} \cdot DE,\\
\measuredangle EFA = \measuredangle EFF_1 = \measuredangle EPA &\Rightarrow \triangle EFF_1 \sim \triangle APE &&\Rightarrow F_1F = \tfrac{PE}{PA} \cdot EF,\\
\measuredangle FEA = \measuredangle FEE_2 = \measuredangle FPA &\Rightarrow \triangle FEE_2 \sim \triangle APF &&\Rightarrow EE_2 = \tfrac{PF}{PA} \cdot EF.
\end{aligned}$$

Jetzt nehmen wir unseren Zielausdruck und schätzen ihn mit einem Trick nach unten ab:

$$PA + PB + PC \geq PA \cdot \frac{D_1D + DD_2}{EF} + PB \cdot \frac{E_1E + EE_2}{FD} + PC \cdot \frac{F_1F + FF_2}{DE}.$$

Dies ist offenbar richtig, da z. B. D_1D_2EF ein Trapez mit benachbarten rechten Winkeln bei D_1 bzw. D_2 ist und die gegenüberliegende Seite EF nur die minimale Länge D_1D_2 haben kann. Analog gilt $FD \geq E_1E_2$ und $DE \geq F_1F_2$. Setzen wir nun die gefundenen Streckenlängen für D_1D, DD_2 usw. in die bisherige Ungleichung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
PA + PB + PC \geq &\left(\frac{PB \cdot DE}{PC \cdot FD} + \frac{PC \cdot FD}{PB \cdot DE}\right) PD + \left(\frac{PC \cdot EF}{PA \cdot DE} + \frac{PA \cdot DE}{PC \cdot EF}\right) PE\\
&+ \left(\frac{PA \cdot FD}{PB \cdot EF} + \frac{PB \cdot EF}{PA \cdot FD}\right) PF.
\end{aligned}$$

Der Rest ist wieder einfach: die Klammerausdrücke haben die Form $x + \frac{1}{x}$ und sind damit allesamt größer oder gleich 2:

$$PA + PB + PC \geq 2(PD + PE + PF). \quad \square$$

D.84 In der Lösung der vorherigen Aufgabe D.83 betraf die erste Abschätzung die Ungleichungen $EF \geq D_1D_2$, $FD \geq E_1E_2$ bzw. $DE \geq F_1F_2$. Diese werden zu Gleichungen, wenn die dort genannten Trapeze zu Rechtecken werden. Dies ist genau dann der Fall, wenn P der Umkreismittelpunkt von $\triangle ABC$ ist (D, E, F sind dann die Seitenmitten

und $EF \parallel D_1D_2$ folgt aus der Umkehrung des 2. Strahlensatzes). Gleichzeitig müssen bei der zweiten Abschätzung die Summanden in den Klammerausdrücken gleich sein. Da aber schon $PA = PB = PC$ ist, muß somit auch $DE = EF = FD$ gelten, d. h. das Lotfußpunktdreieck gleichseitig sein. Beide Forderungen erfüllt nur der Symmetriepunkt P (Schwerpunkt, Umkreismittelpunkt usw.) in einem *gleichseitigen* Dreieck ABC.

D.91 (Bild) Ein Punkt P' auf der Ecktransversalen CK erfülle zunächst die Bedingung

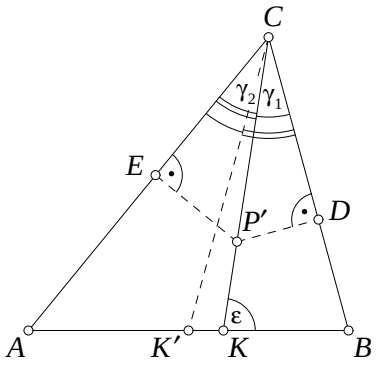
$$\frac{P'D}{BC} = \frac{P'E}{CA} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{P'D}{P'E} = \frac{BC}{CA} = \frac{a}{b}. \tag{D.110}$$

Mit Hilfe des Sinussatzes finden wir mit den im Bild bezeichneten Winkeln $\gamma_1 \equiv \measuredangle BCK$, $\gamma_2 \equiv \measuredangle ACK$ und $\varepsilon \equiv \measuredangle BKC$

$$P'D = CP' \sin\gamma_1, \;\; P'E = CP' \sin\gamma_2, \;\; BC = KB\,\frac{\sin\varepsilon}{\sin\gamma_1}, \;\; CA = AK\,\frac{\sin(\pi-\varepsilon)}{\sin\gamma_2}.$$

Dann wird aus (D.109) mit $\sin\varepsilon = \sin(\pi-\varepsilon)$:

$$\frac{P'D}{P'E} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{KB}{AK}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} = \frac{a}{b}. \tag{D.111}$$



Nun sei CK' die isogonale Gerade zu CK. Mithin ist $\measuredangle ACK' = \gamma_1$, $\measuredangle BCK' = \gamma_2$, und der Sinussatz liefert uns hier

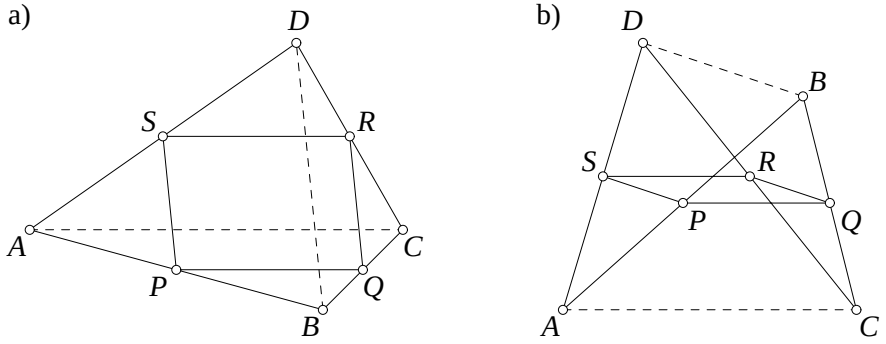
$$\frac{K'B}{AK'}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{a}{b}. \tag{D.112}$$

(D.111) und (D.112) können nur für $AK' = K'B$ erfüllt werden, d. h., CK' ist die Seitenhalbierende von AB, CK demzufolge die zugehörige Symmediane. P' liegt also auf der Symmediane zwischen den Seiten CB und CA. Für die anderen Seitenpaare erhalten wir analoge Ergebnisse, so daß unser gesuchter Punkt P der LÉMOINE-Punkt des Dreiecks ABC ist (vgl. Aufgabe D.41).

Bemerkung: Daß der gesuchte Punkt entfernt mit dem Schwerpunkt verwandt ist, ließe sich dadurch vermuten, daß für diesen gerade die *Produkte* $PD\cdot BC = PE\cdot CA = PF\cdot AB$ untereinander gleich sind (vgl. Aufgabe W.22).

LÖSUNGEN: VIERECKE

V.1 *Beweis:* Erinnern wir uns daran, daß in einem Dreieck die Strecke, die die Mittelpunkte zweier Seiten verbindet, nach der Umkehrung des zweiten Strahlensatzes parallel und halb so lang wie die dritte Seite ist (s. Aufgabe D.10). In unserem Viereck $ABCD$ seien die Mittelpunkte der Seiten nun mit P, Q, R und S bezeichnet (Bild a). Betrachten

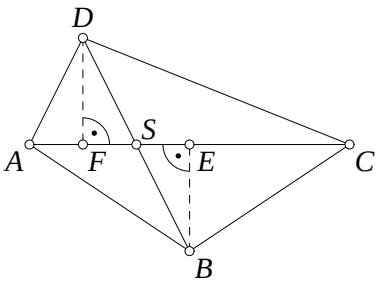


wir die Dreiecke ABC und ADC, so können wir schließen, daß beide Strecken PQ und RS parallel zur Diagonalen AC verlaufen und $PQ = RS = \frac{1}{2}AC$ gilt. Damit ist $PQRS$ das sog. VARIGNON-Parallelogramm. Dies ist auch der Fall, wenn wir ein überschlagenes Viereck zugrunde legen (Bild b). Für den Flächeninhalt des VARIGNON-Parallelogramms finden wir:

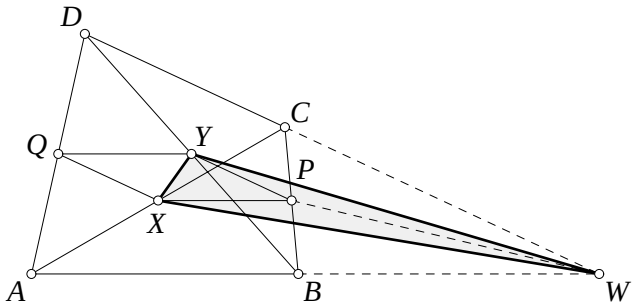
$$\begin{aligned}
[PQRS] &= [ABCD] - [SAP] - [PBQ] - [QCR] - [RDS] \\
&= [ABCD] - \frac{1}{4}[ABD] - \frac{1}{4}[ABC] - \frac{1}{4}[BCD] - \frac{1}{4}[DAC] \\
&= [ABCD] - \frac{1}{4}[ABCD] - \frac{1}{4}[ABCD] \\
&= \frac{1}{2}[ABCD]. \ \square
\end{aligned}$$

Bemerkung: $PQRS$ bleibt ein Parallelogramm, wenn A, B, C und D vier beliebige Punkte im Raum sind, die nicht in einer Ebene liegen (vgl. Aufgabe M.9).

V.2 *Beweis:* (Bild) Angenommen, AC teilt $ABCD$ in zwei flächengleiche Dreiecke ABC und CDA. Da beide die gleiche Basis AC haben, müssen ihre Höhen BE und DF ebenfalls gleich sein. Aus der Kongruenz (WSW) $\triangle BES \cong \triangle DFS$ schließen wir $BS = DS$. Umgekehrt, wenn wir $BS = DS$ voraussetzen, sind diese Dreiecke kongruent mit $BE = DF$ (auch WSW), und es folgt $[ABC] = [CDA]$. $\square$



V.3 *Beweis:* (Bild) Hier besteht die Lösungsidee darin, das Dreieck XWY in Teildreiecke zu zerlegen, um deren Flächeninhalte besser in Relation zum Viereck $ABCD$ zu bringen als dies mit XWY als Ganzes möglich ist. Dazu zeichnen wir die Mittelpunkte P und Q der Seiten BC bzw. DA in unsere Figur mit ein. Dann ist $XPYQ$ das VARIGNON-Parallelogramm des überschlagenen Vierecks $ACBD$. Außerdem ziehen wir noch die Verlängerungen BW und CW sowie PW. Die Strecke XP, die die Mittelpunkte der Seiten BC und CA des Dreiecks ABC verbindet, ist parallel zur Seite AB und halbiert damit die „andere“ Diagonale CW des Vierecks $CXWP$. Nach der Umkehrung des Satzes aus Aufgabe V.2 gilt somit



$$[PXW] = [XPC] = \frac{1}{4}[ABC]. \tag{V.101}$$

Analog folgt

$$[PWY] = [YBP] = \frac{1}{4}[BCD]. \tag{V.102}$$

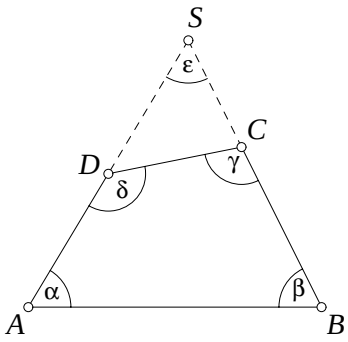
Damit fehlt an $[XWY]$ nur noch $[PYX]$, welcher jedoch mittels Aufgabe V.1 schnell ermittelt ist:

$$\begin{aligned}[PYX] &= \frac{1}{2}[XPYQ] = \frac{1}{4}[ACBD] \\ &= \frac{1}{4}[BDA] + \frac{1}{4}[ACB] \\ &= \frac{1}{4}[DAB] - \frac{1}{4}[ABC]. \end{aligned} \tag{V.103}$$

Addieren wir (V.103), (V.101) und (V.102), so erhalten wir

$$\begin{aligned}[XWY] &= [PYX] + [PXW] + [PWY] \\ &= \frac{1}{4}[DAB] - \frac{1}{4}[ABC] + \frac{1}{4}[ABC] + \frac{1}{4}[BCD] \\ &= \frac{1}{4}[DAB] + \frac{1}{4}[BCD] = \frac{1}{4}[ABCD]. \ \square \end{aligned}$$

V.8 (Bild) Die Eckpunkte des Vierecks seien wie üblich mit A, B, C, D bezeichnet; die Innenwinkel bei den Eckpunkten in dieser Reihenfolge mit α, β, γ, δ. Betrachten wir nun beispielsweise die gegenüberliegenden Seiten BC und AD, so schneiden sich ihre Verlängerungen in einem Punkt S, vorausgesetzt, sie verlaufen nicht parallel zueinander. Für den gesuchten Winkel $\measuredangle ASB \equiv \varepsilon$ erhalten wir dann aus den Sätzen über die Innenwinkelsumme im $\triangle ABS$ gleich 180° sowie der im Viereck $ABCD$ gleich 360°:



$$\varepsilon = |180° - (\alpha + \beta)| = |180° - [360° - (\gamma + \delta)]| = |\gamma + \delta - 180°| = |180° - \gamma - \delta|.$$

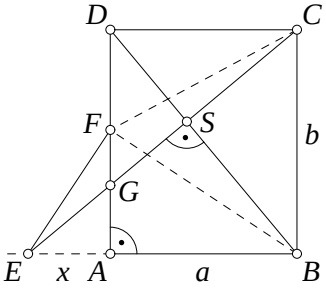
Die Betragsstriche sorgen dafür, daß ε auch im Fall $\alpha + \beta > 180°$ positiv wird (S würde dann im Bild unterhalb von AB liegen). Im Falle, daß die gegenüberliegenden Seiten die zueinander parallelen Seiten AB, CD eines Trapezes sind, liefert obige Beziehung

$$\measuredangle(AB, CD) \equiv \eta = |180° - (\beta + \gamma)| = 0,$$

in Übereinstimmung damit, daß sich parallele Geraden im Unendlichen schneiden.

V.9 *Beweis:* (Bild) In der Figur gibt es mehrere rechtwinklige Dreiecke, von denen einige zueinander ähnlich sind. Dies ist der Fall, wenn sie außer in dem rechten Winkel noch in einem weiteren Winkel übereinstimmen. Bezeichnen wir den Schnittpunkt von AD mit CE mit G, finden wir somit:

$$\begin{aligned} \triangle BAD &\sim \triangle GSD \quad \text{(gemeinsamer Winkel } \measuredangle GDS\text{)} \\ &\sim \triangle GAE \quad \text{(Scheitelwinkel bei } G\text{)} \\ &\sim \triangle CBE \quad \text{(gemeinsamer Winkel } \measuredangle GEA\text{)}. \end{aligned}$$

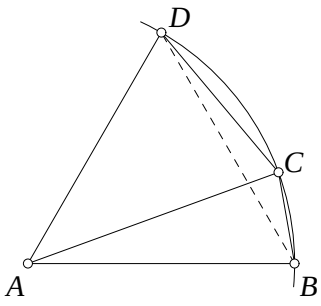


Mit den Abkürzungen $AB \equiv a$, $BC \equiv b$ und $EA \equiv x$ können wir aus $\triangle BAD \sim \triangle CBE$ die Proportion

$$\frac{b}{a} = \frac{a + x}{b} \qquad \text{bzw.} \qquad b^2 - a^2 = x \cdot a \tag{V.104}$$

ablesen. Nun ist nach Voraussetzung $BF = BC = b$, und da $\triangle BAF$ ebenfalls rechtwinklig ist, gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS $AF = \sqrt{b^2 - a^2}$. Damit sowie mit (V.104) folgt aus der Umkehrung des Höhensatzes für rechtwinklige Dreiecke, daß x und a gerade die Hypotenusenabschnitte eines rechtwinkligen $\triangle BFE$ sein müssen; also $EF \perp FB$. □

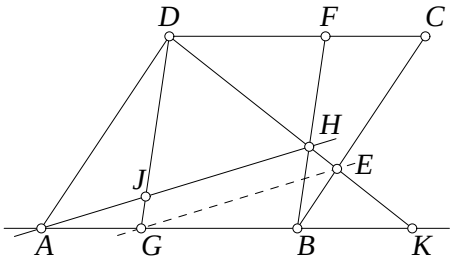
V.10 *Beweis:* (Bild) Wir schlagen um den Punkt A einen Kreis mit dem Radius $AB = AD$. Dann ist DB eine Sehne dieses Kreises und $\measuredangle DAB = 60°$ der zugehörige Zentriwinkel. Alle Peripheriewinkel in dieser (durch $g(D, B)$ geteilten) Halbebene betragen nach dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz 30°, die Peripheriewinkel in der anderen Halbebene demzufolge $180° - 30° = 150°$. Dies ist genau der Winkel $\measuredangle DCB$. Also liegt C auch auf dem beschriebenen Kreis und es gilt $AC = AB$. □



V.11 Direkte Folge der Gleichung aus Aufgabe M.4.

V.19 *Beweis:* (Bild) Es sei $K \equiv DE \cap AB$ sowie $J \equiv DG \cap AH$. Die Strahlensätze liefern die Proportionen:

$$\text{für } \measuredangle HAK\text{:}\quad \frac{AG}{AB} = \frac{GJ}{BH},$$
$$\text{für } \measuredangle GKD\text{:}\quad \frac{KB}{KG} = \frac{KH}{KD} = \frac{BH}{GD},$$
$$\text{für } \measuredangle AKD\text{:}\quad \frac{KB}{KA} = \frac{KE}{KD}.$$



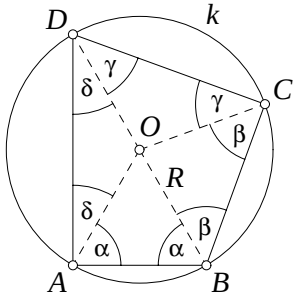
Außerdem gilt: $AG = KA - KG$ und $AB = KA - KB$. Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{DJ}{DG} &= \frac{DG - GJ}{DG} = 1 - \frac{GJ}{DG} = 1 - \frac{AG}{AB}\cdot\frac{HB}{DG} = 1 - \frac{AG}{AB}\cdot\frac{KB}{KG}\\ &= \frac{\big(KA - KB\big)\cdot KG - \big(KA - KG\big)\cdot KB}{AB\cdot KG} = \frac{KA\cdot\big(KG - KB\big)}{AB\cdot KG}\\ &= \frac{1 - KB/KG}{1 - KB/KA} = \frac{1 - KH/KD}{1 - KE/KD} = \frac{KD - KH}{KD - KE} = \frac{DH}{DE};\end{aligned}$$

damit ist nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes $AH \parallel GE$. □

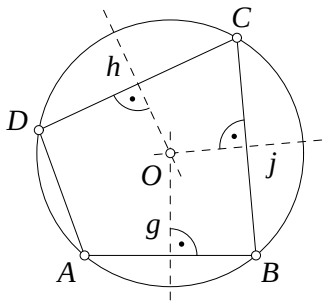
V.21 *Beweis:* (Bild) In einem Sehnenviereck liegen dessen Eckpunkte A, B, C, D sämtlich auf dem Umkreis k. Ziehen wir von dessen Mittelpunkt O Verbindungslinien zu den Eckpunkten, so entstehen vier gleichschenklige Dreiecke AOB, BOC, COD und DOA, deren gleich lange Schenkel die Länge R (Radius des Umkreises von $ABCD$) haben. Daraus folgt, daß die zugehörigen Basiswinkel in jedem dieser Dreiecke gleich groß sind:

$$\measuredangle OAB = \measuredangle ABO \equiv \alpha, \quad \measuredangle OBC = \measuredangle BCO \equiv \beta,$$
$$\measuredangle OCD = \measuredangle CDO \equiv \gamma, \quad \measuredangle ODA = \measuredangle DAO \equiv \delta.$$

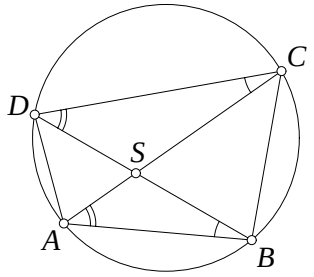


Aus dem Bild lesen wir ab, daß die Summe der Innenwinkel in $ABCD$ nun $2(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 360°$ beträgt. Daher ist $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 180°$, und dies ist gerade die Summe der Größen gegenüberliegender Innenwinkel. □

V.22 *Beweis:* (Bild) Aus der Eigenschaft der Mittelsenkrechten gleichschenklige Dreiecke zu erzeugen wissen wir, daß für O als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten g (von AB) und h (von CD) die Gleichungen $AO = BO$ und $CO = DO$ gelten. Es bleibt also, $BO = CO$ oder $DO = AO$ zu zeigen. Dies gelingt uns, wenn wir eine dritte Mittelsenkrechte, etwa j (von BC), hinzuziehen. Dann sei $O_1 \equiv g \cap j$ der Umkreismittelpunkt von $\triangle ABC$ und $O_2 \equiv j \cap h$ derjenige von $\triangle BCD$. Da aber beide Dreiecke denselben Umkreis haben, muß $O_1 = O_2 = O$ und damit auch $AO = BO = CO = DO$ sein. □



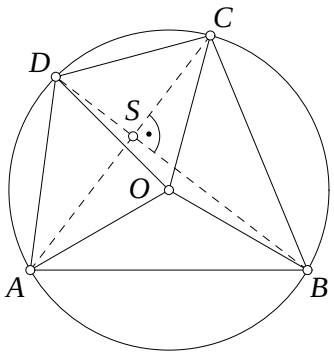
V.23 *Beweis:* (Bild) Betrachten wir etwa die Dreiecke ABS und DCS, wobei S der Schnittpunkt beider Diagonalen ist. Es genügt dann zu zeigen, daß beide Dreiecke in allen drei Winkeln übereinstimmen. Für die Winkel $\measuredangle ASB = \measuredangle DSC$ ist dies der Fall, da sie Scheitelwinkel sind. Ebenso gilt $\measuredangle BAC = \measuredangle BDC$ bzw. $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD$, die jeweils gleiche Peripheriewinkel über den Sehnen BC bzw. AD sind. □



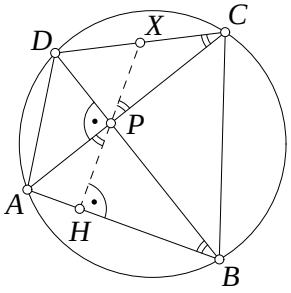
V.24 *Beweis:* (Bild) Wir nennen den Schnittpunkt der Diagonalen des Sehnenvierecks S. Dann ist $\measuredangle AOB$ als Zentriwinkel über der Sehne AB doppelt so groß wie der Peripheriewinkel $\measuredangle ACB = \measuredangle SCB$. Ebenso gilt $\measuredangle COD = 2\measuredangle CBD = 2\measuredangle CBS$. Nach Voraussetzung ist das Dreieck BCS rechtwinklig, somit folgt

$$90° = \measuredangle SCB + \measuredangle CBS = \frac{1}{2}(\measuredangle AOB + \measuredangle COD)$$

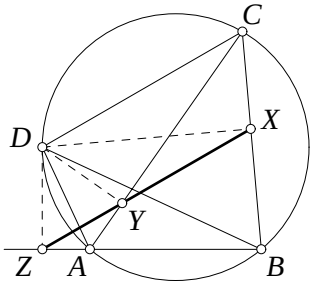
und daraus unmittelbar die Behauptung. □



V.25 *Beweis:* (Bild) AC und BD seien die sich senkrecht in P schneidenden Diagonalen des Sehnenvierecks $ABCD$; die Gerade durch H, P (senkrecht zu AB) schneide CD in X. Dann sind $\triangle APH$ und $\triangle ABP$ ähnliche Dreiecke und es gilt: $\measuredangle CPX = \measuredangle APH = \measuredangle ABP = \measuredangle ABD = \measuredangle ACD = \measuredangle PCX$. Somit ist $\triangle PXC$ gleichschenklig. Analog zeigen wir, daß auch $\triangle PXD$ gleichschenklig ist, also $XC = XP = XD$. □



V.26 *Beweis:* (Bild) Wir nehmen ein Dreieck ABC sowie einen weiteren Punkt D auf dessen Umkreis, so daß $ABCD$ tatsächlich ein Sehnenviereck ist. Nach Aufgabe D.45 liegen die Fußpunkte X, Y, Z der Lote von D auf der Simson-Geraden XYZ, für die als zur Strecke entartetes Lotfußpunktdreieck gerade die Dreiecksungleichung zur Gleichung wird. Die Strecken XY, YZ, ZX sind nach Aufgabe D.81:

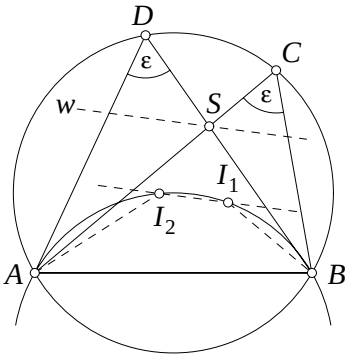


$$XY = \frac{AB \cdot CD}{2R}, \quad YZ = \frac{BC \cdot AD}{2R}, \quad XZ = \frac{AC \cdot BD}{2R},$$

wobei R der Radius des umschriebenen Kreises ist. Addition aller drei Gleichungen und Multiplikation mit $2\,R$ ergibt die Behauptung. □

V.27 *Beweis:* (Bild) Wir bezeichnen die Winkel $\measuredangle CAB \equiv \alpha$, $\measuredangle CBA \equiv \beta$, $\measuredangle DAB \equiv \gamma$ und $\measuredangle DBA \equiv \delta$; der Inkreismittelpunkt von $\triangle ABC$ sei I_1, der von $\triangle ABD$ entsprechend I_2. Damit ist

$$\measuredangle I_1AB = \frac{\alpha}{2},\ \measuredangle I_1BA = \frac{\beta}{2},\ \measuredangle I_2AB = \frac{\gamma}{2},\ \measuredangle I_2BA = \frac{\delta}{2}.$$



Nach dem Peripheriewinkelsatz ist $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB \equiv \varepsilon$ und demnach

$$\begin{aligned}\measuredangle AI_1B &= 180^\circ - \frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= 180^\circ - \frac{\gamma+\delta}{2} = \measuredangle AI_2B \qquad \text{(V.105)}\end{aligned}$$

(vgl. Aufgabe D.9); somit ist auch ABI_1I_2 ein Sehnenviereck. Wir berechnen nun den Winkel η zwischen den Geraden I_1I_2 und AB (vgl. Aufgabe V.8):

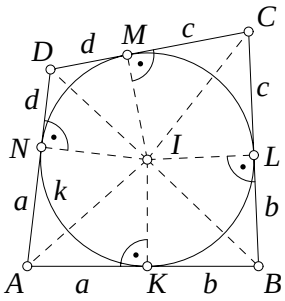
$$\eta \equiv |180^\circ - \measuredangle I_1I_2A - \measuredangle I_2AB| = \left|180^\circ - (\measuredangle I_1I_2B + \measuredangle AI_2B) - \frac{\gamma}{2}\right| = \frac{|\beta-\gamma|}{2}.$$

Dabei wurde (V.105) und $\measuredangle I_1I_2B = \measuredangle I_1AB = \frac{1}{2}\alpha$ (Peripheriewinkel über BI_1) benutzt. Andererseits ist der Winkel zwischen w und SB $\frac{1}{2}(\alpha+\delta)$ (d. i. die Hälfte des Außenwinkels $\measuredangle BSC$ im $\triangle ABS$), der Winkel zwischen w und der Geraden AB schließlich

$$\left|180^\circ - \left(180^\circ - \alpha - \delta + \frac{\alpha+\delta}{2}\right) - \alpha\right| = \frac{|\delta-\alpha|}{2} = \eta.$$

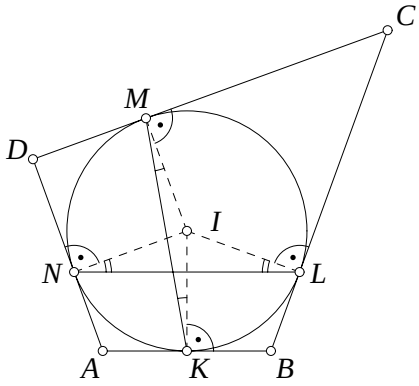
Die beiden Geraden w und I_1I_2 verlaufen daher parallel. □

V.31 *Beweis:* (Bild) Wir bezeichnen die Berührungspunkte der Seiten des Tangentenvierecks $ABCD$ mit dem Kreis k mit K, L, M, N. Im $\triangle AIK$ steht der Berührungsradius IK stets senkrecht auf dem Tangentenabschnitt AK; es ist somit rechtwinklig. Das gleiche gilt für $\triangle AIN$. Beide Dreiecke sind darüber hinaus kongruent nach Kongruenzsatz SSW, da sie die Seite AI gemeinsam haben, die Seiten $IK = IN$ gleich lang sind und in den Winkeln $\measuredangle IKA = \measuredangle INA = 90^\circ$ übereinstimmen. Somit sind insbesondere ihre Seiten $AK = AN \equiv a$ gleich lang. Analog zeigen wir $BK = BL \equiv b$, $CL = CM \equiv c$, $DM = DN \equiv d$. Die Summe der Längen gegenüberliegender Seiten ist daher $AB + CD = a + b + c + d = BC + DA$. □



V.33 *Beweis:* (Bild) Wenn wir die Berührungssehnen des Tangentenvierecks $ABCD$ mit KM und LN bezeichnen, lautet die Behauptung

$$\measuredangle BKM = \measuredangle CMK \quad \text{und} \quad \measuredangle CLN = \measuredangle DNL.$$



Dies wird sofort offensichtlich, wenn wir erkennen, daß die Dreiecke IKM und ILN wegen $IK = IL = IM = IN \equiv r$ (Berührungsradius) gleichschenklig sind und die Berührungsradien senkrecht auf den Seiten des Tangentenvierecks stehen. Damit ist

$$\measuredangle BKM = 90^\circ + \measuredangle IKM = 90^\circ + \measuredangle IMK = \measuredangle CMK;$$

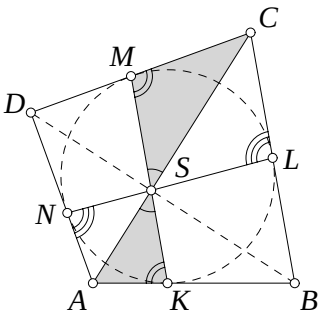
analog folgt die zweite behauptete Winkelbeziehung. Gleiches gilt natürlich auch für die anderen beiden Vierecke $AKMD$ und $BLNA$, wenn die Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke jeweils von 90° subtrahiert werden. □

Bemerkung: Dieser Satz kann somit auch folgendermaßen formuliert werden:

Die an den entgegengesetzten Seiten einer (diagonalen) Berührungssehne gelegenen Winkel in einem Tangentenviereck sind stets Supplementwinkel.

V.34 *Beweis:* (Bild) S sei der Schnittpunkt der Diagonale AC mit der Sehne KM. Die Dreiecke AKS und CMS haben den Winkel bei S gemeinsam (Scheitelwinkel); darüber hinaus sind $\measuredangle AKS$ und $\measuredangle CMS$ Supplementwinkel (s. Aufgabe V.33). Mit Hilfe des Sinussatzes folgt daraus wegen $\sin\measuredangle AKS = \sin(180^\circ - \measuredangle CMS) = \sin\measuredangle CMS$

$$\frac{AK}{AS} = \frac{CM}{CS}.$$

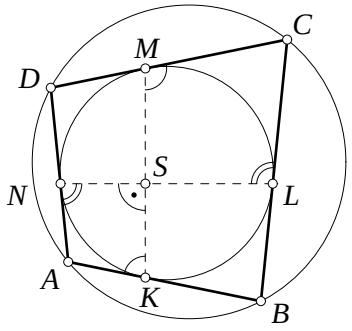


Weiterhin sind $AK = AN$ und $CL = CM$ jeweils gleiche Tangentenabschnitte, so daß wir obige Gleichung zu

$$\frac{AK}{AS} = \frac{CM}{CS} = \frac{CL}{CS} = \frac{AN}{AS} \tag{V.106}$$

erweitern können. Somit sind wir in den Dreiecken CLS und ANS angelangt, die ebenfalls Supplementwinkel enthalten: $\measuredangle CLS = 180^\circ - \measuredangle ANS$. Mit dem gleichen Argument unter Verwendung des Sinussatzes folgt nun aus (V.106): $\measuredangle ASN$ und $\measuredangle CSL$ sind entweder gleich oder supplementär. Letzteres scheidet aus. Da S auf AC liegt, muß daher auch S auf der Sehne LN liegen. Analog können wir (beginnend mit den Dreiecken BLS und DNS) zeigen, daß auch die andere Diagonale durch S geht. □

V.41 *Beweis:* (Bild) Die Berührungspunkte auf den Seiten AB, BC, CD, DA mit dem einbeschriebenen Kreis seien in dieser Reihenfolge K, L, M, N; der Schnittpunkt der Berührungssehnen KM und LN heiße S. Um zu zeigen, daß $KM \perp LN$ eine *notwendige* Bedingung für die Existenz eines Sehnentangentenvierecks ist, wenden wir auf die beiden Vierecke $AKSN$ und $CMSL$ den Satz von der Winkelsumme im Viereck an, wobei wir die Winkel an den Viereckspunkten ausnahmsweise durch Überstreichen der Eckbuchstaben bezeichnen:



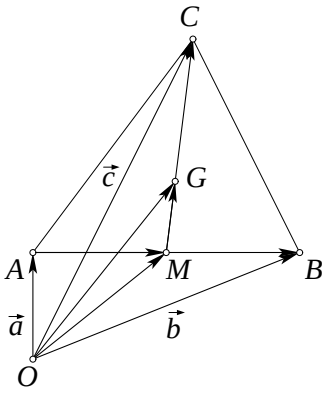
$$\overline{A} + \overline{K} + \overline{S} + \overline{N} = 360°, \quad \overline{C} + \overline{M} + \overline{S} + \overline{L} = 360°$$

Da die an den entgegengesetzten Seiten der Berührungssehnen KM und LN gelegenen Winkel $\overline{K} + \overline{M} = 180°$ bzw. $\overline{L} + \overline{N} = 180°$ nach Aufgabe V.23 Supplementwinkel sind, folgt durch Addition der beiden obigen Gleichungen

$$\overline{A} + \overline{C} + 2\overline{S} = 360°. \tag{V.107}$$

Schließlich muß noch eine Eigenschaft des Sehnenvierecks $ABCD$ ins Spiel kommen, und diese ist natürlich $\overline{A} + \overline{C} = 180°$. Damit und aus (V.107) folgt $\overline{S} = 90°$. □
Bemerkung: Daß $KM \perp LN$ auch eine *hinreichende* Bedingung dafür, daß ein Tangentenviereck $ABCD$ auch ein Sehnentangentenviereck ist, folgt aus (V.107) jetzt mit $\overline{S} = 90°$: $\overline{A} + \overline{C} = 180°$. Dies ist nur für ein Sehnenviereck $ABCD$ erfüllt.

LÖSUNGEN: METHODEN



M.1 (Bild) Wir bezeichnen die Ortsvektoren zu den drei Eckpunkten A, B, C in einem beliebig festgelegten Koordinatensystem mit dem Ursprung O mit $\overrightarrow{OA} \equiv \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} \equiv \boldsymbol{b}$ und $\overrightarrow{OC} \equiv \boldsymbol{c}$. Vom Schwerpunkt G eines Dreiecks ist bekannt, daß er jede Seitenhalbierende im Verhältnis $2:1$ teilt, wobei der größere Teil der Abstand zum Eckpunkt ist (vgl. Aufgabe D.10). Wählen wir zur Berechnung beispielsweise die Seitenhalbierende von AB mit deren Mittelpunkt M, so erhalten wir für den Ortsvektor von M:

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}), \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).$$

Der Vektor entlang der Seitenhalbierenden MC ist dann

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM} = \boldsymbol{c} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \quad \text{und somit} \quad \overrightarrow{MS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MC} = \frac{1}{3}\boldsymbol{c} - \frac{1}{6}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).$$

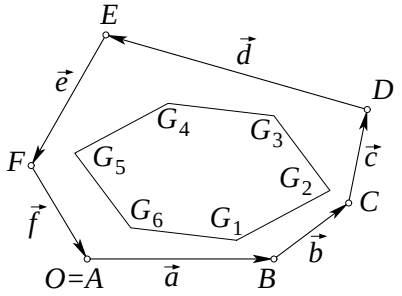
Für den Ortsvektor von G finden wir schließlich

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}).$$

Die Lage des Schwerpunkts eines Dreiecks ist somit durch das arithmetische Mittel der Ortsvektoren der Eckpunkte bestimmt.

M.2 *Beweis:* (Bild) Bezeichnen wir die Seiten des unregelmäßigen Sechsecks $ABCDEF$ nacheinander mit den Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$ und behalten dabei den mathematisch positiven Umlaufsinn bei, so verschwindet (da der Polygonzug geschlossen ist) deren Vektorsumme:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{e} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}. \tag{M.101}$$



Wird der Eckpunkt A als Ursprung O eines Koordinatensystems gewählt, so erhalten wir den Schwerpunkt G_1 des von den Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten $\triangle ABC$ als arithmetisches Mittel der drei Ortsvektoren $\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ (vgl. Aufgabe M.1):

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{3}.$$

Analog erhalten wir für die Schwerpunkte der anderen Dreiecke

$$\overrightarrow{OG_2} = \boldsymbol{a} + \frac{2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}}{3}, \quad \overrightarrow{OG_3} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \frac{2\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}}{3}, \quad \overrightarrow{OG_4} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \frac{2\boldsymbol{d} + \boldsymbol{e}}{3},$$
$$\overrightarrow{OG_5} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} + \frac{2\boldsymbol{e} + \boldsymbol{f}}{3}, \quad \overrightarrow{OG_6} = \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{f}}{3}.$$

Daraus folgen durch Differenzbildung und unter Beachtung von (M.101) die Vektoren der Seiten des inneren Sechsecks:

$$\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}, \qquad \overrightarrow{G_2G_3} = \frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}}{3}, \qquad \overrightarrow{G_3G_4} = \frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}}{3},$$
$$\overrightarrow{G_4G_5} = \frac{\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}}{3}, \qquad \overrightarrow{G_5G_6} = \frac{\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}+\boldsymbol{a}}{3}, \qquad \overrightarrow{G_6G_1} = \frac{\boldsymbol{f}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{3},$$

wobei die zu gegenüberliegenden Seiten gehörigen Ausdrücke jeweils untereinander stehen. Wegen (M.101) ist also $\overrightarrow{G_1G_2} + \overrightarrow{G_4G_5} = \overrightarrow{G_2G_3} + \overrightarrow{G_5G_6} = \overrightarrow{G_3G_4} + \overrightarrow{G_6G_1} = \mathbf{0}$. Dies sind genau die Bedingungen dafür, daß gegenüberliegende Seiten parallel sind und die gleiche Länge haben. □

M.3 *Beweis:* Die Bedingung, daß die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, lautet in Vektorschreibweise

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{ab}+\boldsymbol{cd}-\boldsymbol{bc}-\boldsymbol{ad} = 0. \tag{M.102}$$

a) Für die andere Bedingung finden wir entsprechend

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})^2 = (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2 + (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})^2,$$

die ausmultipliziert auf

$$a^2+b^2+c^2+d^2-2\,(\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{cd}) = b^2+c^2+a^2+d^2-2\,(\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ad}) \quad \text{oder}$$
$$\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{cd} = \boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ad}.$$

führt. Dies ist identisch mit (M.102); beide Gleichungen lassen sich also durch äquivalente Umformungen ineinander überführen. b) Ähnlich wie unter a) läßt sich hier mit Hilfe von Aufgabe M.1 die Gleichung

$$\left|\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2} - \frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}}{2}\right| = \left|\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2} - \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}}{2}\right| \quad \text{bzw.} \quad |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}| = |\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}|$$

aufstellen. Wenn die Längen gleich sein sollen, müssen auch deren Quadrate gleich sein:

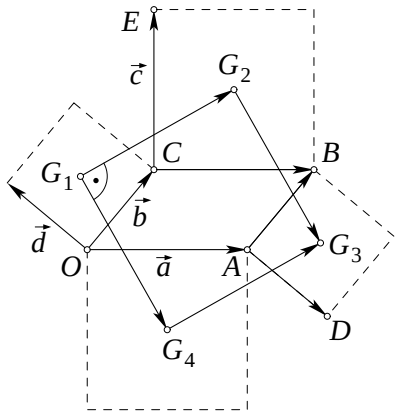
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})^2 = (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})^2.$$

Weiteres Ausmultiplizieren und Vereinfachen führt ebenfalls auf (M.102). □

M.4 *Beweis:* Es ist

$$\begin{aligned} BC^2+AD^2-AB^2-CD^2 &= (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})^2 \\ &= 2\,(\boldsymbol{cd}+\boldsymbol{ab}-\boldsymbol{bc}-\boldsymbol{ad}) \\ &= 2\,(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b}) \\ &= 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}. \ \square \end{aligned}$$

M.8 *Beweis:* (Bild) Das Parallelogramm sei $OABC$; wir bezeichnen die Vektoren, die das Parallelogramm aufspannen mit $\overrightarrow{OA} \equiv \boldsymbol{a}$ und $\overrightarrow{OC} \equiv \boldsymbol{b}$, die dazu senkrechten Vektoren mit $\boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{d}$. Für die Mittelpunkte der Aufsatzquadrate, die gleichzeitig deren Schwerpunkte sind, können wir aus dem Bild die Gleichungen



$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}), \quad \overrightarrow{OG_2} = \boldsymbol{b} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}),$$

$$\overrightarrow{OG_3} = \boldsymbol{a} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}), \quad \overrightarrow{OG_4} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$$

ablesen. Daraus folgt durch Differenzbildung

$$\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}) = \overrightarrow{G_4G_3} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{G_1G_4} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}) = \overrightarrow{G_2G_3}.$$

Damit ist schon nachgewiesen, daß $G_1G_2G_3G_4$ ein Parallelogramm ist. Um zu zeigen, daß es sogar ein Quadrat ist, genügt es, $\overrightarrow{G_1G_2}\cdot\overrightarrow{G_1G_4} = 0$ (rechter Winkel) und $|\overrightarrow{G_1G_2}| = |\overrightarrow{G_1G_4}|$ (gleiche Länge) zu überprüfen. Für das Skalarprodukt erhalten wir:

$$\overrightarrow{G_1G_2}\cdot\overrightarrow{G_1G_4} = \frac{1}{4}\big[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\big]\cdot\big[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\big] = \frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})^2-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2}{4}.$$

Nun gilt offenbar $\triangle OAD \cong OCE$ nach Kongruenzsatz SWS wegen $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{c}|$, $|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{d}|$ und $\measuredangle OAD = \measuredangle OCE$; also $OD = |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}| = OE = |\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$ und daher $\overrightarrow{G_1G_2}\cdot\overrightarrow{G_1G_4} = 0$. Schließlich ist

$$|\overrightarrow{G_1G_2}|^2 = \frac{1}{4}\big[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\big]^2 = \frac{1}{4}\left[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})^2+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2+2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\right],$$

$$|\overrightarrow{G_1G_4}|^2 = \frac{1}{4}\big[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\big]^2 = \frac{1}{4}\left[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})^2+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2-2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\right].$$

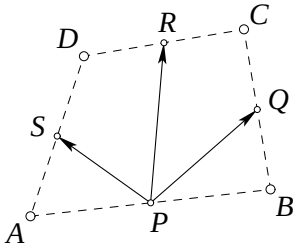
Beide Ausdrücke sind gleich, wenn

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}-\boldsymbol{bd}-\boldsymbol{cd} = 0,$$

welches tatsächlich wegen $\boldsymbol{ac} = 0$ und $\boldsymbol{bd} = 0$ (da $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{d}$) sowie $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{cd}$ (da $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{c}|$, $|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{d}|$ und $\measuredangle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \measuredangle(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$) der Fall ist. □

M.9 *Beweis:* (Bild) Die Mittelpunkte P, Q, R, S der Verbindungsstrecken werden durch die Vektoren $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, $\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, $\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})$ und $\frac{1}{2}(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a})$ beschrieben, wenn wir die vier Punkte A, B, C, D durch die Ortsvektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ bezeichnen. Die Beweisidee ist nun folgende: $PQRS$ ist genau dann *planar*, falls die Dreiecke PQR und PQS in derselben Ebene liegen. Dies ist der Fall, wenn die Flächenvektoren, ausgedrückt durch die Vektorprodukte $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ und $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PS}$, *parallel* sind. Rechnen wir also die Vektoren aus:

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\right] = \frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}),$$
$$\overrightarrow{PR} = \frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\right] = \frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),$$
$$\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\right] = \frac{1}{2}(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b}),$$



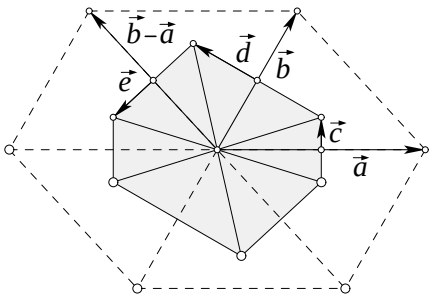
woraus für das erste Vektorprodukt mit den Regeln der Vektoralgebra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} &= \frac{1}{4}\left[(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\right] = \frac{1}{4}\left[\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b})\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b})\right].\end{aligned}$$

folgt. Dies ist mit den obigen Gleichungen genau $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PS}$. Beide Flächenvektoren sind also nicht nur parallel, sondern sogar gleich, was beweist, daß sich die Diagonalen halbieren und $PQRS$ demzufolge tatsächlich ein ebenes Parallelogramm ist. □

M.10 *Beweis:* (Bild) Wir zerlegen die WSZ in drei Paare kongruenter Dreiecke und führen neben den Basisvektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, die das Punktgitter aufspannen, noch die Hilfsvektoren $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ und $\boldsymbol{e}$ wie im Bild gezeigt ein. Nun können wir die Flächeninhalte der Dreiecke als Beträge der Vektorprodukte $\boldsymbol{A}_1 \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{A}_2 \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$ und $\boldsymbol{A}_3 \equiv [\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})]\times\boldsymbol{e}$ betrachten. Für die gesamte Fläche $\boldsymbol{A} \equiv 2(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3)$ der WSZ erhalten wir somit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= 2\left[\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}}{2}+\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}}{2}+\frac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{e}}{2}\right]\\ &= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{e})-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{e})\\ &= \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{e})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}).\end{aligned}$$

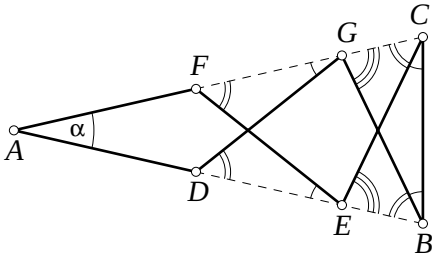


Aus dem Bild ist zu erkennen, daß $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{e} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$ gilt, so daß

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}\times\frac{\boldsymbol{b}}{2}+\boldsymbol{b}\times\frac{-\boldsymbol{a}}{2} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

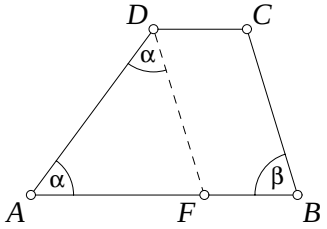
wird. Dies ist genau der Flächenvektor, der von der Elementarzelle aufgespannt wird. □

M.11 (Bild) Die Dreiecke ADG und AFE sind gleichschenklig, haben also gleich große Basiswinkel $\measuredangle DGA = \measuredangle FEA = \alpha$. Die Winkel $\measuredangle BDG$ und $\measuredangle CFE$ sind Außenwinkel dieser gleichschenkligen Dreiecke und somit von der Größe 2α. Ebenso sind $\triangle DGB$ und $\triangle FEC$ gleichschenklig, woraus $\measuredangle DBG = \measuredangle FCE = 2\alpha$ folgt. Da die Innenwinkelsumme dieser Dreiecke $180° = \pi$ ist, finden wir weiter: $\measuredangle FEC = \measuredangle DGB = \pi - 4\alpha$ und daraus $\measuredangle CEB = \measuredangle BGC = 3\alpha$. Schließlich sind auch $\triangle ECB$ und $\triangle GBC$ gleichschenklig, also $\measuredangle ECB = \measuredangle GBC = 3\alpha - 2\alpha = \alpha$. Jetzt können wir die Innenwinkelsumme von $\triangle ABC$ berechnen: $3\alpha + 3\alpha + \alpha = 7\alpha = \pi$ oder $\alpha = \frac{1}{7}\pi = \frac{1}{7} \cdot 180° = 25{,}7°$.



Bemerkung: Mit der abgebildeten Figur läßt sich somit auf einfache Weise ein regelmäßiges 14-Eck (und damit auch ein regelmäßiges Siebeneck) zusammensetzen.

M.12 (Bild) Das Trapez zerlegen wir in ein Parallelogramm $FBCD$ und ein Dreieck AFD. In dem Parallelogramm ist $BC + CD = DF + FB$. Damit diese Summe gleich $AB = AF + FB$ wird, muß $DF = AF$ gelten, d. h., $\triangle AFD$ ist gleichschenklig mit der Basis AD. Bezeichnen wir $\measuredangle DAF \equiv \alpha$ und $\measuredangle ABC \equiv \beta$, so ist $\measuredangle DFB$ Supplementwinkel von β und gleichzeitig Außenwinkel von $\triangle AFD$. Daraus folgt: $2\alpha + \beta = 180°$.



Bemerkung: Selbstverständlich können wir die Zerlegung statt mit $DF \parallel CB$ auch völlig analog mit $CF \parallel DA$ durchführen.

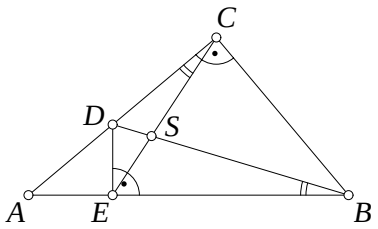
M.13 *Beweis:* (Bild) Wegen $\measuredangle BCD = \measuredangle BED = 90°$ ist $BCDE$ ein Sehnenviereck. Somit kann der Peripheriewinkelsatz für die Sehne DE angewendet werden:

$$\measuredangle EBD = \measuredangle ECD = \measuredangle SCD = 90° - \measuredangle BCS,$$

$$\measuredangle BCE = \measuredangle BCS = 90° - \measuredangle EBD = 90° - \measuredangle ABD.$$

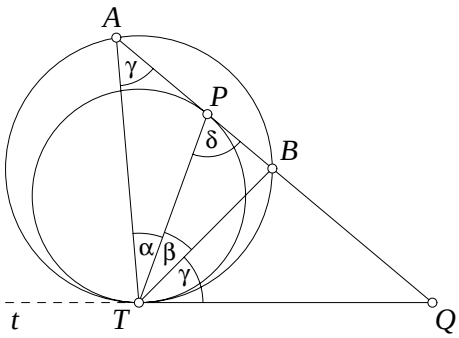
Nach Voraussetzung ist das $\triangle CBS$ gleichschenklig bei B; also $\measuredangle BCS = \measuredangle BSC$ und daher

$$\measuredangle CBD = \measuredangle CBS = 180° - 2\measuredangle BCS = 2\measuredangle ABD. \quad \square$$



M.14 *Beweis:* (Bild) Die Verlängerung von AB treffe die Tangente t durch T in Q; die Winkel α, β, γ und δ seien die im Bild angegebenen. Dann sind QT und QP Tangentenabschnitte des inneren Kreises mit gleicher Länge, woraus folgt, daß $\triangle TQP$ gleichschenklig ist und damit gleich große Basiswinkel hat:

$$\beta + \gamma = \delta. \tag{M.103}$$



Weiterhin sind bezüglich des äußeren Kreises TB Sehne und TQ ein Tangentenabschnitt. Nach dem Sehnen-Tangentenwinkel-Satz ist also

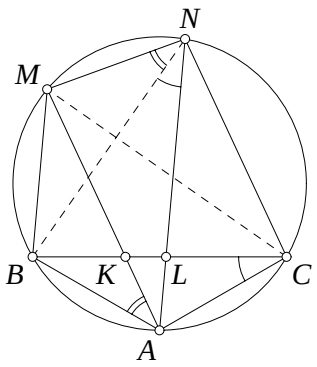
$$\measuredangle TAB = \measuredangle BTQ = \gamma.$$

Nun ist $\measuredangle TPQ = \delta$ Außenwinkel im $\triangle ATP$ und somit gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel:

$$\alpha + \gamma = \delta. \tag{M.104}$$

Aus (M.103) und (M.104) folgt unmittelbar, wie behauptet, $\alpha = \beta$. □

M.15 *Beweis:* (Bild) Kurz und bündig:

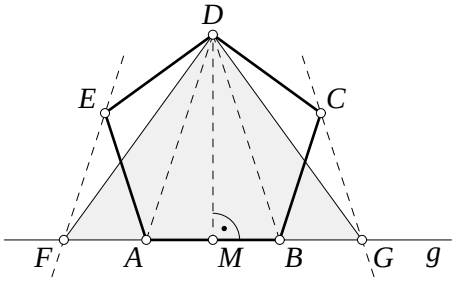


$$\begin{aligned}
&\measuredangle BCA + \measuredangle BNM \\
&= \measuredangle BNA + \measuredangle BNM \quad \text{(Peripheriewinkel)} \\
&= \measuredangle MNL \quad \text{(Innenwinkel im Sehnenviereck)} \\
&= 180^\circ - \measuredangle MKL \quad \text{(lt. Voraussetzung)} \\
&= 180^\circ - \measuredangle BKA \quad \text{(Scheitelwinkel)} \\
&= \measuredangle ABK + \measuredangle BAK \quad \text{(Winkelsumme)} \\
&= \measuredangle ABC + \measuredangle BAM \quad \text{(Verlängerung)} \\
&= \measuredangle ABC + \measuredangle BNM \quad \text{(Peripheriewinkel).}
\end{aligned}$$

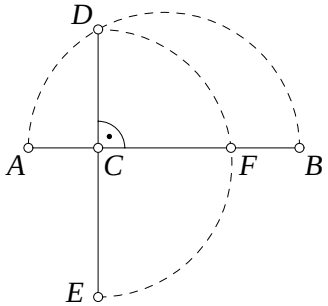
Aus der ersten und letzten Gleichung folgen gleiche Basiswinkel $\measuredangle BCA = \measuredangle ABC$, d. h., $\triangle ABC$ ist tatsächlich gleichschenklig. □

M.21 Wir wählen die Gerade g durch die Seite AB des regelmäßigen Fünfecks als Basislinie unserer ersten Verwandlung (Bild a). Die Eckpunkte C und E bringen wir zum Verschwinden, indem die Parallelen zu AD durch E und BD durch C mit g zum Schnitt gebracht werden. Offensichtlich ist dann $[DFA] = [DEA] = [DCB] = [DGB]$, womit wir das Fünfeck bereits in das (gleichschenklige) Dreieck DFG verwandelt haben.

a)



b)



Im zweiten Teil ist letzteres in ein gleichseitiges Dreieck umzuwandeln. Dazu müssen wir etwas rechnen: $\triangle DFG$ habe Schenkel der Länge $DF = DG = b$, die Höhe $DM = h$ sowie die Basislänge $FG = c$, unser gleichseitiges Dreieck die Seitenlänge a. Dann gilt mit den bekannten Flächenformeln und dem Satz des PYTHAGORAS

$$2\Delta = ch = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \qquad \text{und} \qquad b^2 = h^2 + \frac{c^2}{4}.$$

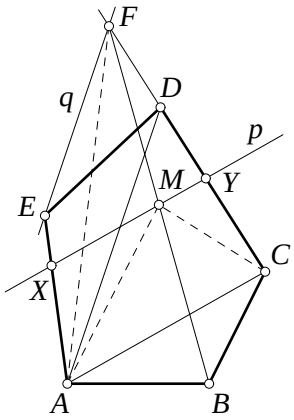
Eliminieren wir h aus beiden Gleichungen, erhalten wir nach kurzer Rechnung:

$$a^2 = c\sqrt{\frac{(2b+c)(2b-c)}{3}} \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{2b+c}{4}\right)\left(\frac{2b-c}{3}\right)}. \qquad \text{(M.105)}$$

Mit Hilfe von Aufgabe A.14 finden wir problemlos eine Konstruktion von $\frac{1}{2}a$ (Bild b†). *Erklärung:* Die Wurzel in (M.105) ist die mittlere Proportionale CD aus den Faktoren AC und BC; das gesuchte $\frac{1}{2}a = CF$ ebenso mittlere Proportionale aus CD und $CE = \frac{1}{2}c$.

†Der einzige Grund, warum wir $a/2$ anstelle a konstruieren, ist, daß das maßstabgerechte Bild b sonst zu groß geworden wäre.

M.22 (Bild) Die Aufgabe vereinfacht sich, wenn das Fünfeck $ABCDE$ in ein flächengleiches Viereck umgewandelt wird. Das dabei entstehende Viereck kann dann in zwei Dreiecke zerlegt werden, die sich einfach in ihrem Flächeninhalt halbieren lassen.
a) Man gelangt damit zu folgender *Konstruktion:*
1. Es wird die Parallele q zu AD durch E konstruiert und mit der Verlängerung von CD im Punkt F zum Schnitt gebracht.
2. Man konstruiert den Mittelpunkt M der Strecke BF.
3. Es wird die Parallele p zu AC durch M konstruiert. Sie schneidet die Fläche des Fünfecks $ABCDE$ in einer Strecke XY.
Als Ergebnis der Konstruktion erhält man auf dieser Strecke zwischen X und Y die Menge aller Punkte P.

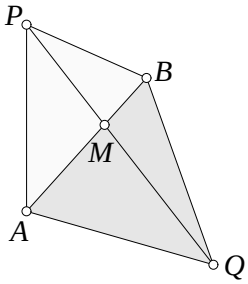


b) *Beweis:* Nach 3. ist $PM \parallel AC$, daher hat das $\triangle ACP$ den gleichen Flächeninhalt wie $\triangle ACM$. Also sind die Vierecke $ABCP$ und $ABCM$ flächengleich. Die Fläche von $ABCM$ ist gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ABM$ und $\triangle BCM$. Nach 2. haben diese Dreiecke jeweils einen halb so großen Flächeninhalt wie $\triangle ABF$ und $\triangle BCF$. Also ist das Viereck $ABCP$ halb so groß wie $ABCF$. Nach 1., also $EF \parallel AD$, hat das $\triangle ADF$ den gleichen Flächeninhalt wie $\triangle ADE$ und folglich $ABCF$ den gleichen Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$. Somit ist der Flächeninhalt von $ABCP$ halb so groß wie der von $ABCDE$ und daher so groß wie der von $CDEAP$. □

M.31 *Beweis:* Da beide Dreiecke PAB und PCD die gleiche Höhe haben, folgt die Behauptung aus der bekannten Formel $\Delta = \frac{1}{2}ch_c$ für den Flächeninhalt eines Dreiecks. □
Bemerkung: Natürlich gilt der Satz auch, wenn zwei Punkte zusammenfallen, also insgesamt drei Punkte auf einer Geraden liegen.

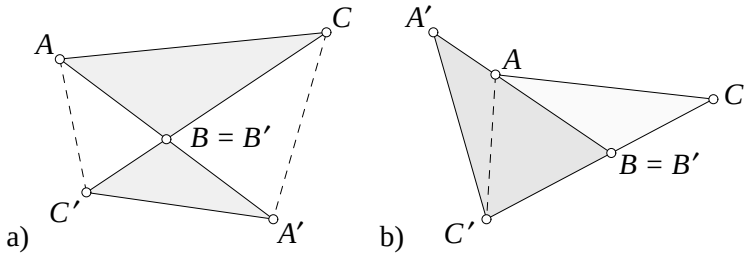
M.32 *Beweis:* (Bild) Wir wenden den Satz der gemeinsamen Höhen (s. Aufgabe M.31) auf die beiden Paare $\triangle PAM$, $\triangle QAM$ bzw. $\triangle PBM$, $\triangle QBM$ an:

$$\frac{[PAM]}{[QAM]} = \frac{PM}{QM} = \frac{[PBM]}{[QBM]} = \frac{[PBM]}{[QBM]} \frac{\left(1+\frac{[PAM]}{[PBM]}\right)}{\left(1+\frac{[QAM]}{[QBM]}\right)}$$
$$= \frac{[PBM]+[PAM]}{[QBM]+[QAM]} = \frac{[PAB]}{[QAB]}. \quad \square$$



Bemerkung: Häufig wird dieser Satz auch in der Form $[PAM]\cdot[QBM] = [PBM]\cdot[QAM]$ benutzt (**„Fliegen-Satz“**, da die gegenüberliegenden Dreiecke wie eine Fliege aussehen). Der Satz gilt auch, wenn P und Q auf derselben Seite von AB liegen, wobei dann M der Schnittpunkt der Verlängerung von PQ mit AB ist.

M.33 *Beweis:* (Bild) a) Werden die beiden Winkel $\measuredangle ABC$ und $\measuredangle A'B'C'$ so gezeichnet, daß sie Wechselwinkel bei B sind, so können wir den Satz der gemeinsamen Höhen (s. Aufgabe M.31) sowohl auf die Figur $AA'C$ als auch auf $CC'A'$ anwenden:

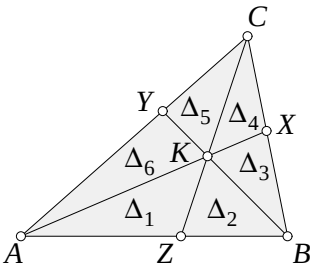


$$\frac{[ABC]}{[A'BC]} = \frac{AB}{A'B'} \quad \text{bzw.} \quad \frac{[A'BC]}{[A'B'C']} = \frac{BC}{B'C'}. \tag{M.106}$$

Multiplikation beider Gleichungen liefert die Behauptung. b) Im Fall von Supplementwinkeln werden beide als Nebenwinkel angeordnet und die zweimalige Anwendung des Satzes der gemeinsamen Seite führt wie in a) auf die behauptete Gleichung (M.106). $\square$

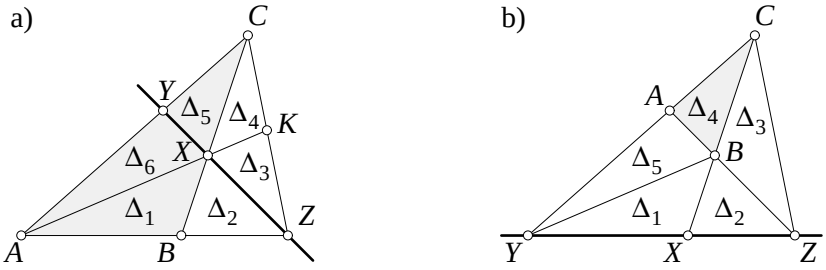
M.34 *Beweis:* (Bild) Die drei Ecktransversalen mögen sich in K schneiden und zerlegen die Dreiecksfläche in sechs Teilflächen, die wir mit Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$ bezeichnen. Nach dem Satz der gemeinsamen Höhen gelten nun folgende Gleichungen:

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{\Delta_5+\Delta_6+\Delta_1}{\Delta_3+\Delta_4+\Delta_2} = \frac{\Delta_5+\Delta_6}{\Delta_3+\Delta_4},$$
$$\frac{BX}{XC} = \frac{\Delta_3}{\Delta_4} = \frac{\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3}{\Delta_5+\Delta_6+\Delta_4} = \frac{\Delta_1+\Delta_2}{\Delta_5+\Delta_6},$$
$$\frac{CY}{YA} = \frac{\Delta_5}{\Delta_6} = \frac{\Delta_3+\Delta_4+\Delta_5}{\Delta_1+\Delta_2+\Delta_6} = \frac{\Delta_3+\Delta_4}{\Delta_1+\Delta_2}.$$



Multiplikation aller drei Gleichungen ergibt 1. $\square$

M.35 *Beweis:* In beiden Fällen, in denen die Gerade durch X, Y, Z die Dreieckseiten entweder zweimal (Bild a) oder gar nicht (Bild b) direkt (d. h. innerlich) teilt, können wir die Figur zu einem größeren unterteilten Dreieck erweitern. Wir erhalten im Fall a) — analog zum Beweis des Satzes von Ceva — wieder sechs Teilflächen Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$.



Die Sätze der gemeinsamen Seite bzw. Höhen liefern uns nun folgende drei Gleichungen:

$$\frac{AZ}{ZB} = -\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta_2}, \quad \frac{BX}{XC} = \frac{\Delta_2}{\Delta_3 + \Delta_4}, \quad \frac{CY}{YA} = \frac{\Delta_5}{\Delta_6} = \frac{\Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5}{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_6} = \frac{\Delta_3 + \Delta_4}{\Delta_1 + \Delta_2},$$

die gemeinsam multipliziert -1 ergeben. Im Fall b) kommen wir mit fünf Teilflächen Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$ aus, wobei zur Abkürzung $\Delta = \sum \Delta_i$ gesetzt wird:

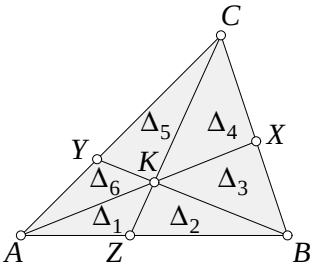
$$\frac{AZ}{ZB} = -\frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_5}{\Delta_1 + \Delta_2}, \quad \frac{BX}{XC} = -\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_4 + \Delta_5} = -\frac{\Delta_2}{\Delta_2 + \Delta_3} = -\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta},$$

$$\frac{CY}{YA} = -\frac{\Delta}{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_5}, \quad \text{so daß wiederum} \quad \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1. \ \square$$

M.36 *Beweis:* (Bild) Die zu beweisende Gleichung diktiert uns, wie wir vorzugehen haben: Für die Teilungsverhältnisse u, v, w lesen wir folgende Flächenverhältnisse ab:

$$u = \frac{AK}{KX} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta_3} = \frac{\Delta_5 + \Delta_6}{\Delta_4}, \qquad v = \frac{BK}{KY} = \frac{\Delta_3 + \Delta_4}{\Delta_5} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta_6},$$

$$w = \frac{CK}{KZ} = \frac{\Delta_5 + \Delta_6}{\Delta_1} = \frac{\Delta_3 + \Delta_4}{\Delta_2}.$$



Somit folgt mit $\Delta = \sum_i \Delta_i$

$$\frac{1}{1+u} = \frac{\Delta_3}{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3} = \frac{\Delta_4}{\Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6} = \frac{\Delta_3 + \Delta_4}{\Delta},$$

$$\frac{1}{1+v} = \frac{\Delta_5}{\Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5} = \frac{\Delta_6}{\Delta_6 + \Delta_1 + \Delta_2} = \frac{\Delta_5 + \Delta_6}{\Delta},$$

$$\frac{1}{1+w} = \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_5 + \Delta_6} = \frac{\Delta_2}{\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta}.$$

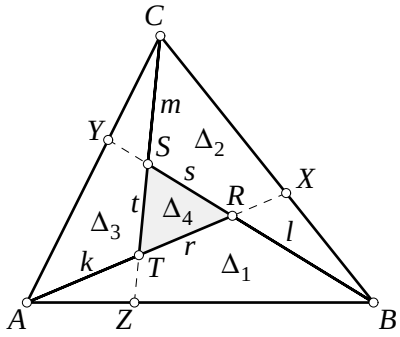
Die Summe der rechts stehenden Terme ist — wie behauptet — eins. $\square$
Bemerkung: Die angegebene Gleichung läßt sich auch als $uvw = u + v + w + 2$ schreiben.

M.37 *Beweis:* Da wir die Bezeichnungen der Flächeninhalte Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, in den Aufgaben M.34 und M.36 gleich gewählt haben (s. obiges Bild zur Lösung von Aufgabe M.36), können wir von dort folgende Gleichungen direkt übernehmen:

$$u = \frac{AK}{KX} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta_3} = \frac{\Delta_5 + \Delta_6}{\Delta_4} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_5 + \Delta_6}{\Delta_3 + \Delta_4},$$
$$\frac{1}{y} = \frac{AY}{YC} = \frac{\Delta_6}{\Delta_5} = \frac{\Delta_6 + \Delta_1 + \Delta_2}{\Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta_3 + \Delta_4},$$
$$z = \frac{AZ}{ZB} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{\Delta_5 + \Delta_6 + \Delta_1}{\Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_2} = \frac{\Delta_5 + \Delta_6}{\Delta_3 + \Delta_4}.$$

Die Gleichung $u = 1/y + z$ folgt offensichtlich. Durch zyklisches Vertauschen erhalten wir auch die beiden anderen Beziehungen. □
Bemerkung: Ist K der Schwerpunkt des Dreiecks, so gilt $x = y = z = 1$. Folglich ist $u = v = w = 2$, d. h., die Seitenhalbierenden werden durch K im Verhältnis $2 : 1$ geteilt (vgl. Aufgabe D.10).

M.38 *Beweis:* (Bild) Um das Flächenprinzip vorteilhaft anwenden zu können, müssen wir eine geeignete Zerlegung des Dreiecks ABC finden. Je weniger Teilflächen wir benötigen, desto übersichtlicher wird der Beweis. Es zeigt sich, daß wir außer $[RST] = \Delta_4$ lediglich 3 weitere Dreiecke betrachten müssen, deren Flächeninhalte wir mit $[ARB] = \Delta_1$, $[BSC] = \Delta_2$ und $[CTA] = \Delta_3$ bezeichnen. Außerdem sei $AT = k$, $BR = l$, $CS = m$, $TR = r$, $RS = s$ und $ST = t$. Jetzt wenden wir den Satz des gemeinsamen (Ergänzungs-) Winkels an und lesen folgende Gleichungen aus dem Bild ab:



$$\frac{\Delta_1}{\Delta_4} = \frac{(r+k)l}{rs}, \qquad \frac{\Delta_2}{\Delta_4} = \frac{(s+l)m}{st}, \qquad \frac{\Delta_3}{\Delta_4} = \frac{(t+m)k}{tr}. \tag{M.107}$$

Um die gegebenen Verhältnisse x, y, z ins Spiel zu bringen, bemühen wir den Satz von Menelaus: S, T, Z liegen auf einer Geraden und gleichzeitig auf den Dreieckseiten von $\triangle ABR$. Somit gilt

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BS}{SR} \cdot \frac{RT}{TA} = -1 \qquad \text{oder} \qquad z = \frac{AZ}{ZB} = \frac{RS}{BS} \cdot \frac{TA}{RT} = \frac{sk}{(s+l)r}. \tag{M.108a}$$

Durch zyklische Vertauschung von (x, y, z), (r, s, t) bzw. (k, l, m) finden wir weiterhin

$$x = \frac{tl}{(t+m)s}, \qquad y = \frac{rm}{(r+k)t}. \tag{M.108b,c}$$

Die Gleichungen (M.107) stellen ein lineares Gleichungssystem für k, l, m dar, dessen Lösung sich leicht errechnen läßt:

$$k = \frac{(xy + x + 1)zr}{1 - xyz}, \qquad l = \frac{(yz + y + 1)xs}{1 - xyz}, \qquad m = \frac{(zx + z + 1)yt}{1 - xyz}. \tag{M.109}$$

Nun werden erst (M.108) und anschließend (M.109) in die Ausdrücke (M.107) substituiert:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_4} = \frac{lm}{yst} = \frac{(yz+y+1)(zx+z+1)x}{(1-xyz)^2},$$

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_4} = \frac{mk}{ztr} = \frac{(zx+z+1)(xy+x+1)y}{(1-xyz)^2},$$

$$\frac{\Delta_3}{\Delta_4} = \frac{kl}{xrs} = \frac{(xy+x+1)(yz+y+1)z}{(1-xyz)^2}.$$

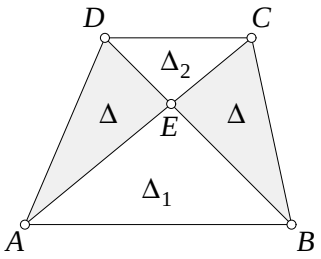
Aus der Addition aller drei Gleichungen folgt nach Ausmultiplizieren und erneutem Zusammenfassen

$$\frac{[ABC]}{[RST]} = 1 + \frac{\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3}{\Delta_4} = \frac{(xy+x+1)(yz+y+1)(zx+z+1)}{(1-xyz)^2}. \quad \square$$

Bemerkung: Für $x = y = z = n = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ wird das Verhältnis der Flächeninhalte

$$\frac{[RST]}{[ABC]} = \frac{(n-1)^2}{n^2+n+1} = \frac{1}{7},\ \frac{4}{13},\ \frac{3}{7},\ \frac{16}{31},\ \frac{25}{43}, \ldots.$$

M.39 (Bild) Wir schreiben zur Abkürzung $[ABE] = \Delta_1 = 72$ und $[CDE] = \Delta_2 = 50$. Nun gilt (da $ABCD$ ein Trapez ist): $[ABC] = [ABD] = \Delta_1 + [BEC] = \Delta_1 + [AED]$, also $[BEC] = [AED] = \Delta$. Der Satz der gemeinsamen Höhen liefert, angewandt auf die Diagonale AC:

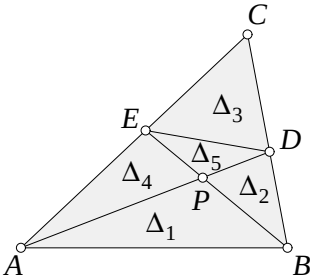


$$\frac{AE}{EC} = \frac{\Delta}{\Delta_2} = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

oder $\Delta^2 = \Delta_1\Delta_2 = 3\,600$ bzw. $\Delta = 60$. Somit ist $[ABCD] = \Delta_1 + \Delta_2 + 2\Delta = 242$.

M.40 *Beweis:* (Bild) Schreiben wir für die fünf Teildreiecke wie im Bild angegeben Δ_i mit $i = 1, 2, \ldots, 5$, so ist zu zeigen:

$$[\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4+\Delta_5]\Delta_5 = \Delta_1\Delta_3. \qquad \text{(M.110)}$$



Der Satz der gemeinsamen Höhen, angewandt auf die Dreiecke CED, EAD bzw. CEB, EAB, ergibt

$$\frac{CE}{EA} = \frac{\Delta_3}{\Delta_4+\Delta_5} = \frac{\Delta_2+\Delta_3+\Delta_5}{\Delta_1+\Delta_4} \quad \text{bzw.}$$

$$\Delta_2\Delta_4 + \Delta_2\Delta_5 + \Delta_3\Delta_4 + [\Delta_3+\Delta_4+\Delta_5]\Delta_5 = \Delta_1\Delta_3 + \Delta_3\Delta_4. \qquad \text{(M.111)}$$

Aus dem Viereck $ABDE$ lesen wir mit dem Fliegen-Satz (vgl. Bemerkung in der Lösung zu Aufgabe M.32) unmittelbar die Relation $\Delta_2\Delta_4 = \Delta_1\Delta_5$ ab, welche in (M.111) eingesetzt und nach Subtraktion von $\Delta_3\Delta_4$ die Behauptung (M.110) liefert. $\square$

M.41 *Beweis:* Mit den bisher üblichen Abkürzungen $u = PA/PX$, $v = PB/PY$, $w = PC/PZ$ lautet die zu beweisende Ungleichung $uv + vw + wu \geq 12$. Nun gilt nach dem Satz von Euler-Gergonne (s. Aufgabe M.36)

$$\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w} = 1 \qquad \text{oder} \qquad uvw = u + v + w + 2; \tag{M.112}$$

die darin auftretende Summe von Reziproken läßt sich mit der AM-HM Ungleichung (vgl. Aufgabe U.7) abschätzen:

$$(1+u+1+v+1+w)\left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w}\right) \geq 9. \tag{M.113}$$

Einsetzen von (M.113) in (M.112) liefert zunächst

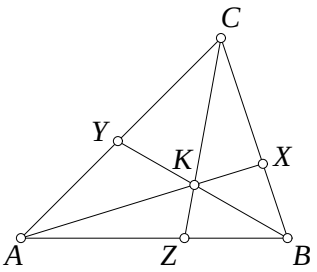
$$u + v + w \geq 6, \qquad \text{und} \qquad uvw \geq 8. \tag{M.114}$$

Für den letzten Schritt wenden wir die AM-GM Ungleichung (vgl. Aufgabe U.5) in Verbindung mit dem Zwischenergebnis (M.114) an:

$$uv + vw + wu \geq 3(uvw)^{\frac{2}{3}} \geq 3 \cdot 8^{\frac{2}{3}} = 12. \ \square$$

M.42 *Beweis:* (Bild) Wir beweisen den allgemeineren Fall, daß die angegebene Gleichung für *jeden beliebigen* Schnittpunkt K dreier Ecktransversalen AX, BY und CZ gilt. In der Notation von Aufgabe M.36 ist dann

$$\frac{AK}{AX} = \frac{u}{1+u}, \quad \frac{BK}{BY} = \frac{v}{1+v}, \quad \frac{CK}{CZ} = \frac{w}{1+w}.$$



Nach dem Satz von Euler-Gergonne gilt aber (s. Aufgabe M.36)

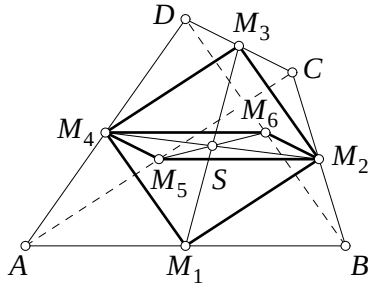
$$\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w} = 1,$$

so daß

$$\begin{aligned} 3 - 1 &= \left(\frac{1+u}{1+u} + \frac{1+v}{1+v} + \frac{1+w}{1+w}\right) - \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w}\right) \\ &= \frac{u}{1+u} + \frac{v}{1+v} + \frac{w}{1+w} = \frac{AK}{AX} + \frac{BK}{BY} + \frac{CK}{CZ} = 2. \ \square \end{aligned}$$

LÖSUNGEN: WETTBEWERBSAUFGABEN

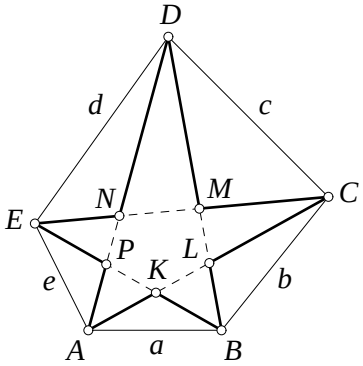
W.1 *Beweis:* (Bild) Wir können unsere Ausführungen mit dem Hinweis auf Aufgabe V.1 beträchtlich verkürzen, indem wir feststellen, daß $M_1M_2M_3M_4$ gerade das VARIGNON-Parallelogramm des Vierecks $ABCD$ ist. Gleiches gilt für $M_4M_5M_2M_6$, welches das VARIGNON-Parallelogramm des „überschlagenen“ Vierecks $DACB$ ist. Nun ist in beiden Parallelogrammen M_2M_4 gemeinsame Diagonale. Da sich Parallelogramm-Diagonalen in ihrem Schnittpunkt S stets halbieren, fallen somit die Schnittpunkte von M_2M_4 und M_1M_3 bzw. M_2M_4 und M_5M_6 in S zusammen. □



W.2 *Beweis:* (Bild) Wir bezeichnen die Seitenlängen des Fünfecks wie im Bild angegeben mit a, b, c, d, e sowie die Schnittpunkte der Diagonalen untereinander mit K, L, M, N, P. Es ist klar, daß uns nur die Dreiecksungleichungen schnell ans Ziel bringen.
a) Um die rechte Ungleichung $2u > s$ zu zeigen, müssen wir Teildreiecke finden, die aus jeweils zwei Seiten (zu u gehörend) und einer Diagonalen (zu s gehörend) bestehen:

$$a+b>AC, \quad b+c>BD, \quad c+d>CE,$$
$$d+e>DA, \quad e+a>EB.$$

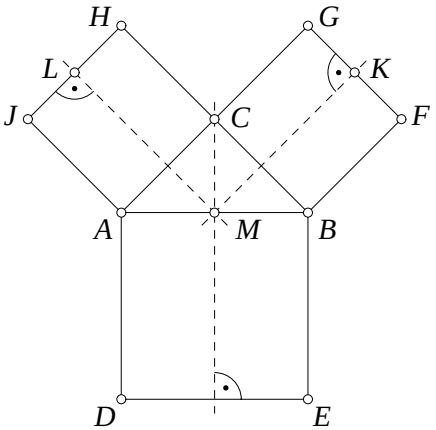
Durch Addition dieser Ungleichungen und mit $s \equiv AC + BD + CE + DA + EB$ folgt unmittelbar $2u > s$.
b) Bei der zweiten Ungleichung $u < s$ ist genau umgekehrt vorzugehen: Jetzt dürfen nur jeweils eine Seite auf der „Kleiner“seite der Ungleichung und Diagonalenlängen auf der „Größer“seite stehen:



$$a<AK+KB, \quad b<BL+LC, \quad c<CM+MD,$$
$$d<DN+NE, \quad e<EP+PA.$$

Die Summe der rechten Seiten $s' \equiv AK + KB + BL + LC + CM + MD + DN + NE + EP + PA$ ist nun offenbar kleiner als s, da an s der Umfang des kleinen eingeschlossenen Fünfecks $KLMNP$ fehlt. Mithin haben wir $u < s' < s$. □

W.3 (Bild) Der erste Schritt ist es herauszufinden, wo der Mittelpunkt M des Kreises liegen könnte, falls es ihn gibt. Nehmen wir also an, daß $DEFGHJ$ ein einem Kreis einbeschriebenes Sechseck ist. Dessen Seiten sind dann Sehnen dieses Kreises. Die Mittelsenkrechten aller dieser Sehnen müßten sich folglich in M treffen. Aufgrund der Symmetrie der Figur vermuten wir, daß M der Mittelpunkt der Strecke AB ist. *Beweis:* Dann sind die Trapeze $MBFE$, $MCGK$, $MCHL$ und $MAJL$ offensichtlich kongruent, und wir können den Radius $r \equiv MF = MG = MH = MJ$ nach dem Satz des PYTHAGORAS berechnen ($AC = BC \equiv a$):



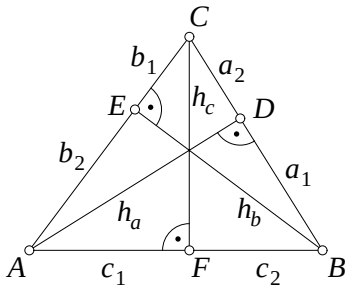
$$r = \sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}a.$$

Ebenso erhalten wir

$$MD = ME = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a\right)^2 + \left(\sqrt{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}a = \frac{\sqrt{10}}{2}a = r,$$

d. h., der Kreis existiert. □ Mit $a = 2$ beträgt der Radius somit $r = \sqrt{10}$.

W.4 *Beweis:* (Bild) In jedem spitzwinkligen $\triangle ABC$ gelten mit den üblichen Bezeichnungen a, b, c für die Seitenlängen und den weiteren Bezeichnungen im Bild nach dem Satz des PYTHAGORAS die Gleichungen



$$b^2 = c_1^2 + h_c^2 = a_2^2 + h_a^2, \tag{W.101}$$

$$c^2 = a_1^2 + h_a^2 = b_2^2 + h_b^2, \tag{W.102}$$

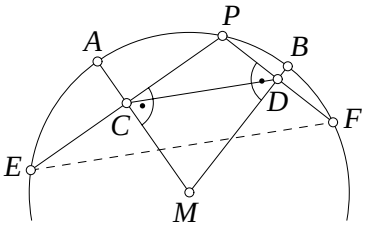
$$a^2 = b_1^2 + h_b^2 = c_2^2 + h_c^2. \tag{W.103}$$

Nach Addition der rechts stehenden Gleichungen und Subtraktion von $h_a^2 + h_b^2 + h_c^2$ folgt die behauptete Gleichung $c_1^2 + a_1^2 + b_1^2 = c_2^2 + a_2^2 + b_2^2$.

Ist für rechtwinklige Dreiecke der rechte Winkel etwa bei C, so gelten die zweite Gleichung in (W.101) wegen $a_2 = 0$, $h_a = b$ und die erste Gleichung in (W.103) wegen $b_1 = 0$, $h_b = a$ ebenfalls (und die Gleichungen (W.102) sind die gleiche Aussage wie $c^2 = a^2 + b^2$). □

Bemerkung: Die behauptete Gleichung gilt, mit gleicher Herleitung wie für spitzwinklige Dreiecke, auch für stumpfwinklige Dreiecke.

W.5 *Beweis:* (Bild) Wir verlängern die Lote von P auf die Radien über die Fußpunkte C, D hinaus bis zum Schnitt mit dem Kreis in den Punkten E, F. Nach dem Satz, daß jeder Radius die zu ihm senkrechten Sehnen halbiert, gilt



$$\frac{PC}{PE} = \frac{PD}{PF} = \frac{1}{2}.$$

Nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes folgt hieraus $CD \parallel EF$ und nach dem 2. Strahlensatz $CD/EF = 1 : 2$. Wegen $\measuredangle MCP = \measuredangle MDP = 90°$ gilt nach dem Satz von der Winkelsumme im Viereck $\measuredangle EPF = \measuredangle CPD = 180° - \measuredangle AMB$. Also ist die Größe des Winkels $\measuredangle EPF$ von der Wahl des Punktes P unabhängig. Nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes folgt daraus, daß die Länge EF ebenso von der Wahl des Punktes P unabhängig ist. Damit ist auch CD unabhängig von der Wahl von P. □

W.6 Bei dieser Olympiade-Aufgabe sind wir fein raus, wenn wir den Beweis des Satzes aus Aufgabe D.21 parat haben: Der Höhenschnittpunkt H in einem spitzwinkligen Dreieck ist gleichzeitig Mittelpunkt des Inkreises des Höhenfußpunktdreiecks DEF. Die erwähnten Abstände sind dann die Längen der Berührungsradien von H zu den Seiten des $\triangle DEF$, und diese sind für den genannten Inkreis, dessen Mittelpunkt stets der gemeinsame Schnittpunkt der Winkelhalbierenden in $\triangle DEF$ ist, natürlich gleich.

W.7 a) *Beweis:* Aus Aufgabe D.63 wissen wir, daß der Flächeninhalt Δ eines beliebigen Dreiecks gleich dem Produkt aus Inkreisradius r und halbem Umfang $s \equiv \frac{1}{2}(a+b+c)$ des Dreiecks ist. Somit gilt

$$ah_a = 2\Delta = (a+b+c)r \qquad \text{bzw.} \qquad h_a = \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) r$$

und entsprechend auch

$$h_b = \left(\frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b}\right) r, \qquad h_c = \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1\right) r.$$

Eine Addition dieser drei Gleichungen ergibt

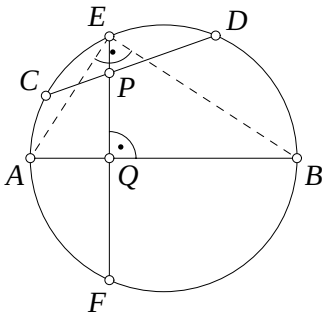
$$h_a + h_b + h_c = \left[3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)\right] r. \tag{W.104}$$

Nun gilt für je zwei positive Zahlen x, y stets die Ungleichung $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$. (Davon überzeugen wir uns leicht, wenn wir zu $(x-y)^2 \geq 0$ auf beiden Seiten $2xy$ addieren und anschließend durch xy dividieren, s. Abschnitt U.2.1.) Aus (W.104) folgt daher die Behauptung

$$h_a + h_b + h_c \geq 9r. \ \square \tag{W.105}$$

b) In einem *gleichseitigen* Dreieck gilt in (W.105) das Gleichheitszeichen. *Beweis:* Im gleichseitigen Dreieck sind die Höhen zugleich Seitenhalbierende und Winkelhalbierende. Ihr Abschnitt vom gemeinsamen Schnittpunkt, der zugleich Schwerpunkt und Inkreismittelpunkt ist, bis zur zugehörigen Seite ist somit gleich r und beträgt nach Aufgabe D.10 ein Drittel der Höhen $h_a = h_b = h_c$. Daher gilt hier $h_a + h_b + h_c = 9r$. $\square$

W.8 *Beweis:* (Bild) Das „verdächtige“ Produkt $CP \cdot PD$ erinnert uns natürlich sofort an den Sehnensatz (vgl. Aufgabe K.11), nur brauchen wir, um ihn anwenden zu können, eine zweite Sehne, die ebenfalls durch P geht. Dazu klappen wir den gegebenen Halbkreis um, so daß ein Vollkreis entsteht. Dieser schneidet nun aus der Geraden $g(P,Q)$ unsere zweite, gesuchte Sehne EF heraus. Somit folgt



$$CP \cdot PD = EP \cdot PF. \tag{W.106}$$

Da Q der Lotfußpunkt von P bzw. E auf dem Durchmesser AB ist, halbiert Q die Sehne EF, also $EQ = QF$. Damit wird

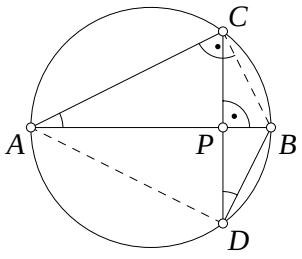
$$EP \cdot PF = (EQ - PQ) \cdot (PQ + EQ) = EQ^2 - PQ^2. \tag{W.107}$$

Weiterhin ist nach dem Thales-Satz $\triangle AEB$ ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei E, für welches wir den Höhensatz hinschreiben können:

$$EQ^2 = AQ \cdot QB. \tag{W.108}$$

Aus (W.106), (W.107), (W.108) folgt $CP \cdot PD = AQ \cdot QB - PQ^2$. $\square$

W.9 (Bild) Es ist nicht schwer zu erkennen, daß die beiden betrachteten Dreiecke APC und BPD zueinander ähnlich sind. Außer im rechten Winkel stimmen sie noch in den Winkeln $\measuredangle CAP = \measuredangle CAB = \measuredangle CDB = \measuredangle PDB$ überein, die Peripheriewinkel über der Sehne BC des Umkreises sind. Für den Ähnlichkeitsfaktor gilt somit:



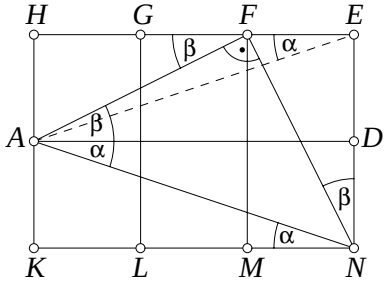
$$\lambda \equiv \frac{CP}{PB} = \frac{AP}{PD} = \frac{AC}{DB} \qquad \text{(W.109)}$$

und daher nach Voraussetzung auch

$$\lambda = \frac{CP + AP + AC}{PB + PD + DB} = 2. \qquad \text{(W.110)}$$

Da AB Durchmesser des Kreises ist, gilt ferner $CP = PD$ und somit nach (W.109) und (W.110): $AP = \lambda \cdot PD$, $PB = CP/\lambda$, also $AP/PB = \lambda^2 = 4$.

W.10 *Beweis:* (Bild) Spiegeln wir die drei Quadrate an der unteren Kante, so erkennen wir, daß die rechtwinkligen Dreiecke AHF und EFN kongruent sind (z. B. SSS). Daher ist $\triangle AFN$ gleichschenklig mit den Basiswinkeln



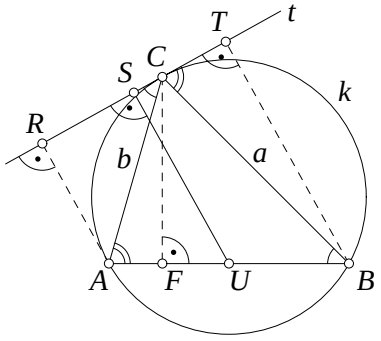
$$\measuredangle FNA = \measuredangle FAN = \measuredangle FAD + \measuredangle DAN.$$

$\beta = \measuredangle HFA = \measuredangle FAD$ und $\alpha = \measuredangle DAN = \measuredangle ANK$ sind jeweils Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, so daß aus obiger Gleichung

$$\measuredangle FNA = 90° - \alpha - \beta = \measuredangle FAN = \alpha + \beta$$

folgt. Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung $\alpha + \beta = 45°$. □

W.11 *Beweis:* (Bild) Wir betrachten im $\triangle ABC$ zunächst eines dieser Lote, beispielsweise den Lotfußpunkt S, der vom Mittelpunkt U von AB auf die an C gelegte Tangente t gefällt wird. Weiterhin seien R, T die Lotfußpunkte von A, B auf t sowie F der Fußpunkt des von C auf $g(A, B)$ gefällten Lotes. Die beiden Dreiecke CFA und BTC sind ähnlich, da sie einerseits rechtwinklig sind, und andererseits die Winkel $\measuredangle BAC$ und $\measuredangle BCT$ Peripherie- bzw. Sehnen-Tangentenwinkel über der Sehne CB des Umkreises k und damit gleich sind. Daher gilt mit $CF \equiv h_c$ die Proportion



$$\frac{BT}{BC} = \frac{CF}{CA} \quad \text{oder} \quad BT = h_c \frac{a}{b}.$$

Analog folgt aus $\triangle ARC \sim \triangle CFB$ die Länge $AR = h_c(b/a)$. Nun ist $ABTR$ offenbar ein Trapez, in dem US gerade die Mittellinie ist (wegen $AU = UB$). Daraus folgt mit $\Delta = \frac{1}{2} c h_c$:

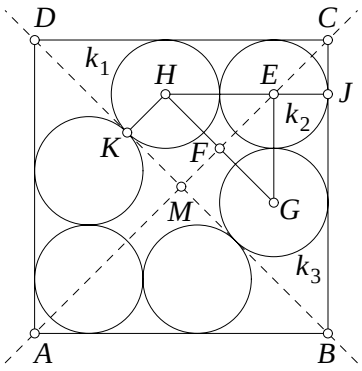
$$US = \frac{1}{2}(AR + BT) = \frac{h_c}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{ab} = \Delta \cdot \frac{a^2 + b^2}{abc}. \qquad \text{(W.111)}$$

Für die beiden anderen Entfernungen erhalten wir ganz analoge Ausdrücke, in denen a, b, c jeweils zyklisch vertauschbar sind, also $\Delta(b^2+c^2)/(bca)$ und $\Delta(c^2+a^2)/(cab)$, so daß als Summe der Ausdruck $2\Delta(a^2+b^2+c^2)/(abc)$, wie behauptet, folgt. □
Bemerkung: Für $\measuredangle BAC = 90°$ wird $A = F$ und $C = T$ und (W.111) folgt wie oben direkt aus $\triangle ARC \sim \triangle CAB$.

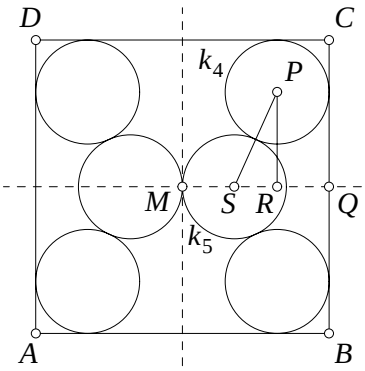
W.12 (Bild) a) Die Punkte H, E, G seien die Mittelpunkte der drei Kreise k_1, k_2, k_3 mit dem Radius r_1 sowie M der Mittelpunkt des Quadrats $ABCD$. Der Schnittpunkt von GH mit CM sei F. Aus den Berührungen von Kreisen miteinander, mit Seiten des Quadrats sowie mit der Diagonale BD ergibt sich: Das Dreieck EJC ist gleichschenklig-rechtwinklig mit der Kathetenlänge r_1, ebenso die Dreiecke EFG und EFH mit der Hypotenusenlänge $2r_1$, ferner gilt $FM = r_1$. Damit folgt

$$\frac{a}{2}\sqrt{2} = CM = CE + EF + FM = r_1\sqrt{2} + r_1\sqrt{2} + r_1,$$

$$r_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2(2\sqrt{2}+1)} = \frac{a}{4+\sqrt{2}} = \frac{a}{14}(4-\sqrt{2}).$$



a)



b)

b) Hier sind P und S die Mittelpunkte der Kreise k_4 bzw. k_5 mit dem Radius r_2. Der Mittelpunkt von BC sei Q, das Lot von P auf MQ habe den Fußpunkt R. Wie unter a) folgt $MS = RQ = r_2$, $PS = 2r_2$ und $PR = \frac{1}{2}a - r_2$. Der Satz des PYTHAGORAS, angewandt auf das $\triangle SRP$, ergibt

$$\left(\frac{a}{2} - 2r_2\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - r_2\right)^2 = 4r_2^2, \qquad r_2^2 - 3ar_2 + \frac{a^2}{2} = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen

$$r_{2_{1,2}} = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\frac{9}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2} = \frac{a}{2}(3 \pm \sqrt{7}),$$

von denen wegen $\frac{1}{2}a(3+\sqrt{7}) > \frac{1}{2}a(3+\sqrt{4}) = \frac{5}{2}a > a$ aber nur

$$r_2 = \frac{a}{2}(3-\sqrt{7})$$

in Betracht kommt. Nun beweisen wir $r_1 > r_2$, also

$$\frac{a}{14}(4-\sqrt{2}) > \frac{a}{2}(3-\sqrt{7}).$$

Dies folgt der Reihe nach aus

$$\begin{aligned} 4-\sqrt{2} &> 7(3-\sqrt{7}),\\ 7\sqrt{7} &> 17+\sqrt{2},\\ 343 &> 289+34\sqrt{2}+2,\\ 26 &> 17\sqrt{2},\\ 676 &> 578. \end{aligned}$$

In Bild a) sind also die größeren Kreise gezeichnet. — *Bemerkung:* Man beachte die Ungleichungskette am Ende der Lösung, deren Text im wesentlichen original übernommen wurde. Es genügt zur vollständigen und richtigen Lösung dieser Olympiade-Aufgabe nicht, die erste Ungleichung etwa unter Verwendung von Näherungswerten (z. B. mit dem Taschenrechner erhaltenen) nachzuweisen. Mit anderen Worten: Der Taschenrechner ist für Olympiade-Aufgaben selten geeignet.

W.13 *Beweis:* Der einfachste Teil bei der Lösung dieser Olympiadeaufgabe besteht darin, die Formel für das Volumen eines Tetraeders hinzuschreiben: $V = \frac{1}{3}R\Delta$, wobei Δ der Flächeninhalt der Grundfläche und $h = R$ die Höhe des Tetraeders senkrecht zu dieser Grundfläche ist. Wenn uns nun die Gleichung aus Aufgabe D.64 geläufig ist, nämlich $\Delta = abc/(4R)$ mit a, b, c als Seitenlängen von $\triangle ABC$ sowie R als dessen Umkreisradius, haben wir auch schon den schwierigsten Teil geschafft:

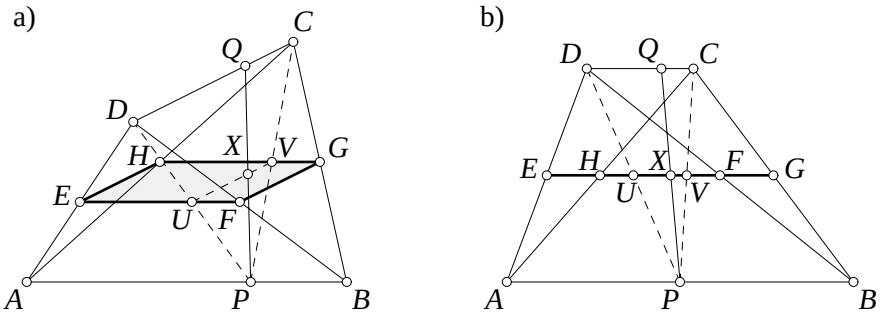
$$V = \frac{abc}{12}. \tag{W.112}$$

Die Aufgabe verlangt nun, das Produkt abc durch die Summe $u \equiv a+b+c$ nach oben abzuschätzen. Dies erreichen wir durch Anwendung der AM-GM Ungleichung (vgl. Aufgabe U.5):

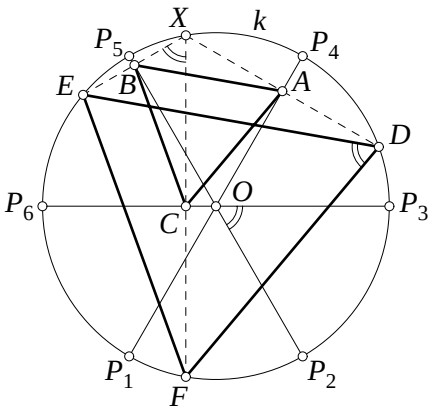
$$\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3} \qquad \text{bzw.} \qquad abc \le \frac{(a+b+c)^3}{27} = \frac{u^3}{27}. \tag{W.113}$$

(W.113) in (W.112) eingesetzt liefert die Behauptung. □
Gleichheit ist genau dann erfüllt, wenn in (U.6) $a = b = c$ gilt, die Grundfläche also ein *gleichseitiges* Dreieck ist.

W.14 Wir betrachten zunächst die vier Mittelpunkte E, F, G, H der Strecke PQ bei den speziellen Lagen $PQ \equiv \{AD, BD, BC, AC\}$. Sind nun AB und DC *nicht* parallel zueinander (Bild a), so ist $EFGH$ gerade das VARIGNON-Parallelogramm des überschlagenen Vierecks $ADBC$; im Fall $AB \parallel DC$ dagegen liegen F und H auf der Strecke EG (Bild b); das Parallelogramm $EFGH$ ist zu dieser Strecke entartet. Nun wird gezeigt: Die Menge der Mittelpunkte aller Strecken PQ ist im Fall a) ($AB \nparallel DC$) die Parallelogrammfläche $\boldsymbol{M} \equiv EFGH$ bzw. im Fall b) ($AB \parallel DC$) die Strecke $\boldsymbol{M} \equiv EG$. Angenommen, X sei der Mittelpunkt einer Strecke PQ. Dann gilt für den Schnittpunkt U von PD mit EF und den Schnittpunkt V von PC mit HG nach dem 1. Strahlensatz $PU : PD = PV : PC = 1 : 2$ und nach dessen Umkehrung $UV \parallel DC$. Also schneidet UV die Strecke PQ in deren Mittelpunkt, d. h. in X. Daher liegt X auf UV und somit in $\boldsymbol{M}$. □



W.15 *Beweis:* (Bild) Die Verlängerungen von XA, XB und XC schneiden k mit dessen Mittelpunkt O zum zweiten Mal in D, E bzw. F. Die Sehnen XD, XE, XF werden dabei durch die senkrecht auf ihnen stehenden Durchmesser P_1P_4, P_2P_5, P_3P_6 gerade in den Punkten A, B, C halbiert. Es gilt demnach



$$\frac{XA}{XD} = \frac{XB}{XE} = \frac{XC}{XF} = \frac{1}{2},$$

und $\triangle ABC$ geht somit aus $\triangle DEF$ durch Streckung um den Faktor $\frac{1}{2}$ hervor. Weiterhin stehen beide Schenkel XB, XC des Winkels $\measuredangle BXC$ senkrecht auf den Schenkeln OP_2, OP_3 des Winkels $\measuredangle P_2OP_3 = 60°$, woraus mit dem Peripheriewinkelsatz

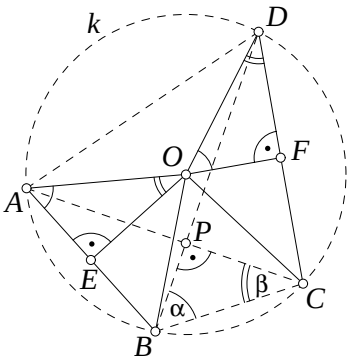
$$\measuredangle P_2OP_3 = \measuredangle BXC = \measuredangle EXF = \measuredangle EDF = 60°$$

folgt. Entsprechend ergibt sich $\measuredangle DFE = \measuredangle FED = 60°$. Das $\triangle DEF$ hat somit als ein dem Kreis einbeschriebenes gleichseitiges Dreieck einen Flächeninhalt, der nicht von der Lage des Punktes X auf k abhängt. Dasselbe gilt folglich auch für das Dreieck ABC. □

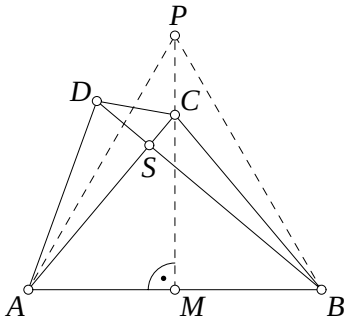
W.16 *Beweis:* (Bild) E, F seien die Lotfußpunkte von O auf die Seiten AB und CD, P der Schnittpunkt beider Diagonalen. Nun sind die Dreiecke AOB und COD gleichschenklig und werden somit durch ihre Höhen OE bzw. OF in zwei Paare kongruenter rechtwinkliger Dreiecke zerlegt:

$$\triangle AOE \cong \triangle BOE, \qquad \triangle COF \cong \triangle DOF. \tag{W.114}$$

Wenn es uns noch gelingt, die Kongruenz aller vier obigen Dreiecke nachzuweisen, sind wir schon fertig. Bezeichnen wir die Winkel $\measuredangle DBC \equiv \alpha$ und $\measuredangle ACB \equiv \beta$, so ist nach Voraussetzung $\alpha + \beta = 90°$. Aus dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz folgt $\measuredangle DOC = 2\alpha$, somit wegen (W.114) $\measuredangle DOF = \alpha$ und aus der Innenwinkelsumme in $\triangle ODF$: $\measuredangle ODF = \beta$. Analog erhalten wir $\measuredangle AOE = \beta$ und $\measuredangle OAE = \alpha$. Schließlich stimmen beide Dreiecke $\triangle AOE$ und $\triangle ODF$ in ihren Hypotenusen $AO = OD$ überein, sind daher in der Tat kongruent. Daraus folgt unmittelbar $CD = 2DF = 2OE$. □



W.17 (Bild) Aus dem Innenwinkelsatz für die Dreiecke ABC und ABD folgt mit den gegebenen Winkelgrößen $\measuredangle ACB = 80°$ und $\measuredangle ADB = 70°$. Letztere beiden Dreiecke sind daher gleichschenklig mit $CA = CB$ bzw. $BD = BA$. Es sei nun P derjenige Punkt, der auf derselben Seite der Geraden durch A, B liegt wie C und für den $\triangle ABP$ ein gleichseitiges Dreieck ist. Die Punkte P, C sowie der Mittelpunkt M von AB liegen auf der Mittelsenkrechten von AB, und es gilt



$$\measuredangle APM = \measuredangle BPM = 30°,$$

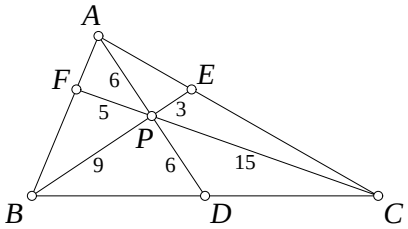
$$\measuredangle ACM = \measuredangle BCM = 40°.$$

Nach Kongruenzsatz SWS ist $\triangle BCD \cong \triangle BCP$ wegen der gemeinsamen Seite BC, $\measuredangle CBD = \measuredangle CBP = 10°$ sowie $BD = BA = BP$; daher gilt $\measuredangle BDC = \measuredangle BPC = 30°$. Damit und nach dem Satz über die Winkelsumme im Viereck ergeben sich die beiden gesuchten Innenwinkelgrößen:

$$\measuredangle ADC = \measuredangle ADB + \measuredangle BDC = 70° + 30° = 100°,$$

$$\measuredangle BCD = 360° - 50° - 70° - 100° = 140°.$$

W.21 (Bild) Zwei der durch P vorgegebenen Teilungsverhältnisse $u \equiv AP/PD = 1$ und $v \equiv BP/PE = 3$ sind uns bekannt; mit Hilfe des Satzes von Euler-Gergonne (s. Aufgabe M.36) können wir das dritte Verhältnis sofort berechnen:



$$w \equiv \frac{CP}{PF} = \frac{u+v+2}{uv-1} = 3.$$

Daraus folgt $CP = 15$ und $PF = 5$. Weiterhin erlaubt uns die Tabelle M.1, die Streckenverhältnisse auf den Seiten des Dreiecks ABC zu bestimmen:

$$x \equiv \frac{BD}{DC} = \frac{1+v}{1+w} = 1, \qquad y \equiv \frac{CE}{EA} = \frac{1+w}{1+u} = 2, \qquad z \equiv \frac{AF}{FB} = \frac{1+u}{1+v} = \frac{1}{2}.$$

Nun kennen wir in den Dreiecken PBC, PCA und PAB jeweils die Längen zweier Seiten, die Länge einer zugehörigen Ecktransversalen sowie das Teilungsverhältnis auf der gegenüberliegenden Seite. Mit Hilfe des Satzes von Stewart (s. Aufgabe D.69) können wir somit die Längen $BC \equiv a$, $CA \equiv b$ und $AB \equiv c$ berechnen:

$$\begin{aligned}
PD^2 &= p\,PC^2 + q\,PB^2 - pqa^2, && \text{mit} \quad p = q = \tfrac{1}{2}: && a^2 = 468,\\
PE^2 &= p\,PA^2 + q\,PC^2 - pqb^2, && \text{mit} \quad p = \tfrac{2}{3},\ q = \tfrac{1}{3}: && b^2 = 405,\\
PF^2 &= p\,PB^2 + q\,PA^2 - pqc^2, && \text{mit} \quad p = \tfrac{1}{3},\ q = \tfrac{2}{3}: && c^2 = 117.
\end{aligned}$$

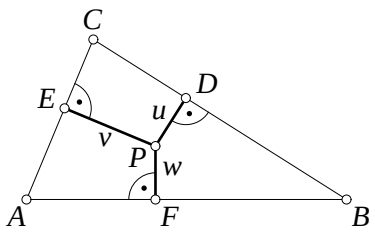
Den gesuchten Flächeninhalt liefert uns schließlich Herons Formel (s. Lösung zu Aufgabe D.66):

$$16\,[ABC]^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4) = 186\,624, \text{ also } [ABC] = 108.$$

W.22 (Bild) Schreiben wir zur Abkürzung $PD \equiv u$, $PE \equiv v$ und $PF \equiv w$, so lautet die Forderung $uvw \Rightarrow$ Max. Wir brauchen noch irgendeine Nebenbedingung in den Längen u, v, w, um eine der Standard-Ungleichungen anwenden zu können. Das ist natürlich der Flächeninhalt, für den offenbar

$$2\Delta = au + bv + cw = \text{const}$$

gilt. Nun genügt bereits eine einmalige Anwendung der AM-GM-Ungleichung, um die Lösung zu finden:

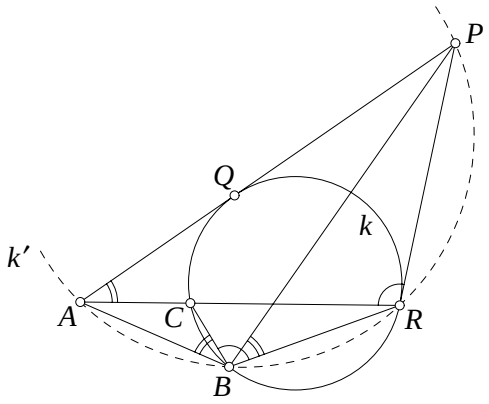


$$2\Delta = au + bv + cw \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}(uvw)^{\frac{1}{3}}, \qquad \text{oder} \qquad uvw \leq \frac{8\Delta^3}{27abc} = \frac{2}{27}\frac{\Delta^2}{R}.$$

In der letzten Umformung wurde das Ergebnis von Aufgabe D.64 $abc = 4R\Delta$ benutzt. Die AM-GM-Ungleichung sagt uns auch, wann Gleichheit auftritt, das Produkt also seinen Maximalwert annimmt: $au = bv = cw$. Da diese Terme gerade die doppelten Flächeninhalte der Teildreiecke BCP, CAP und ABP sind, folgt daraus, daß der gesuchte Punkt P der Schwerpunkt von $\triangle ABC$ ist (vgl. Aufgabe D.11).

W.23 *Beweis:* (Bild) Die beiden Tangenten lassen vermuten, daß bei dieser Aufgabe der Sehnen-Tangentenwinkel-Satz eine Rolle spielt. Außerdem wimmelt es nur so an Peripheriewinkeln. Wir versuchen es also wieder mit der „Winkel-Jagd“, schreiben $\measuredangle ABC$ als Differenz zweier anderer Winkel und wenden daraufhin die genannten Sätze an:

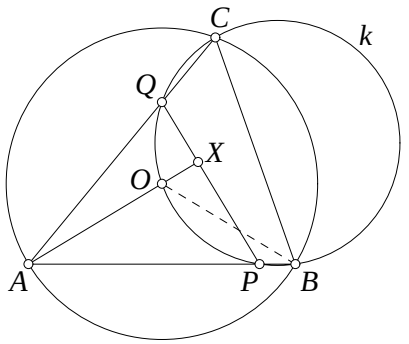
$$\begin{aligned}\measuredangle ABC &= \measuredangle ABP - \measuredangle CBP \\ &= \measuredangle ARP - \measuredangle PBC \\ &= \measuredangle RBC - \measuredangle PBC \\ &= \measuredangle RBP \\ &= \measuredangle PAR. \ \square\end{aligned}$$



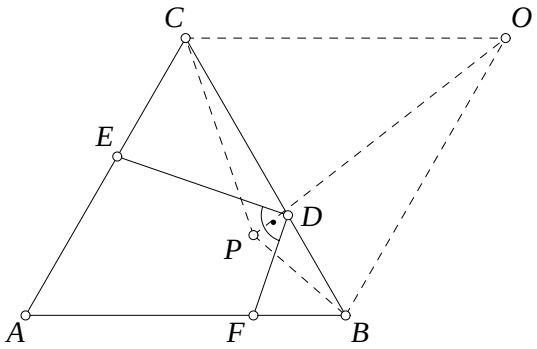
W.24 *Beweis:* (Bild) Da die Strecken AO und PQ sich nicht schneiden, verlängern wir AO über O hinaus und bezeichnen den Schnittpunkt mit X. Wir haben also $\measuredangle AXQ = 90°$ zu zeigen. Nun ist $\measuredangle AXQ$ Außenwinkel in $\triangle AXP$ und als solcher gleich der Summe der Innenwinkel $\measuredangle PAX = \measuredangle BAO$ und $\measuredangle APX$. Letzterer ist Nebenwinkel zu $\measuredangle BPX$, der wiederum Supplementwinkel zu $\measuredangle BCQ$ im Sehnenviereck $BPQC$ ist. Somit haben wir

$$\measuredangle AXQ = \measuredangle BAO + \measuredangle BCQ = \measuredangle BAO + \measuredangle BCA$$

und sind mit unseren Winkeln wieder vollständig in $\triangle ABC$. Nach dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz gilt weiter $\measuredangle BCA = \frac{1}{2}\measuredangle BOA$, und da $\triangle BOA$ gleichschenklig ist: $\measuredangle BCA = 90° - \measuredangle BAO$. Diese Beziehung in obige Gleichung eingesetzt, ergibt die Behauptung. $\square$

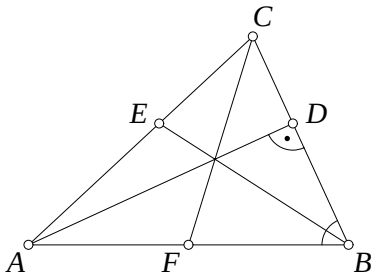


W.25 (Bild) Rechtwinklige Lotfußpunktdreiecke haben wir bereits in Aufgabe D.82 betrachtet, so daß wir uns hier kurz fassen können. Demnach ist für $\measuredangle FDE = 90°$ die Winkelbeziehung $\measuredangle BPC = 90° + \measuredangle BAC = 150°$ notwendig. Dieser Winkel ist somit unabhängig von der Lage von P konstant, woraus folgt, daß P auf einem Kreisbogen mit BC als Sehne liegt. Den zugehörigen Mittelpunkt O des Kreises können wir ermitteln, wenn wir den Spezialfall nehmen, daß das $\triangle BPC$ gleichschenklig ist. Dann ist $\measuredangle BOP = \measuredangle COP = 30°$, $\measuredangle OBP = \measuredangle OCP = 75°$ und nach dem Innenwinkelsatz auch $\measuredangle OPB = \measuredangle OPC = 75°$, beide Dreiecke BOP und COP damit gleichschenklig. Hieraus folgt $OP = OB = OC$; der gesuchte Mittelpunkt O ist also gerade der gespiegelte Punkt von A an der Seite BC.



W.26 *Beweis:* (Bild) Der Satz von Ceva ist doch ein guter Freund! Bisher hatten wir es jedoch stets mit gleichartigen Ecktransversalen zu tun; hier treten zur Abwechslung mal eine Höhe, eine Winkel- sowie eine Seitenhalbierende auf. Wir zeigen zuerst: Wenn sich alle drei Ecktransversalen in einem Punkt schneiden, dann gilt die angegebene Gleichung. Nach Ceva gilt nun:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1. \tag{W.115}$$



Wir haben $AF = FB$, $CE/EA = a/c$ nach Aufgabe D.8 sowie

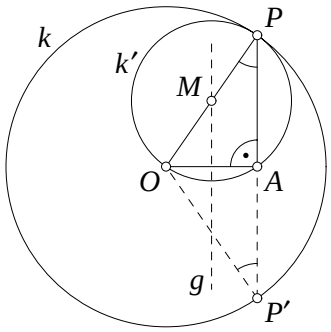
$$BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}, \qquad DC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

nach Aufgabe D.72. Damit wird aus (W.115) zunächst $a \cdot BD = c \cdot DC$ und weiter

$$a(a^2 + c^2 - b^2) = c(a^2 + b^2 - c^2), \qquad aa^2 - a(b^2 - c^2) = ca^2 + c(b^2 - c^2),$$
$$a^2(a - c) = (a + c)(b^2 - c^2). \tag{W.116}$$

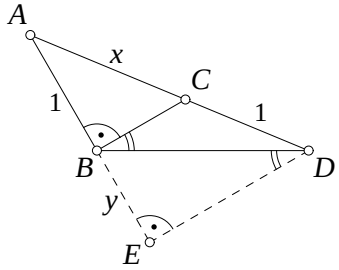
Die Umkehrung gilt ebenfalls: Von (W.116) gelangen wir durch äquivalente Umformungen und mit eindeutigen Ausdrücken zu (W.115). Nach der Umkehrung des Satzes von Ceva schneiden sich mithin die drei unterschiedlichen Ecktransversalen in einem Punkt. □

W.27 (Bild) Wir betrachten die Strecke OA als Sehne eines zweiten Kreises k'. Für alle Punkte P auf der Peripherie dieses Kreises, die bezüglich OA auf derselben Seite liegen, sind die Winkel $\measuredangle OPA$ nach dem Peripheriewinkelsatz gleich groß. Der Winkel $\measuredangle OPA$ wird nun um so größer, je größer der zugehörige Zentriwinkel $\measuredangle OMA = 2\measuredangle OPA$ wird, d. h., je dichter der Mittelpunkt M dieses Kreises, der stets auf der Mittelsenkrechten g von OA liegt, an OA heranrückt. Damit wird auch der Radius von k' kleiner. Da P jedoch auf k liegen soll, ist der Grenzfall genau derjenige, bei dem k' den Kreis k von innen in P berührt. Somit ist OP ein Durchmesser von k', und $\measuredangle OAP$ nach dem Satz des THALES ein Rechter. Wir finden folglich zwei Punkte P und P', für die $\measuredangle OPA$ maximal wird, indem wir die Senkrechte zu OA in A mit k zum Schnitt bringen.



W.28 (Bild) Wir zeichnen eine Parallele zu BC durch D; diese schneide die Verlängerung von AB in E. Mit den Bezeichnungen $AC \equiv x$ und $BE \equiv y$ können wir dann mit Hilfe des Strahlensatzes unmittelbar die Beziehung $x : 1 = 1 : y$ oder $xy = 1$ ablesen. Nun ist $\triangle BED$ rechtwinklig mit $\measuredangle EDB = \measuredangle CBD = 30°$; dessen Hypotenuse wegen $\sin 30° = \frac{1}{2}$ somit $BD = 2y$ und nach dem Satz des PYTHAGORAS $ED = \sqrt{3}y$. Die Länge der Strecke BC erhalten wir, indem wir den 2. Strahlensatz anwenden:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{ED}{AE}, \quad \text{oder} \quad BC = \frac{\sqrt{3}y}{y+1}.$$



Der Kosinussatz für das $\triangle CBD$ lautet jetzt:

$$1^2 = \frac{3y^2}{(y+1)^2} + 4y^2 - 2\frac{\sqrt{3}y}{y+1}(2y)\cos 30°,$$

woraus nach Multiplikation mit $(y+1)^2$ und mit $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

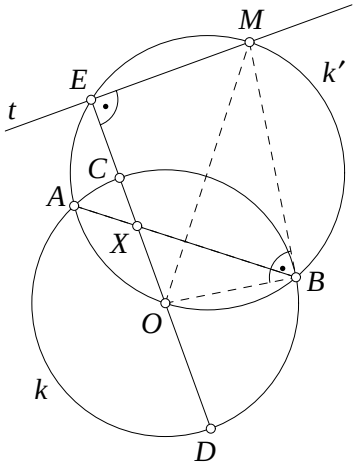
$$(y+1)^2 = 3y^2 + 4y^2(y+1)^2 - 6y^2(y+1) \quad \text{bzw.} \quad 4y^4 + 2y^3 - 2y - 1 = 0$$

folgt. Das geübte Auge erkennt im letzten Polynom in y den Faktor $(2y+1)$, also

$$4y^4 + 2y^3 - 2y - 1 = (2y+1)(2y^3 - 1) = 0.$$

Nullsetzen des ersten Faktors liefert $y = -\frac{1}{2}$ (ungültige Lösung), somit bleibt $y^3 = \frac{1}{2}$. Diese Gleichung dritten Grades hat eine reelle Lösung $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (die anderen beiden sind konjugiert komplex). Wegen $xy = 1$ beträgt die gesuchte Länge daher $AC = x = \sqrt[3]{2}$.

W.29 *Beweis:* (Bild) Der konstante Teil in der Behauptung besteht aus der Geraden OE, auf der X liegt. Es genügt also, $EX = \text{const}$ oder $XO = \text{const}$ nachzuweisen. Aus $\measuredangle OEM = \measuredangle OBM = 90°$ folgt, daß A, B und E auf einem Kreis k' mit dem Durchmesser OM liegen. Bezeichnen wir noch die Schnittpunkte von OE mit dem Kreis k mit C, D, so haben wir genügend Sehnen in beiden Kreisen, daß uns der Rest mit Hilfe des Sehnensatzes nicht schwer fallen dürfte. Tatsächlich ist AB Sehne in beiden Kreisen, und es gilt mit $x \equiv XO$ und $r \equiv AO = CO = DO$:



$$EX \cdot XO = AX \cdot XB = CX \cdot XD,$$

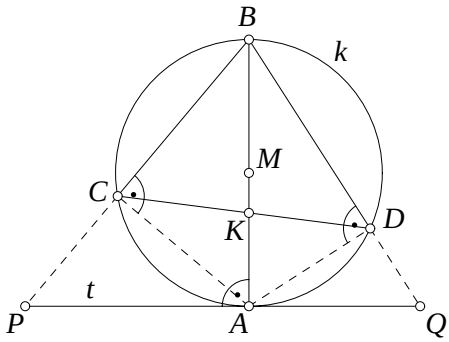
$$(EO - x)x = (r - x)(r + x), \quad \text{oder} \quad x = \frac{r^2}{OE} = \text{const.} \ \square$$

W.30 *Beweis:* (Bild) Wir sehen unmittelbar $\triangle BAP \sim \triangle BCA$ und $\triangle BAQ \sim \triangle BDA$, da sämtliche Dreiecke rechtwinklig sind und jeweils in den Winkeln $\measuredangle ABP$ bzw. $\measuredangle ABQ$ übereinstimmen. Daraus folgen die Proportionen

$$\frac{AP}{AB} = \frac{CA}{CB} \quad \text{und} \quad \frac{AQ}{AB} = \frac{DA}{DB}.$$

Multiplikation beider Gleichungen liefert

$$\frac{AP \cdot AQ}{AB^2} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DA}{DB}. \qquad \text{(W.117)}$$



Da $ADBC$ ein Sehnenviereck ist, bestehen außerdem die Ähnlichkeiten $\triangle ACK \sim \triangle DBK$ und $\triangle DAK \sim \triangle BCK$, somit

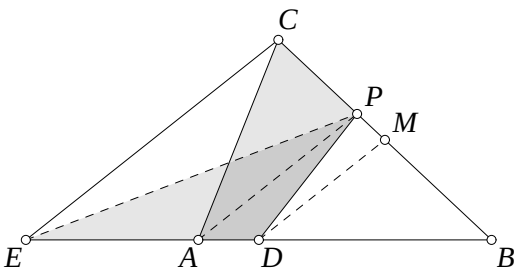
$$\frac{CA}{BD} = \frac{CK}{BK}, \quad \frac{DA}{BC} = \frac{AK}{CK}, \qquad \frac{CA}{BD} \cdot \frac{DA}{BC} = \frac{CK}{BK} \cdot \frac{AK}{CK} = \frac{AK}{BK}. \qquad \text{(W.118)}$$

Nun folgt aus (W.117) und (W.118)

$$\frac{AP \cdot AQ}{AB^2} = \frac{AK}{BK}, \quad \text{oder} \quad AP \cdot AQ = AB^2 \cdot \frac{AK}{BK} = \text{const},$$

unabhängig von der Wahl von CD.

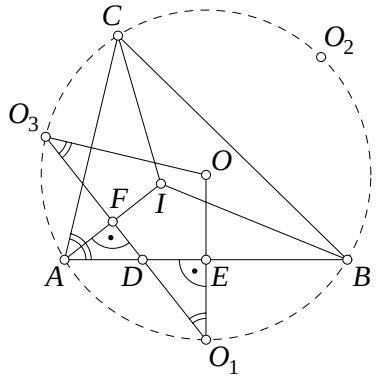
W.31 *Beweis:* (Bild) Um die Flächengleichheit eines Dreiecks und eines Vierecks zu zeigen, bietet es sich an, das Viereck in ein flächengleiches Dreieck umzuwandeln, um dann zwei Dreiecke vergleichen zu können. Dazu zerlegen wir das Viereck $ADPC$ durch seine Diagonale AP zunächst in die Dreiecke ADP und APC. Letzteres wandeln wir nun in ein flächengleiches Dreieck um, indem wir die Parallele zur Grundseite AP durch C ziehen und mit der Verlängerung von AD zum Schnitt bringen; wir erhalten Punkt E. Mithin ist $[APC] = [APE]$ und somit



$$[ADPC] = [EDP]. \qquad \text{(W.119)}$$

Aus dem 1. Strahlensatz folgt wegen $EC \parallel AP \parallel DM$ und $BC = 2BM$: $BE = 2BD$ bzw. $ED = DB$. Damit haben $\triangle EDP$ und $\triangle DBP$ gleiche Grundseiten und gleiche Höhen, sind also flächengleich, woraus mit (W.119) die Behauptung folgt. □

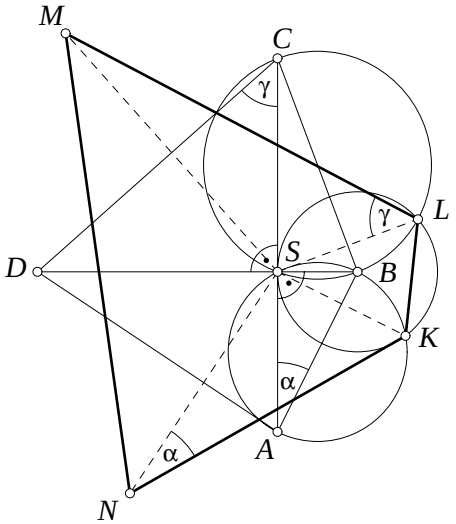
W.32 *Beweis:* (Bild) Da I der Inkreismittelpunkt von $\triangle ABC$ ist, halbiert AI den Innenwinkel $\measuredangle CAB$. Die Umkreismittelpunkte O und O_1 liegen weiterhin auf der Mittelsenkrechten von AB; O_1 und O_3 auf der Mittelsenkrechten von AI. Bezeichnen wir die Schnittpunkte von O_1O und AB mit E sowie von O_1O_3 und AB bzw. AI mit D bzw. F, so sind die beiden Dreiecke $\triangle ADF$ und $\triangle O_1DE$ offenbar ähnlich, da sie außer in den rechten Winkeln noch in den Scheitelwinkeln $\measuredangle ADF = \measuredangle O_1DE$, also in allen drei Winkeln übereinstimmen. Somit ist



$$\measuredangle IAB = \measuredangle O_3O_1O.$$

Genauso können wir zeigen, daß $\measuredangle IAC = \measuredangle O_1O_3O$ ist. $\triangle O_1OO_3$ hat daher gleiche Basiswinkel und ist folglich gleichschenklig. Völlig analog zeigen wir $OO_1 = OO_2$, also $OO_1 = OO_2 = OO_3$. Daraus folgt, daß der Umkreis des Dreiecks $O_1O_2O_3$ mit demjenigen von $\triangle ABC$ zusammenfällt. □

W.33 *Beweis:* (Bild) Die zu AB, BC, CD, DA spiegelbildlichen Punkte von S seien K, L, M bzw. N. Um nun zu zeigen, daß $KLMN$ ein Sehnenviereck ist, genügt es nachzuweisen, daß in ihm gegenüberliegende Winkel Supplementwinkel sind: $\measuredangle KLM = \measuredangle MNK$. Bezeichnen wir dazu weiter $\measuredangle BAS \equiv \alpha$ und $\measuredangle DCS \equiv \gamma$. Nun ist $ASBK$ nach Voraussetzung $AS \perp SB$ ein Drachenviereck, gleiches gilt für $BSCL$, $CSDM$ und $DSAN$. Somit gilt $BK = BS = BL$, d. h., Eckpunkt B ist Mittelpunkt des Umkreises von $\triangle KLS$. Analog folgt: C ist Umkreismittelpunkt von $\triangle LMS$, D von $\triangle MNS$ bzw. A von $\triangle NKS$. Diese Kreise erlauben es, die Winkel α und γ aus $ABCD$ wie folgt in das Viereck $KLMN$ zu transportieren: $\measuredangle SBK = 180° - 2\alpha$ ist Zentriwinkel über der Sehne SK, also ist $\measuredangle SLK = 90° - \alpha$. Mit dem gleichen Argument erhalten wir $\measuredangle SLM = \gamma$, $\measuredangle SNM = 90° - \gamma$, $\measuredangle SNK = \alpha$. Durch Addition† folgt:

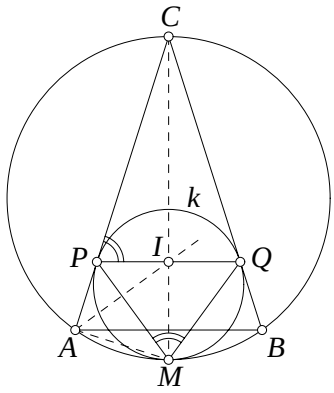


$$\measuredangle KLM = \measuredangle SLK + \measuredangle SLM = (90° - \alpha) + \gamma \quad \text{und}$$
$$\measuredangle MNK = \measuredangle SNM + \measuredangle SNK = (90° - \gamma) + \alpha,$$

schließlich, wie behauptet, $\measuredangle KLM + \measuredangle MNK = 180°$. □

†Hier setzen wir ohne weitere Begründung voraus, daß S im Innern des konvexen Vierecks $KLMN$ liegt.

W.51 *Beweis:* (Bild) Wegen $AC = BC$ ist unsere Figur symmetrisch bezüglich des Durchmessers CM des Umkreises, wobei M der Berührungspunkt von k mit dem Umkreis ist. Nun halbiert CM den Scheitelwinkel $\measuredangle ACB$, den Winkel $\measuredangle PMQ$ sowie die Strecke PQ, welche wegen $PC = QC$ und der daraus folgenden Ähnlichkeit der Dreiecke ACB und PCQ parallel zu AB ist und deren Mittelpunkt wir mit I bezeichnen. Für die Basiswinkel in beiden gleichschenkligen Dreiecken schreiben wir $\measuredangle CPQ = \measuredangle CAB \equiv 2\beta$. Nach dem Sehnen-Tangentenwinkel-Satz ist daher auch $\measuredangle PMQ = \measuredangle CPQ = 2\beta$, also $\measuredangle PMI = \frac{1}{2}\measuredangle PMQ = \beta$. Weiterhin ist $AMIP$ wegen $\measuredangle CAM = \measuredangle PAM = 90°$ und $\measuredangle PIM = 90°$ ein Sehnenviereck, in dem $\measuredangle PMI = \measuredangle PAI = \beta$ gleich große Peripheriewinkel sind. Somit halbiert AI den Innenwinkel $\measuredangle CAB$. I ist folglich als Schnittpunkt zweier Winkelhalbierenden der Mittelpunkt des Inkreises von $\triangle ABC$. □

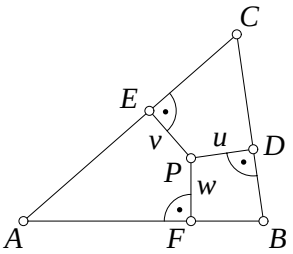


W.52 (Bild) Die Seitenlängen des Dreiecks seien $BC \equiv a$, $CA \equiv b$ und $AB \equiv c$; die Längen der Lote $PD \equiv u$, $PE \equiv v$, $PF \equiv w$. Dann gilt für den Flächeninhalt Δ von Dreieck ABC:

$$2\Delta = au + bv + cw.$$

Die Aufgabe verlangt,

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w}$$



zu minimieren. Die einfachste Möglichkeit dies zu erreichen, ist die Ausnutzung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (vgl. Aufgabe U.11) unter Verwendung der Tripel $(\sqrt{au}, \sqrt{bv}, \sqrt{cw})$ und $(\sqrt{a/u}, \sqrt{b/v}, \sqrt{c/w})$. Somit ist

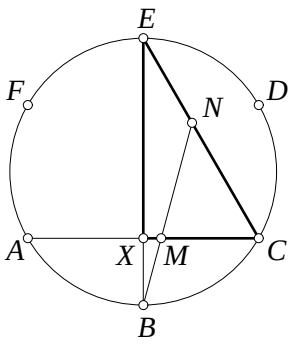
$$(a+b+c)^2 \le (au+bv+cw)\left(\frac{a}{u}+\frac{b}{v}+\frac{c}{w}\right) = 2\Delta\left(\frac{a}{u}+\frac{b}{v}+\frac{c}{w}\right),$$

oder

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2\Delta}. \tag{W.120}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn die Tripel $(\sqrt{au}, \sqrt{bv}, \sqrt{cw})$ und $(\sqrt{a/u}, \sqrt{b/v}, \sqrt{c/w})$ zueinander proportional sind, d. h., genau dann, wenn $u = v = w$ ist. Der Ausdruck (W.120) wird folglich minimal, wenn P der Inkreismittelpunkt von $\triangle ABC$ ist.

W.53 (Bild) Angenommen, B, M und N sind kollinear und jede Seite des Sechsecks habe die Länge eins. Es bietet sich an, r mit Hilfe des Satzes von MENELAUS (s. Aufgabe D.43) zu bestimmen. Dazu sei X der Schnittpunkt von AC mit BE. Die Punkte B, M und N müssen nun auf den (gegebenenfalls verlängerten) Seiten eines Dreiecks liegen; wir finden das $\triangle CEX$ als ein solches und schreiben den Satz von MENELAUS hierfür hin:



$$\frac{CN}{NE}\cdot\frac{EB}{BX}\cdot\frac{XM}{MC}=-1. \tag{W.121}$$

Nun versuchen wir, jede dieser Längen durch r auszudrücken. Mit $AC=CE=\sqrt{3}$, $AX=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $EB=2$ und $BX=-\frac{1}{2}$ (das Minuszeichen rührt vom entgegengesetzten Richtungssinn zu EB) errechnen wir:

$$CN=AM=\sqrt{3}\,r,\quad NE=CE-CN=\sqrt{3}\,(1-r),$$

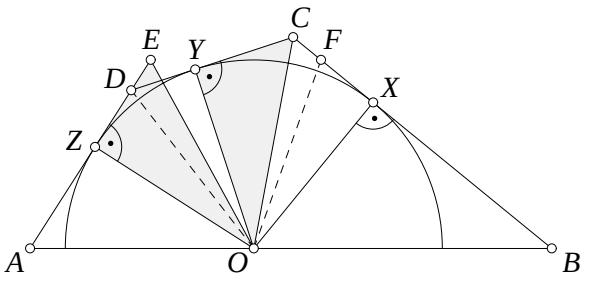
$$XM=AM-AX=\sqrt{3}\left(r-\frac{1}{2}\right),\quad MC=AC-AM=\sqrt{3}\,(1-r).$$

Dies in (W.121) eingesetzt, ergibt

$$\frac{\sqrt{3}\,r}{\sqrt{3}\,(1-r)}\cdot\frac{2}{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}\,(r-\frac{1}{2})}{\sqrt{3}\,(1-r)}=-1\qquad\text{oder}\qquad 4r\left(r-\frac{1}{2}\right)=(1-r)^2,$$

woraus schließlich $r=\frac{1}{\sqrt{3}}$ folgt.

W.54 *Beweis:* (Bild) O sei der Mittelpunkt des Kreises auf der Seite AB; die Berührungspunkte mit den anderen Seiten seien X, Y bzw. Z. Wir drehen nun das rechtwinklige $\triangle OYC$ so um O, daß es in $\triangle OZE$ übergeht, wobei E auf der Verlängerung von AD liegt. Bezeichnen wir $\varepsilon\equiv\measuredangle OCY=\measuredangle OEZ$, dann ist auch $\measuredangle OCX=\varepsilon$. Da $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, gilt $\measuredangle OAE=180^\circ-2\varepsilon$ und weiter $\measuredangle AOE=180^\circ-(\varepsilon+180^\circ-2\varepsilon)=\varepsilon=\measuredangle AEO$. $\triangle OAE$ ist somit gleichschenklig und wir erhalten:



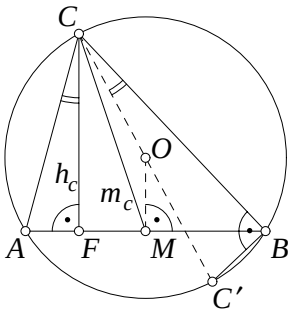
$$AO=AE=AZ+YC=AZ+CX. \tag{W.122}$$

Mit derselben Begründung, d. h. durch Drehung von $\triangle OYD$ um O in $\triangle OXF$ usw., folgt

$$BO=BF=BX+YD=BX+DZ. \tag{W.123}$$

Durch Addition von (W.122) und (W.123) folgt die Behauptung: $AB=AD+BC$. $\square$

W.61 *Beweis:* (Bild) Aufmerksame Leser haben vielleicht sofort eine Idee: Aus Aufgabe D.42 wissen wir, daß der Höhenschnittpunkt und der Umkreismittelpunkt isogonal konjugierte Punkte sind. Daraus folgt, daß die Winkelhalbierende w_c gleichzeitig die Winkelhalbierende der Geraden CF (identisch mit der Geraden h_c) und des Durchmessers COC' des Umkreises von $\triangle ABC$ ist. Nach Voraussetzung soll nun m_c isogonal zu h_c sein, d. h., O muß auf der Seitenhalbierenden CM liegen. Das ist jedoch nur erfüllt, wenn O mit M zusammenfällt. AB ist somit Durchmesser und nach dem Satz des THALES $\triangle ABC$ rechtwinklig bei C. □



W.81 *Beweis:* (Bild) Die Berührungspunkte des Inkreises (Radius r) mit den Seiten $AB \equiv c$, $BC \equiv a$, $CA \equiv b$ bezeichnen wir mit D, E bzw. F; die mit den Tangentenabschnitten $ST \parallel AB$, $UP \parallel BC$ und $QR \parallel CA$ mit K, L bzw. M. Wir erkennen nun leicht, daß das Sechseck in drei Paare kongruenter Drachenvierecke

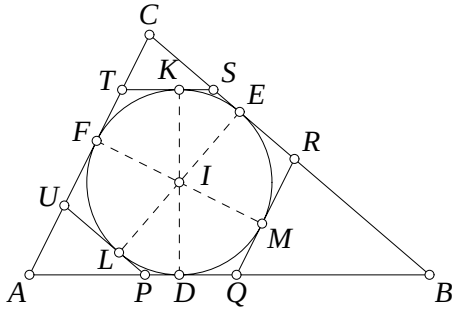
$$KSEI \cong DPLI, \quad ERMI \cong LUFI, \quad MQDI \cong FTKI$$

zerfällt. Daß z. B. $KSEI$ ein Drachenviereck ist, folgt aus dem Kongruenzsatz SSS für $\triangle KSI \cong \triangle ESI$ (gemeinsame Seite SI, $KI = EI = r$ und gleich lange Tangentenabschnitte $SK = SE$); durch eine 180°-Drehung von $KSEI$ um I geht es in $DPLI$ über, also $KSEI \cong DPLI$. Damit ist gezeigt, daß jeweils gegenüberliegende Seiten des Sechsecks gleich lang sind:

$$UP = RS \equiv a', \quad QR = TU \equiv b', \quad ST = PQ \equiv c',$$

wobei $s' \equiv a' + b' + c'$ der halbe Umfang des Sechsecks ist. Weiterhin ist $\triangle CTS \sim \triangle CAB$, und mit der Höhe h_c als Länge des Lotes von C auf AB (und entsprechend h_c' in $\triangle CTS$) erhalten wir:

$$\frac{TS}{AB} = \frac{c'}{c} = \frac{h_c'}{h_c} = \frac{h_c - 2r}{h_c} = 1 - \frac{2r}{h_c}.$$



Daraus folgt mit $\Delta = rs$ für die Fläche eines Dreiecks

$$\frac{1}{2}ch_c = rs, \quad \frac{2r}{h_c} = \frac{c}{s}, \quad \text{somit} \quad c' = c - \frac{c^2}{s}.$$

Mit analogen Ausdrücken für a' und b' wird

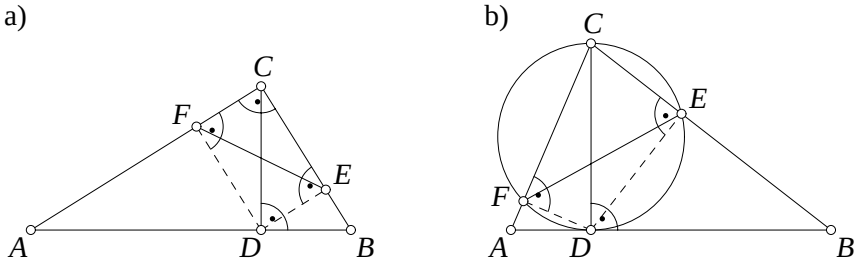
$$s' = a' + b' + c' = (a + b + c) - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s} = 2s - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s}. \tag{W.124}$$

Es bleibt noch, $a^2 + b^2 + c^2$ durch den Umfang des Dreiecks $2s \equiv a + b + c$ abzuschätzen:

$$\begin{aligned} (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &\geq 0, \\ 2(a^2 + b^2 + c^2) &\geq 2ab + 2bc + 2ca \\ 3(a^2 + b^2 + c^2) &\geq (a + b + c)^2 = 4s^2 \\ \frac{a^2 + b^2 + c^2}{s} &\geq \frac{4s}{3}, \qquad -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{s} \leq -\frac{4s}{3}. \end{aligned}$$

Nach (W.124) ist schließlich $s' \leq 2s - \frac{4}{3}s = \frac{2}{3}s$. □

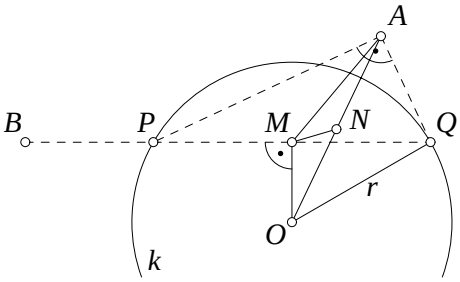
W.82 (Bild) a) Natürlich ist $CFDE$ in jedem Fall ein Rechteck, und da in diesem die Diagonalen stets gleich lang sind, können wir auch CD anstelle von EF betrachten. Offensichtlich hat CD minimale Länge, wenn D gerade der Lotfußpunkt von C auf AB ist. Damit ist dieses einfache Problem bereits gelöst. b) Es wird uns zunächst vielleicht überraschen; die Antwort ist auch im Fall, daß $\triangle ABC$ nicht rechtwinklig ist, dieselbe:



Wenn D der Fußpunkt des Lotes von C auf AB ist, wird EF minimal. Der entscheidende Fakt ist nämlich nicht der, daß $CFDE$ ein Rechteck ist, sondern daß es wegen $\measuredangle CFD = \measuredangle CED = 90°$ immer ein Sehnenviereck mit CD als Durchmesser ist. Je kleiner also CD und damit der Umkreis von $CFDE$, desto kleiner wird auch die Sehne EF.

W.83 (Bild) Angenommen, PQ ist eine Sehne, die die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt; M sei deren Mittelpunkt. Wenn es uns also gelingt, M zu konstruieren, schneidet die Gerade durch B und M den Kreis k in den gesuchten Punkten P und Q, und das Problem ist gelöst. Nun steht jede Sehne PQ senkrecht auf OM, also ist $\measuredangle BMO = 90°$, und M liegt somit auf dem Thales-Kreis über dem Durchmesser BO. Um einen zweiten geometrischen Ort für M zu finden, bemerken wir, daß im rechtwinkligen $\triangle PAQ$ der Mittelpunkt M der Hypotenuse PQ stets gleiche Abstände zu den drei Eckpunkten hat:

$$MP = MA = MQ.$$



Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

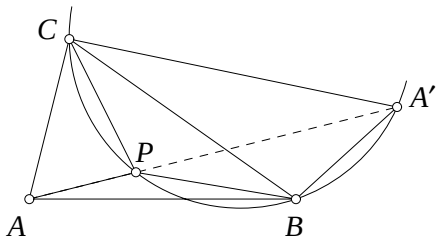
$$r^2 = OM^2 + MQ^2 = OM^2 + MA^2.$$

Damit haben wir eine Gleichung für die Längen OM und MA im $\triangle OMA$. Eine zweite finden wir, indem wir den Mittelpunkt N der gegebenen Strecke OA betrachten. Dann ist MN die Länge der Seitenhalbierenden, für die bekanntlich (vgl. Lösung zu Aufgabe D.70 a) gilt:

$$r^2 = OM^2 + MA^2 = 2MN^2 + \frac{1}{2}OA^2, \quad \text{oder} \quad MN = \sqrt{\frac{r^2}{2} - \frac{OA^2}{4}}.$$

Die Länge der Strecke MN kann damit aus den gegebenen Längen r und OA konstruiert werden (indem z. B. ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenusenlänge r und einer Kathetenlänge $\frac{1}{\sqrt{2}}OA$ gezeichnet wird; die andere Kathete hat dann die Länge $\sqrt{2}\,MN$). Der zweite geometrische Ort für M ist ein Kreis um N mit dem Radius MN. Die Aufgabe hat also zwei, eine oder gar keine Lösung.

W.84 *Beweis:* (Bild) Bezeichnen wir die Winkel bei P mit $\measuredangle BPC \equiv x$, $\measuredangle CPA \equiv y$ und $\measuredangle APB \equiv z$, so ist mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes leicht zu erkennen, daß das Dreieck $BA'C$ an den Eckpunkten in dieser Reihenfolge die Innenwinkel $\pi - y$, $\pi - x$ bzw. $\pi - z$ hat. Die Längen der Seiten BA' und $A'C$ dieses Dreiecks lassen sich nun mit dem Sinussatz berechnen:



$$BA' = a\,\frac{\sin(\pi - z)}{\sin(\pi - x)} = a\,\frac{\sin z}{\sin x}, \qquad A'C = a\,\frac{\sin y}{\sin x}, \quad \text{somit}$$

$$BA' + A'C = a\,\frac{\sin y + \sin z}{\sin x} = (\sin x + \sin y + \sin z)\frac{a}{\sin x} - a.$$

Durch zyklische Vertauschung erhalten wir für die Längen der anderen Seiten des Sechsecks analoge Ausdrücke, so daß für dessen Umfang folgt:

$$p = (\sin x + \sin y + \sin z)\left(\frac{a}{\sin x} + \frac{b}{\sin y} + \frac{c}{\sin z}\right) - (a + b + c).$$

Das Produkt der beiden Klammerausdrücke verlangt förmlich danach, durch die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung abgeschätzt zu werden (vgl. Aufgabe U.11):

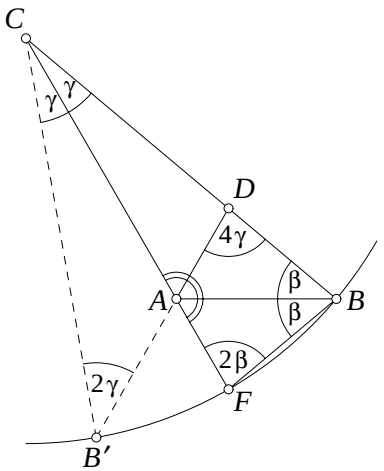
$$p \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - (a + b + c) = 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}). \quad \square$$

W.85 (Bild) $\triangle ABC$ sei das gesuchte Dreieck. Wir spiegeln $\triangle ABC$ an der Seite AC; es entsteht zusätzlich der Punkt B'. Weiterhin wird $\triangle ABD$ an AB umgeklappt, und wir erhalten dadurch F als spiegelbildlichen Punkt zu D. Dann ist offensichtlich $AB = AB'$ und somit die erste Bedingung

$$CD = AB + AD = AB' + AD = B'D$$

genau dann erfüllt, wenn $\triangle CDB'$ gleichschenklig ist. Ferner ist $AD = AF$; also die zweite Bedingung

$$BC = AC + AD = AC + AF = CF$$



dann zutreffend, wenn B, F (und B') auf einem Kreisbogen mit C als Mittelpunkt liegen. Da nun AD nach Voraussetzung die Winkelhalbierende von $\measuredangle CAB$ ist, also $\measuredangle CAD = \measuredangle DAB = \measuredangle BAF$ gilt, und deren Summe 180° beträgt, folgt hieraus: $\measuredangle CAB \equiv \alpha = 120°$. Die Summe der beiden anderen Innenwinkel $\measuredangle ABC \equiv \beta$ und $\measuredangle BCA \equiv \gamma$ ist daher

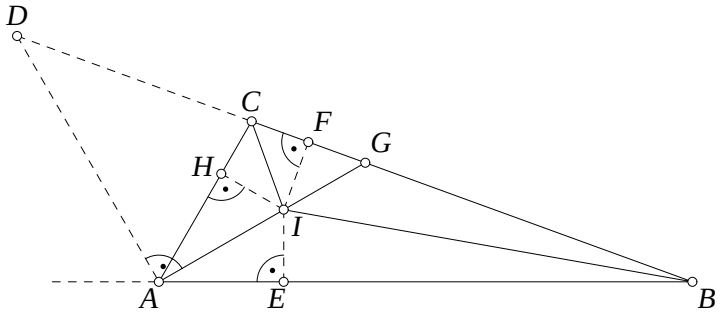
$$\beta + \gamma = 180° - \alpha = 60°. \tag{W.125}$$

Aus der Innenwinkelsumme im $\triangle CBF$ folgt

$$4\beta + \gamma = 180°. \tag{W.126}$$

Aus (W.125) und (W.126) folgen die gesuchten Winkel $\beta = 40°$ sowie $\gamma = 20°$.

W.86 *Beweis:* (Bild) Jede Seite wird vom Inkreismittelpunkt I aus unter einem Winkel gesehen, der gleich dem um $90°$ vermehrten halben Gegenwinkel der Seite ist (vgl. Aufgabe D.9). Somit ist in unserem Dreieck gerade nach Voraussetzung $\measuredangle AIC = 90° + \frac{1}{2}\beta = \gamma$. Ist



G der Schnittpunkt der inneren Winkelhalbierenden AI mit BC, so folgt aus $\measuredangle ACI = \measuredangle ICG = \frac{1}{2}\gamma$ und $\measuredangle CIG = 180° - \measuredangle AIC = 180° - \gamma$, daß auch $\measuredangle ICG = \frac{1}{2}\gamma$ gilt; $\triangle CIG$ hat gleiche Basiswinkel und ist daher gleichschenklig. F und H seien die beiden anderen Berührungspunkte des Inkreises von $\triangle ABC$ mit BC und AC. Mithin ist

$$2CF = CG. \tag{W.127}$$

Die Drachenvierecke $AHIE$ und $CHIF$ werden dann durch ihre Diagonalen AI und CI in jeweils kongruente Dreiecke $\triangle AHI \cong \triangle AEI$ bzw. $\triangle CHI \cong \triangle CFI$ zerlegt. Insbesondere ist also

$$AE = AH \quad \text{bzw.} \quad CH = CF. \tag{W.128}$$

Den Beweis führen wir nun aus der Ähnlichkeit der beiden Dreieckspaare:

$$\text{a) } \triangle ACG \sim \triangle AIC \quad \text{und} \quad \text{b) } \triangle ADG \sim \triangle FIC. \tag{W.129a,b}$$

Um dieses zu zeigen, genügt es nachzuweisen, daß sie jeweils in zwei Winkeln übereinstimmen. Im Fall a) ist $\measuredangle ACG = \measuredangle AIC = \gamma$ und $\measuredangle CGA = \measuredangle ICA = \frac{1}{2}\gamma$; im Fall b) $\measuredangle ICF = \measuredangle DGA = \frac{1}{2}\gamma$ und nach dem Satz, daß die Winkelhalbierenden der von zwei Seiten eingeschlossenen Winkel stets senkrecht aufeinander stehen (vgl. Aufgabe D.7): $\measuredangle GAD = \measuredangle CFI = 90°$. Aus (W.129a) folgt nun mit (W.127)

$$\frac{AG}{CG} = \frac{AC}{CI} \qquad \text{bzw.} \qquad AG \cdot CI = CG \cdot AC = 2CF \cdot AC; \tag{W.130}$$

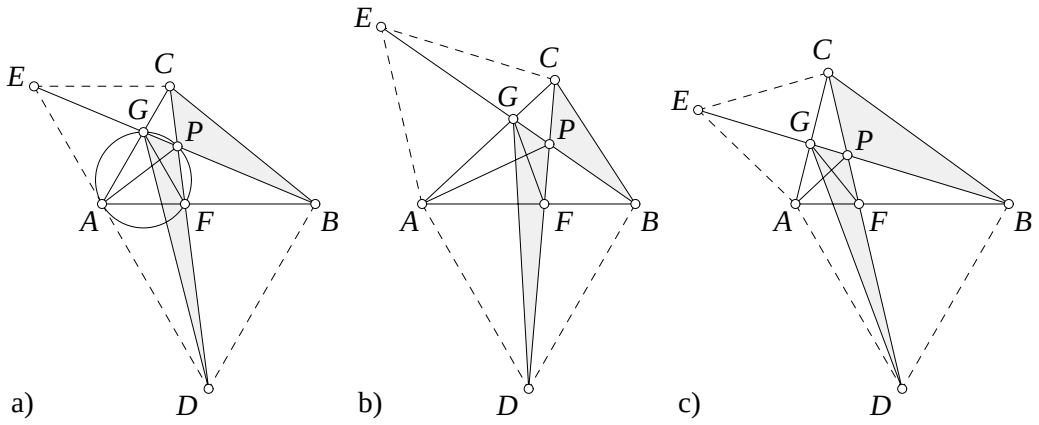
aus (W.127b) mit (W.130)

$$\frac{DG}{AG} = \frac{CI}{CF} \qquad \text{bzw.} \qquad DG = \frac{AG \cdot CI}{CF} = \frac{2CF \cdot AC}{CF} = 2AC. \tag{W.131}$$

Schließlich ist wegen (W.127), (W.128) und (W.131)

$$\begin{aligned} CD &= DG - CG = DG - 2CF = 2(AC - CF) = 2(AC - CH) = \\ &= 2AH = 2AE. \ \square \end{aligned}$$

W.87 (Bild) Die beschriebene Konstruktion läßt sofort erkennen, daß es sich bei P um den FERMAT-Punkt eines spitzwinkligen Dreiecks handelt (vgl. Aufgabe D.54). Von diesem Punkt aus wird jede Dreieckseite unter einem Winkel von 120° gesehen; somit ist $\measuredangle BPC = \measuredangle FPG = 120°$. Nehmen wir zunächst an, der gesuchte Winkel $\measuredangle BAC$ betrage 60° (Bild a). Dann ist die Summe der gegenüberliegenden Winkel $\measuredangle FAG + \measuredangle FPG$ gleich einem Gestreckten, und $AFPG$ ist somit ein Sehnenviereck. $\measuredangle APF = 60° = \measuredangle AGF$ sind nun Winkel über derselben Sehne AF, woraus folgt, daß $\triangle AFG$ gleichseitig ist. Wegen der Voraussetzung $\measuredangle EAC = \measuredangle DAB = 60°$ sind die Punkte E, A und D kollinear und



daher gilt $FG \parallel DA$. Nun können wir $\triangle FAG$ in das flächengleiche $\triangle FDG$ verwandeln und erhalten somit $[AFPG] = [PDG]$. Mit $AC \parallel DB$ und $\triangle PCG \sim \triangle PDB$ folgt

$$\frac{PC}{PD} = \frac{PG}{PB}, \quad \text{oder} \quad PB \cdot PC = PD \cdot PG. \tag{W.132}$$

Erinnern wir uns an die Formel $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ für den Flächeninhalt eines Dreiecks, ist mit (W.132) sofort klar, daß beide gerasterte Flächen im Falle $\measuredangle BAC = 60°$ gleich groß sind. Gilt dagegen $\measuredangle BAC < 60°$ (Bild b), so ist $[FAG] > [FDG]$ und wir können die Ungleichungen

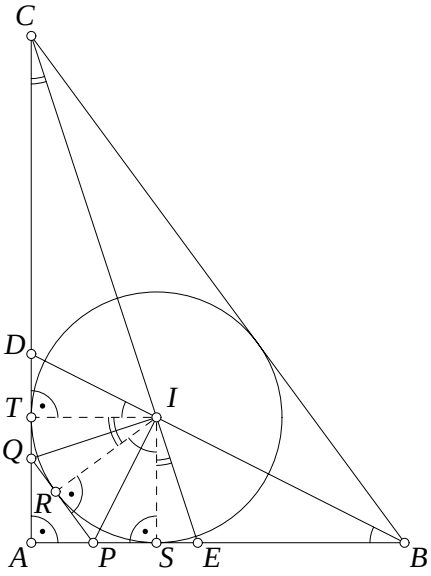
$$[AFPG] > [PDG] > [PBC]$$

aufstellen. Andererseits erhalten wir für $\measuredangle BAC > 60°$ (Bild c) die Ungleichungen

$$[AFPG] < [PDG] < [PBC].$$

Je kleiner der Winkel $\measuredangle BAC$ wird, desto kleiner wird auch das Verhältnis der Flächeninhalte $q \equiv [PBC]/[AFPG]$, so daß q eine monoton wachsende Funktion von $\measuredangle BAC$ ist. Daraus folgt, daß $\measuredangle BAC = 60°$ die einzige Lösung des Problems ist.

W.88 *Beweis:* (Bild) Die gegebenen Summen von Quadraten lassen den Satz des PYTHAGORAS erahnen, weshalb wir versuchen, rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten BI, ID bzw. CI, IE zu konstruieren. An den Inkreis von $\triangle ABC$ wird parallel zur Seite BC eine Tangente gezeichnet, die den Inkreis in R berührt sowie AB in P und AC in Q schneidet. Weiterhin seien S, T die Lotfußpunkte von I auf AB bzw. AC. Mit den üblichen Abkürzungen für die Innenwinkel erhalten wir unmittelbar: $\beta + \gamma = 90°$. Nun sind $RP = PS$ gleich lange Tangentenabschnitte, so daß die rechtwinkligen Dreiecke RIP und SIP kongruent sind. Da $\triangle APQ \sim \triangle ABC$ ist, errechnen wir für den Außenwinkel von $\triangle APQ$:



$$\measuredangle QPB = \measuredangle RPS = 90° + \gamma = 2\measuredangle RPI = 2(90° - \measuredangle RIP) = 2\measuredangle SPI.$$

Somit ist

$$\measuredangle RIP = 45° - \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta}{2} = \measuredangle SIP \quad \text{und} \quad \measuredangle PIB = 180° - \measuredangle SPI - \frac{\beta}{2} = 90°.$$

Nach dem Kongruenzsatz WSW folgt daraus

$$\triangle SIP \cong \triangle TID, \quad \text{also} \quad IP = ID$$

(gleiche Stücke sind jeweils der rechte Winkel, der Inkreisradius und der Winkel $\measuredangle SIP = \measuredangle TID = \measuredangle ABD = \frac{1}{2}\beta$). Damit ist $\triangle PIB$ das gesuchte rechtwinklige Dreieck. Mit derselben Argumentation — angewandt auf die andere Kathete AC — können wir zeigen, daß ebenso $\triangle QIC$ rechtwinklig mit $IQ = IE$ ist. Schließlich folgt aus der oben erwähnten Ähnlichkeit

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AP + PB}{AQ + QC} = \frac{AP}{AQ} = \frac{PB}{QC}, \quad \text{und nach Quadrieren}$$

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{PB^2}{QC^2} = \frac{BI^2 + IP^2}{CI^2 + IQ^2} = \frac{BI^2 + ID^2}{CI^2 + IE^2}. \quad \square$$

LÖSUNGEN: UNGLEICHUNGEN

U.1 *Beweis:* Wir führen den Beweis über die vollständige Induktion. Mit $\mathcal{P}(n)$ bezeichnen wir dazu die Behauptung: $x \geq -1 \Rightarrow (1+x)^n \geq 1+nx$ mit Gleichheit genau für $n = 1$ oder $x = 0$. Dann ist $\mathcal{P}(1)$ trivialerweise erfüllt. Nun sei vorausgesetzt, daß $\mathcal{P}(n)$ für $n > 1$ erfüllt ist. Wir bemerken, daß als Bedingung für Gleichheit in $\mathcal{P}(n+1)$ wegen $n+1 \neq 1$ nur $x = 0$ in Frage kommt. Multiplizieren wir die Voraussetzung mit der nichtnegativen Zahl $1+x$, erhalten wir

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x. \tag{U.101}$$

Das Gleichheitszeichen gilt in (U.101) genau für $nx^2 = 0$, somit genau für $x = 0$. □

U.2 *Beweis:* Wir entwickeln $f(x) = (1+x)^a$ nach der TAYLORschen Formel in eine Reihe und brechen diese nach dem linearen Glied ab:

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)x^2}{2}(1+\theta x)^{a-2}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Wegen $x > -1$ ist $1 + \theta x > 0$ und das Vorzeichen

$$\operatorname{sgn}\{(1+x)^a - 1 - ax\} = \operatorname{sgn}\{a(a-1)\} = \begin{cases} -1 < 0, & \text{für} \quad 0 < a < 1, \\ +1 > 0, & \text{für} \quad a > 1 \ \text{ oder } \ a < 0, \end{cases}$$

beides für $x \neq 0$. □

U.3 *Beweis:* Der Fall $n = 1$ ist trivial. Deshalb nehmen wir $n = 2$ als Induktionsanfang. Zunächst benötigen wir einige elementare Beziehungen beim Rechnen mit komplexen Zahlen. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\Re[z] = x \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z| \quad \text{und analog} \quad \Im[z] = y \leq |z|. \tag{U.102}$$

Weiterhin ist

$$|\overline{z}| = |z|, \quad |z|^2 = z\overline{z}, \quad \Re[z] = \frac{1}{2}(z+\overline{z}), \quad \Im[z] = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z}), \quad |z_1\overline{z_2}| = |z_1||z_2|.$$

Diese Beziehungen benutzen wir, um $|z_1+z_2|^2$ zu berechnen:

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\Re[z_1\overline{z_2}].$$

Den letzten Summanden können wir nun mit (U.102) abschätzen:

$$2\,\Re[z_1\overline{z_2}] \leq 2|z_1\overline{z_2}| = 2|z_1||z_2|. \tag{U.103}$$

Damit wird

$$|z_1+z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Nun können wir die Wurzel ziehen, und, da beide Seiten positiv sind, bleibt das Relationszeichen erhalten:

$$|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{U.104}$$

Allgemein haben wir also als Induktionsbeweis:

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1} z_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} z_i + z_{n+1}\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| + |z_{n+1}| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i| + |z_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|. \quad \text{(U.105)}$$

Gleichheit gilt in (U.105) nur, wenn sie für jedes Paar z_i, z_j in (U.103) erfüllt ist. Dies führt nach kurzer Rechnung auf die Bedingung, daß alle Argumente $\arg z$ (Winkel gegenüber der reellen Achse) untereinander gleich sein müssen:

$$\arg z_1 = \arctan \frac{y_1}{x_1} = \cdots = \arg z_n = \arctan \frac{y_n}{x_n},$$

gleichbedeutend damit, daß alle z_i auf einer durch den Ursprung der komplexen Zahlenebene gehenden Geraden liegen. □
Bemerkung: Ebenso erhalten wir

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\Re[z_1\overline{z_2}] \geq |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| = (|z_1| - |z_2|)^2,$$

also in Kombination mit (U.104)

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad \text{(U.106)}$$

Geometrisch interpretiert bedeutet die Ungleichungskette (U.106), daß die Länge jeder Dreieckseite einerseits immer *kürzer als die Summe* und andererseits immer *länger als die Differenz* der beiden anderen Seiten ist.

U.4 *Beweis:* Hier müssen wir eine Anleihe aus der Analysis machen, indem wir die bekannte Ungleichung $x - 1 - \ln x \geq 0$ für alle $x > 0$ verwenden, wobei Gleichheit nur für $x = 1$ gilt (Zeichnen wir die Funktion $y = \ln x$ in ein kartesisches Koordinatensystem, sehen wir, daß die Gerade $y = x - 1$ „über“ der Logarithmusfunktion liegt und diese gerade im Punkt $x = 1$ tangiert). Mit der Abkürzung

$$A \equiv \sum_{k=1}^{n} \delta_k a_k$$

liefert die Anwendung dieser Ungleichung $a_i/A - 1 - \ln(a_i/A) \geq 0$ für jedes i. Multiplizieren wir jeden dieser Terme mit δ_i and summieren über i, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\delta_i a_i}{A} - \delta_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \delta_i \ln\left(\frac{a_i}{A}\right) \geq 0.$$

Wegen der obigen Definition von A und der Bedingung $\delta_1 + \cdots + \delta_n = 1$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\delta_i a_i}{A} - \delta_i\right) = 0 \qquad \text{und somit} \qquad \sum_{i=1}^{n} \delta_i \ln\left(\frac{a_i}{A}\right) \leq 0. \quad \text{(U.107)}$$

Jetzt nutzen wir die Eigenschaft der Logarithmus-Funktion, im gesamten Definitionsbereich streng monoton zu wachsen, sowie das Exponentialgesetz aus:

$$\exp\left[\sum_{i=1}^{n} \delta_i \ln\left(\frac{a_i}{A}\right)\right] = \prod_{i=1}^{n} \exp\left[\delta_i \ln\left(\frac{a_i}{A}\right)\right] = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{A}\right)^{\delta_i} = \frac{1}{A} \prod_{i=1}^{n} a_i^{\delta_i} \leq \exp(0) = 1.$$

Somit ist $(a_1^{\delta_1} \cdots a_n^{\delta_n})/A \leq 1$ oder

$$a_1^{\delta_1} \cdots a_n^{\delta_n} \leq \delta_1 a_1 + \cdots + \delta_n a_n. \tag{U.108}$$

Gleichheit gilt in (U.108) genau dann, wenn sie auch in (U.107) gilt. Da jeder Summand in (U.107) wegen $a_i > 0$, $\delta_i > 0$ nichtnegativ ist, kann Gleichheit dort nur vorliegen, wenn jeder Summand null ist. Dies ist gleichbedeutend mit $a_i/A = 1$. Mit anderen Worten, Gleichheit gilt nur für $a_1 = \cdots = a_n$. □

U.5 *Beweis:* Die Behauptung folgt unmittelbar aus der gewichteten AM-GM Ungleichung (U.3), wenn wir darin alle Gewichte gleich setzen: $\delta_1 = \cdots = \delta_n = \frac{1}{n}$. □

U.6 *Beweis:* Wir wenden die AM-GM Ungleichung auf die Reziproken $1/a_i$ an. □

U.7 *Beweis:* Wir kombinieren die AM-GM Ungleichung und die GM-HM Ungleichung und lassen den GM-Teil weg. □

U.8 *Beweis:* Wie die folgende Rechnung zeigt, sind die HÖLDERschen Ungleichungen eine direkte Folgerung aus der gewichteten AM-GM Ungleichung (U.5), wenn letztere auf jeden, in den eckigen Klammern stehenden Summanden angewendet wird:

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{j=1}^{n} |a_{1j}|^{p_1} \cdots |a_{mj}|^{p_m}}{R_1^{p_1} \cdots R_m^{p_m}} &= \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{|a_{1j}|}{R_1} \right)^{p_1} \cdots \left(\frac{|a_{mj}|}{R_m} \right)^{p_m} \right] \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \left[p_1 \frac{|a_{1j}|}{R_1} + \cdots + p_m \frac{|a_{mj}|}{R_m} \right] = p_1 + \cdots + p_m = 1, \\
\frac{\sum_{i=1}^{m} |a_{i1}|^{q_1} \cdots |a_{in}|^{q_n}}{C_1^{q_1} \cdots C_n^{q_n}} &= \sum_{i=1}^{m} \left[\left(\frac{|a_{i1}|}{C_1} \right)^{q_1} \cdots \left(\frac{|a_{in}|}{C_n} \right)^{q_n} \right] \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \left[q_1 \frac{|a_{i1}|}{C_1} + \cdots + q_n \frac{|a_{in}|}{C_n} \right] = q_1 + \cdots + q_n = 1.
\end{aligned}$$

Nach der AM-GM Ungleichung gilt Gleichheit genau dann in (U.9), wenn für alle j

$$\frac{|a_{1j}|}{R_1} = \cdots = \frac{|a_{mj}|}{R_m} = \lambda_j = \text{const}$$

bzw. $|a_{ij}| = \lambda_j R_i$ ist. Dies ist gleichbedeutend mit $|a_{kj}|/|a_{lj}| = R_k/R_l = \text{const}$ für alle Paare (k, l) *unabhängig von* j, welches Proportionalität zwischen allen Spaltenvektoren der Matrix $[|a_{ij}|]$ bedeutet. Analog bestätigen wir die Gleichheitsbedingung in (U.10). □

U.9 *Beweis:* Wir setzen in die verallgemeinerte HÖLDERsche Ungleichung (U.9) $m = 2$, $p_1 \equiv \frac{1}{p}$, $p_2 \equiv \frac{1}{q}$ und $|a_{1i}| \equiv |a_i|^p$, $|a_{2i}| \equiv |b_i|^q$ für alle $i = 1, \ldots, n$ ein. Gleichheit gilt demnach für $|a_i|^p \propto |b_i|^q$ oder $|b_i| \propto |a_i|^{p-1}$. □

U.10 *Beweis:* Für $p = 1$ folgt die Behauptung direkt aus der Dreiecksungleichung (U.4). Im Fall $p > 1$ wählen wir eine Zahl $q > 1$ derart, daß die Relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ erfüllt ist. Nehmen wir die HÖLDERsche Ungleichung (U.11) in der Form

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i \beta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

und setzen einmal $\alpha_i \equiv |a_i|$, $\beta_i \equiv |a_i + b_i|^{\frac{p}{q}}$ und ein weiteres Mal $\alpha_i \equiv |b_i|$, $\beta_i \equiv |a_i + b_i|^{\frac{p}{q}}$ ein, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i||a_i + b_i|^{\frac{p}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{bzw.} \tag{U.109}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i||a_i + b_i|^{\frac{p}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{U.110}$$

Wegen $p = 1 + \frac{p}{q}$ ist weiterhin für jedes i nach der Dreiecksungleichung

$$|a_i + b_i|^p = |a_i + b_i||a_i + b_i|^{\frac{p}{q}} \leq |a_i||a_i + b_i|^{\frac{p}{q}} + |b_i||a_i + b_i|^{\frac{p}{q}}. \tag{U.111}$$

Summieren wir über die Terme (U.111) und benutzen dabei (U.109) und (U.110), folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{U.112}$$

Der zweite Faktor auf der rechten Seite von (U.112) verschwindet gewiß nicht (sonst wäre die Behauptung offensichtlich), so daß nach Division durch diesen (U.12) folgt. □

U.11 *Beweis:* Die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung (U.13) folgt durch Einsetzen von $p = q = 2$ in die HÖLDERsche Ungleichung (U.11). □

U.12 *Beweis:* In beiden Fällen bezüglich der jeweiligen Ordnung der Zahlen a_i und b_i gilt für jedes Paar (i, j)

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0. \tag{U.113}$$

Summation über beide Indizes und Ausmultiplizieren führt auf die Behauptung:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \sum_{j=1}^{n} (1) - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \sum_{i=1}^{n} (1) \geq 0 \qquad \text{oder}$$

$$2n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - 2 \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i \geq 0.$$

Aus (U.113) erkennen wir, daß das Gleichheitszeichen für $a_i = a_j$ oder $b_i = b_j$ für alle Paare (i, j), also $a_1 = \cdots = a_n$ oder $b_1 = \cdots = b_n$ gilt. □

U.13 *Beweis:* Da die Ungleichung symmetrisch in den Variablen x, y, z ist (d. h. jede Permutation der x, y, z die Ungleichung unverändert läßt), können wir o. B. d. A. $x \geq y \geq z$ annehmen. Schreiben wir die behauptete Ungleichung um als

$$(x-y)[x^\lambda(x-z) - y^\lambda(y-z)] + z^\lambda(x-z)(y-z) \geq 0,$$

so ist jeder Term auf der linken Seite offensichtlich nichtnegativ, also (U.15) wahr. □

U.14 *Beweis:* Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion. Für $n = 2$ folgt (U.17) unmittelbar aus der Konvexität (U.16) von $f(x)$. Angenommen, die zu beweisende Ungleichung ist wahr für $n = k$ und die Zahlen $c_1, \ldots, c_{k+1}$ addieren sich zu 1:

$$c_1 + \cdots + c_{k+1} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{1 - c_{k+1}} = 1. \tag{U.114}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} c_i x_i\right) &= f\left((1-c_{k+1})\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{1-c_{k+1}} x_i + c_{k+1}x_{k+1}\right) \\ &\leq (1-c_{k+1}) f\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{1-c_{k+1}} x_i\right) + c_{k+1} f(x_{k+1}) \end{aligned}$$

wegen der Konvexität von f. Da die Zahlen $c_i/(1-c_{k+1})$ für $1 \leq i \leq k$ sich nach (U.114) ebenfalls zu 1 addieren, haben wir

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{1-c_{k+1}} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{1-c_{k+1}} f(x_i) = \frac{1}{1-c_{k+1}} \sum_{i=1}^{k} c_i f(x_i),$$

also gilt (U.17) auch für $n = k+1$ und der Induktionsbeweis ist geführt. □

U.21 *Beweis:* Wegen des Satzes des PYTHAGORAS für rechtwinklige Dreiecke $a^2+b^2 = c^2$ ist die Behauptung gleichwertig mit $a + b \leq \sqrt{2}\,\sqrt{a^2+b^2}$. Dies folgt der Reihe nach aus

$$0 \leq (a-b)^2,$$

$$2ab \leq a^2 + b^2,$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \leq 2(a^2+b^2),$$

$$a + b \leq \sqrt{2}\,\sqrt{a^2+b^2}.$$

Gleichheit liegt bei $a = b$ vor, also bei einem Quadrat. □
Bemerkung: Die obige Reihenfolge führt korrekt von wahren Voraussetzungen zur Behauptung. Bei der Lösungssuche gehen wir meist den umgekehrten Weg; deshalb ist bei der Abfassung des Beweises daran zu denken, daß die einzelnen Schritte umgekehrt werden.

U.22 *Beweis:* Zunächst multiplizieren wir die Behauptung mit x^4, damit die Brüche verschwinden (wegen $x^4 > 0$ bleibt das Relationszeichen erhalten):

$$x^{12} - x^9 - x^3 + 1 \geq 0.$$

Unsere Strategie ist es hier, dieses Polynom so zu faktorisieren, daß alle Faktoren positiv sind. Das ist hier nicht besonders schwer, da es nur zwei Faktoren sind:

$$x^{12} - x^9 - x^3 + 1 = (x^9 - 1)(x^3 - 1). \tag{U.115}$$

Nun unterscheiden wir
1. $x \geq 1$: damit auch $x^3 \geq 1$ und $x^9 \geq 1$, somit ist (U.115) nichtnegativ;
2. $x \leq 1$: damit auch $x^3 \leq 1$ und $x^9 \leq 1$, also auch hier (U.115) nichtnegativ. □

U.23 *Beweis:* a) Wir können o. B. d. A. annehmen, daß c die größte Zahl ist. Dann ist

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - (a^2b + b^2c + c^2a) &= a^3 - a^2b + b^3 - b^2c + c^3 - c^2a \\ &= a^2(a-b) + b^2(b-c) + c^2(c-a) \\ &= a^2(a-b) - b^2(a-b+c-a) + c^2(c-a) \\ &= (a^2-b^2)(a-b) + (c^2-b^2)(c-a) \\ &= (a-b)^2(a+b) + (c-b)(c-a)(c+b) \geq 0 \end{aligned}$$

wegen $c \geq b$ und $c \geq a$. b) Siehe Lösung von Aufgabe G.1. □

U.24 *Beweis:* Die Teile $a^4+b^4+c^4$ und a^2bc sind nicht so offensichtlich in einer einfachen Ungleichung unterzubringen, wohl aber

$$2a^4 + b^4 + c^4 = a^4 + a^4 + b^4 + c^4 \geq 4a^2bc. \tag{U.116}$$

Letztere folgt aus der AM-GM Ungleichung $w + x + y + z \geq 4\sqrt[4]{wxyz}$, wenn wir dort $w = a^4$, $x = a^4$, $y = b^4$ und $z = c^4$ einsetzen, oder direkt aus der gewichteten AM-GM Ungleichung

$$\frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{4}c^4 \geq (a^4)^{\frac{1}{2}} \cdot (b^4)^{\frac{1}{4}} \cdot (c^4)^{\frac{1}{4}} = a^2bc.$$

Nun können wir die Variablen in (U.116) zyklisch tauschen, anschließend die vier Ungleichungen addieren und durch 4 dividieren. □

U.25 *Beweis:* Die Methode der Zerlegung in kürzere Ungleichungen läßt hoffen, daß

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \tag{U.117}$$

gelten könnte, da dann die Behauptung durch zyklische Vertauschung und Addition folgt. Eine Beseitigung der Brüche in (U.117) führt auf

$$3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c), \tag{U.118}$$

die ihrerseits unmittelbar aus der TSCHEBYSCHEFFschen Ungleichung (U.14) folgt. Falls uns letztere nicht geläufig ist, können wir noch den beschwerlichen Weg gehen und (U.118) in einen Ausdruck umformen, der offensichtlich größer gleich null ist:

$$\begin{aligned} &2a^3 + 2b^3 + 2c^3 - a^2b - ab^2 - a^2c - ac^2 - b^2c - bc^2 \\ &= (a^3 - a^2b - ab^2 + b^3) + (a^3 - a^2c - ac^2 + c^3) + (b^3 - b^2c - bc^2 + c^3) \\ &= (a-b)^2(a+b) + (a-c)^2(a+c) + (b-c)^2(b+c) \geq 0. \end{aligned}$$ □

U.26 *Beweis:* Was für das Aufteilen von Summen gilt, kann ggf. auch mit Produkten — wie in der vorliegenden Ungleichung — probiert werden:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{2}{\sqrt{ab}}$$

wäre die naheliegende Vermutung, die sich auch sofort mittels (U.18), diesmal in der Form $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$, bestätigt. Zyklische Vertauschung der Variablen und Multiplikation der drei Ungleichungen liefert die Behauptung. □

U.27 *Beweis:* Manchmal ist das Vorgehen zu rigoros: Nehmen wir z. B. $x^2/y^2\geq y/x$ heraus, führt das auf $x\geq y$ bzw. bei den anderen Termen auf $y\geq z$ und $z\geq x$. Zwei dieser Ungleichungen lassen sich mühelos erfüllen, alle drei aber nicht. Deshalb versuchen wir, etwas mehr zu „greifen“:

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}\geq 2\,\frac{x}{z}\quad\text{wegen}\quad\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\right)^2\geq 0.$$

Nun ist es nicht schwer zu erkennen, daß die Behauptung äquivalent ist zu

$$\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}-\frac{z}{x}\right)^2+\left(\frac{z}{x}-\frac{x}{y}\right)^2\geq 0,$$

was zweifellos wahr ist. Gleichheit liegt bei $x=y=z$ vor. □

U.31 *Beweis:* Zweimalige Anwendung der AM-GM Ungleichung ergibt mit $1+x^4\geq 2x^2$

$$\begin{aligned}x^4(1+y^4)+y^4(1+z^4)+z^4(1+x^4)&\geq 3(xyz)^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{(1+x^4)(1+y^4)(1+z^4)}\\&\geq 3(xyz)^{\frac{4}{3}}\cdot 2(xyz)^{\frac{2}{3}}=6(xyz)^2.\ \square\end{aligned}$$

U.32 *Beweis:* Setzen wir $u_k\equiv\sqrt{k}\,a_k$ und $v_k\equiv b_k/\sqrt{k}$, $k=1,2,\ldots,n$, dann gilt

$$\boldsymbol{u}^2=\sum_{k=1}^n u_k^2=\sum_{k=1}^n ka_k^2,\quad \boldsymbol{v}^2=\sum_{k=1}^n v_k^2=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}a_k^2,\quad \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\sum_{k=1}^n u_kv_k=\sum_{k=1}^n a_kb_k.$$

Die behauptete Ungleichung folgt direkt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung $\boldsymbol{u}^2\cdot\boldsymbol{v}^2\geq(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2$. □

U.33 Bringen wir die bekannten Größen a,b,c,d auf die rechten Seiten der beiden Gleichungen, erhalten wir

$$7-e=a+b+c+d,\tag{U.119}$$

$$13-e^2=a^2+b^2+c^2+d^2,\tag{U.120}$$

zwischen denen nach Cauchy-Schwarz die Ungleichung vom Typ c)

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geq\frac{1}{4}(a+b+c+d)^2\tag{U.121}$$

besteht. Dies wird sofort klar, wenn wir die Vektoren $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \equiv (a, b, c, d)$ und $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \equiv (1, 1, 1, 1)$ betrachten. (U.119) und (U.120) in (U.121) eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned}
4(13 - e^2) &\geq (7 - e)^2, \\
52 - 4e^2 &\geq 49 - 14e + e^2, \\
0 &\geq 5e^2 - 14e - 3, \\
0 &\geq e^2 - \frac{14}{5}e - \frac{3}{5}, \\
\frac{49}{25} &\geq \left(e - \frac{7}{5}\right)^2 - \frac{15}{25}, \\
\frac{8}{5} &\geq \left|e - \frac{7}{5}\right|.
\end{aligned}$$

Nun machen wir die übliche Fallunterscheidung:
1. $e \geq \frac{7}{5}$ (und die Betragsstriche können wegfallen) liefert $e \leq 3$, also zusammen $\frac{7}{5} \leq e \leq 3$.
2. $e \leq \frac{7}{5}$ (und der Betrag ist $\frac{7}{5} - e$) ergibt $e \geq -\frac{1}{5}$, also $-\frac{1}{5} \leq e \leq \frac{7}{5}$.
Beide Fälle können somit zur Lösung $e \in [-\frac{1}{5}, 3]$ zusammengefaßt werden.

U.34 *Beweis:* Beim Typ d) $\mathcal{S}_1 \geq \mathcal{S}_3$ ist es manchmal nicht einfach, die Summe $\mathcal{S}_2$, durch die ja dividiert wurde, zu erraten. $\mathcal{S}_1$ gibt uns jedoch die Summe $\boldsymbol{u}^2$ und $\mathcal{S}_3$ die Summe $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ vor (vgl. Aufgabe U.11):

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1 \equiv \boldsymbol{u}^2 &= u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = \frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n}, \\
\mathcal{S}_3 \equiv \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2}.
\end{aligned}$$

Um nun $\boldsymbol{u}^2 \cdot \boldsymbol{v}^2 \geq (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2$ erfüllen zu können, vermuten wir durch gliedweisen Vergleich von

$$u_i^2 = \frac{a_i^2}{a_i + b_i} \quad \text{und} \quad u_i^2 v_i^2 = \frac{a_i^2}{4} : \qquad v_i^2 = \frac{a_i + b_i}{4},$$

somit

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_2 \equiv \boldsymbol{v}^2 = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 &= \frac{a_1 + b_1}{4} + \frac{a_2 + b_2}{4} + \cdots + \frac{a_n + b_n}{4} \\
&= \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also tatsächlich $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3$ und haben damit die Behauptung bewiesen. □

U.35 *Beweis:* Der Typ d) mit $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$ läßt sich am einfachsten realisieren, wenn die Elemente von Vektor $\boldsymbol{u}$ gleich denen von Vektor $\boldsymbol{v}$ sind, jedoch zyklisch verschoben werden. Bei der vorliegenden Ungleichung ist also

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \equiv (a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1).$$

Diese zyklische Verschiebung hat keinen Änderung der Summe der Quadrate in $\boldsymbol{u}^2$ zur Folge, so daß $\boldsymbol{u}^2 = \boldsymbol{v}^2$ bzw. $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$ gilt und auf beiden Seiten der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung die Wurzel gezogen werden kann:

$$\boldsymbol{u}^2 \geq \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_1). \quad \square$$

U.36 *Beweis:* Die AM-HM Ungleichung in den positiven Zahlen a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2 \tag{U.122}$$

hat die Besonderheit, daß sie außer der Summe $\sum a_i$ auch die Summe der Reziproken $\sum(1/a_i)$ enthält. Setzen wir die linke Seite der behaupteten Ungleichung gleich $\sum a_i$, also $a_i = S/(S - x_i)$, so vereinfacht sich $\sum(1/a_i)$ wegen übereinstimmender Zähler der a_i zu

$$\sum \frac{1}{a_i} = \frac{S - x_1}{S} + \frac{S - x_2}{S} + \cdots + \frac{S - x_n}{S} = \frac{nS - S}{S} = n - 1. \tag{U.123}$$

Die Behauptung folgt direkt aus (U.122) und (U.123). □
Bemerkung: Auch die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung (U.13) führt hier zum Ziel.

U.37 *Beweis:* Obwohl hier die Zähler auf den ersten Blick nicht gleich sind, gelangen wir trotzdem dorthin, wenn einfach drei „nahrhafte Einsen“ in Form von

$$\frac{b^2 + c^2}{b^2 + c^2} + \frac{c^2 + a^2}{c^2 + a^2} + \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 3$$

auf beiden Seiten addiert werden:

$$(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} + \frac{1}{a^2 + b^2}\right) \geq \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}.$$

Diese Ungleichung folgt nun direkt aus der AM-HM Ungleichung. □
Bemerkung: Der „AM-HM Trick“ funktioniert also auch, falls bei allen gebrochenen Summanden die Summe aus Zähler und Nenner untereinander gleich ist.

U.41 *Beweis:* Bei dieser Aufgabe fällt auf, daß die Nebenbedingung symmetrisch in den drei Variablen ist, der abzuschätzende Ausdruck dagegen nicht. Wir sehen ihm aber an, daß x und z vertauschbar sind und damit die Variable y offensichtlich bevorzugt ist. Wenn wir also durch die Nebenbedingung eine Variable eliminieren wollen, dann sollte es y sein:

$$xyz(x + y + z) = xzy^2 + xz(x + z)y = 1, \qquad \text{oder} \qquad y^2 + (x + z)y - \frac{1}{xz} = 0.$$

Der Zielausdruck expandiert zu

$$\mathcal{A} = (x + y)(y + z) = xy + y^2 + xz + yz = y^2 + (x + z)y + xz.$$

Ein simpler Vergleich führt auf $\mathcal{A} = xz + \frac{1}{xz} \geq 2$, letzteres wegen der allseits bekannten Ungleichung (U.18). □

U.42 *Beweis:* Ein Ausmultiplizieren der Nebenbedingung ergibt

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) = 1 + (a + b + c) + (bc + ca + ab) + abc = 8.$$

Da abc unser Zielausdruck ist, müssen wir die Terme $(a + b + c)$ und $(bc + ca + ab)$ durch abc abschätzen. Dabei hilft uns natürlich AM-GM:

$$a + b + c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}, \qquad bc + ca + ab \geq 3(abc)^{\frac{2}{3}},$$

mit deren Hilfe aus der Nebenbedingung

$$8 = (1+a)(1+b)(1+c) \geq 1 + 3(abc)^{\frac{1}{3}} + 3(abc)^{\frac{2}{3}} + abc = \left[1 + (abc)^{\frac{1}{3}}\right]^3$$

wird. Daraus folgt $2 \geq 1 + \sqrt[3]{abc}$ und schließlich $abc \leq 1$. □

U.43 *Beweis:* Die Kantenlängen des Quaders seien mit a, b, c bezeichnet, sein Volumen ist $V = abc$ und seine Oberfläche beträgt $A = 2(bc + ca + ab)$. Wir suchen eine Ungleichung zwischen A und V, die wir bereits in der Lösung zu Aufgabe **U.42** mittels AM-GM gefunden haben:

$$bc + ca + ab \geq 3(abc)^{\frac{2}{3}}, \qquad \text{oder} \qquad A \geq 6V^{\frac{2}{3}}$$

mit Gleichheit nur bei $bc = ca = ab$ bzw. äquivalent dazu $a = b = c$. Ist also im Fall a) A fest, wird das größte Volumen $V = (A/6)^{\frac{3}{2}}$ für $a = b = c$ (der Würfel) bzw. b) V fest, die kleinste Oberfläche $A = 6V^{\frac{2}{3}}$ ebenfalls für $a = b = c$ angenommen. □

U.44 *Beweis:* Wir erkennen, daß ein bloßes Abschätzen des gegebenen Ausdrucks $\mathcal{A}$ mittels (U.18) ohne Berücksichtigung der Nebenbedingung lediglich auf die schwächere Ungleichung $\mathcal{A} \geq 8$ führt. Um zur Verschärfung die Nebenbedingung $a + b = 1$ ins Spiel zu bringen, multiplizieren wir zunächst aus:

$$\mathcal{A} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 = (a^2 + b^2) + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + 4, \tag{U.124}$$

und erkennen daran, daß es im weiteren um die beiden Ausdrücke in den runden Klammern geht. Diese treten auf, wenn wir die Nebenbedingung quadrieren und mittels $a^2 + b^2 \geq 2\,ab$ nach unten abschätzen:

$$1 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab \geq 4\,ab \qquad \text{oder} \qquad ab \leq \frac{1}{4}.$$

Es ist also

$$a^2 + b^2 = 1 - 2\,ab \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{(ab)^2} \geq \frac{1}{2(ab)^2} \geq 8.$$

Beides in (U.124) eingesetzt, ergibt die Behauptung $\mathcal{A} \geq \frac{25}{2}$. □

U.45 *Beweis:* Es liegt die Vermutung nahe, daß es sich hierbei um Cauchy-Schwarz $\boldsymbol{u}^2 \cdot \boldsymbol{v}^2 \geq (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2$ mit

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \equiv \left(\frac{a}{\sqrt{a+b}}, \frac{b}{\sqrt{b+c}}, \frac{c}{\sqrt{c+d}}, \frac{d}{\sqrt{d+a}}\right)$$

handelt. Dazu paßt nur eine Wahl von $\boldsymbol{v}$, nämlich

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \equiv \left(\frac{\sqrt{a+b}}{2}, \frac{\sqrt{b+c}}{2}, \frac{\sqrt{c+d}}{2}, \frac{\sqrt{d+a}}{2}\right),$$

und zwar wegen

$$\boldsymbol{v}^2 = \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{1}{2}.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die behauptete Ungleichung. Gleichheit liegt nur dann vor, wenn beide Vektoren proportional sind: $\boldsymbol{u} = 2\lambda\boldsymbol{v}$. Dies führt auf ein lineares, homogenes Gleichungssystem, dessen Determinante für eine nichttriviale Lösung verschwinden muß:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^4 - 1 = 0.$$

Diese charakteristische Gleichung hat die (jeweils zweifachen) Lösungen $\lambda_{1,2} = 0$ und $\lambda_{3,4} = 2$, wobei die ersten beiden herausfallen. Also bleibt $\lambda = 2$, welches auf die Gleichungen $2a = a+b$ usw., somit $a = b(= c = d)$ führt. Daraus folgt unmittelbar Gleichheit nur für $a = b = c = d = \frac{1}{4}$. □ — *Bemerkung:* Vgl. Aufgabe U.34.

U.53 *Beweis:* Daß aus $\{x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0\}$ auch $\{\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \ldots, \sigma_n > 0\}$ folgt, ist unmittelbar einzusehen, da in der Definition der σ's nur positive Summanden vorkommen. Um die umgekehrte Richtung zu zeigen, schreiben wir die Definition (U.19) nochmals hin:

$$x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x + (-1)^n\sigma_n = 0,$$

und überprüfen, ob diese Gleichung auch negative Wurzeln haben kann, indem wir x durch $-x$ ersetzen:

$$x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \cdots + \sigma_{n-1}x + \sigma_n = 0. \tag{U.131}$$

Wenn nun alle σ_i positiv sind, kann das Polynom (U.131) nicht für positive x verschwinden. Da es aber gerade für $x = -x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ Nullstellen hat, folgt daraus $x_k > 0$. □

U.54 Nein, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt: $a > 0$, $b = c = -a/3$ erfüllen $a + b + c = a/3 > 0$ und $abc = a^3/9 > 0$, sind aber nicht allesamt positiv.

U.81 *Beweis:* Aus der Anzahl der Summanden auf der linken Seite der behaupteten Ungleichung und dem Faktor 4 auf der rechten Seite können wir vermuten, daß das Prinzip „Teile und (be)herrsche“ (s. Abschnitt U.2.1) zur Anwendung kommt. Tatsächlich folgt wegen $a, b, c, d > 0$ aus $a + b + c < a + b + c + d \equiv s$ bzw. den analogen Ungleichungen $a + b + d < s$, $a + c + d < s$ und $b + c + d < s$:

$$\frac{1}{a+b+c} > \frac{1}{s}, \qquad \frac{1}{a+b+d} > \frac{1}{s}, \qquad \frac{1}{a+c+d} > \frac{1}{s}, \qquad \frac{1}{b+c+d} > \frac{1}{s}.$$

Deren Addition liefert die Behauptung. □
Bemerkung: Das geübte Auge erkennt die Verschärfung durch AM-HM:

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \geq \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{a+b+c+d}.$$

U.82 *Beweis:* Wir benötigen zwei Schritte: den ersten nach Cauchy-Schwarz und den zweiten nach AM-GM:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3) \geq \left(a^{\frac{5}{2}}+b^{\frac{5}{2}}+c^{\frac{5}{2}}+d^{\frac{5}{2}}+e^{\frac{5}{2}}\right)^2$$
$$\geq 5^2\left(a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{5}{2}}c^{\frac{5}{2}}d^{\frac{5}{2}}e^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{2}{5}} = 25abcde. \quad \square$$

U.83 *Beweis:* Die Ungleichung ist eine direkte Konsequenz der AM-GM Ungleichung, da

$$\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}\cdots\frac{a_n}{b_n} = 1. \quad \square$$

U.84 *Beweis:* Nach der AM-GM Ungleichung ist

$$[(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)]^{\frac{1}{n}} \leq \frac{(1+x_1)+(1+x_2)+\cdots+(1+x_n)}{n} = \frac{n+S}{n},$$
$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \leq \left(1+\frac{S}{n}\right)^n.$$

Für die Potenz auf der rechten Seite können wir nach dem binomischen Satz schreiben:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{S}{n}\right)^n &= 1+S+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{S^2}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{S^3}{n^3}\\ &\quad+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{S^n}{n^n}\\ &= 1+S+1\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{S^2}{2!}+1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{S^3}{3!}\\ &\quad+\cdots+1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{S^n}{n!}\\ &\leq 1+S+\frac{S^2}{2!}+\frac{S^3}{3!}+\cdots+\frac{S^n}{n!}\end{aligned}$$

mit Gleichheit nur für $n=1$. $\square$

U.85 *Beweis:* Setzen wir $m \equiv \min_k(a_k/b_k)$ und $M \equiv \max_k(a_k/b_k)$, so ist

$$\begin{aligned} m \leq& \frac{a_k}{b_k} \leq M,\\ mb_k \leq& a_k \leq Mb_k,\\ m\sum_{k=1}^n b_k \leq& \sum_{k=1}^n a_k \leq M\sum_{k=1}^n b_k,\\ m \leq& \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{\sum_{k=1}^n b_k} \leq M. \quad \square\end{aligned}$$

Anwendung: Für $x \geq 0$ gilt

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1+2x+\cdots+nx^{n-1}}{n+(n-1)x+\cdots+x^{n-1}} \leq n,$$
$$\frac{1}{n} \leq \frac{1+2x+\cdots+nx^{n-1}}{1+2^2x+\cdots+n^2x^{n-1}} \leq 1.$$

U.86 *Beweis:* Aus $(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 \geq 0$ folgt

$$2\sqrt{bc} \leq b+c, \tag{U.181}$$
$$\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{2\sqrt{bc}},$$
$$\frac{bc}{b+c} \leq \frac{\sqrt{bc}}{2}, \qquad \text{also} \qquad \frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}+\frac{ab}{a+b} \leq \frac{1}{2}(\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}).$$

Die rechte Seite nochmals mit (U.181) abgeschätzt, ergibt die Behauptung. □

U.87 *Beweis:* Folgerung der AM-HM Ungleichung (U.8). □

U.88 *Beweis:* a) Expandieren des Produkts führt auf

$$\mathcal{P} = 1+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}\right)+\frac{1}{xyz}.$$

Nach AM-GM gilt

$$3\sqrt[3]{xyz} \leq x+y+z = 1, \quad \text{somit} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 3,$$

und weiter

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq \frac{3}{(xyz)^{\frac{1}{3}}}, \qquad \left(\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}\right) \geq \frac{3}{(xyz)^{\frac{2}{3}}},$$

so daß

$$\mathcal{P} \geq 1+\frac{3}{(xyz)^{\frac{1}{3}}}+\frac{3}{(xyz)^{\frac{2}{3}}}+\frac{1}{xyz} = \left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^3 \geq (1+3)^3 = 64. \ \square$$

b) Ein Expandieren liefert hier

$$\mathcal{P} = \frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{xyz} = \frac{1-(x+y+z)+(yz+zx+xy)-xyz}{xyz}$$
$$= \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1,$$

wobei jetzt AM-HM weiterhilft:

$$\mathcal{P}+1 = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} = 9, \quad \text{also} \quad \mathcal{P} \geq 8. \ \square$$

U.89 *Beweis:* Diese Aufgabe ist identisch mit Aufgabe U.88 b, wenn wir dort

$$x \equiv \frac{1}{1+a}, \quad y \equiv \frac{1}{1+b}, \quad z \equiv \frac{1}{1+c}, \quad a = \frac{1}{x} - 1, \quad b = \frac{1}{y} - 1, \quad c = \frac{1}{z} - 1$$

setzen. □

U.90 *Beweis:* Etwas ungewöhnlich, aber kurz und knapp:

$$\begin{aligned} ad + bc &\le (c+d)\max(a,b) \\ &\le \min(a,b)\max(a,b) \\ &= ab. \end{aligned}$$ □

U.91 *Beweis:* Multiplikation der beiden Voraussetzungen ergibt

$$ac + bd + ad + bc \le ef.$$

Damit und wegen AM-GM $2\sqrt{ac}\sqrt{bd} = 2\sqrt{ad}\sqrt{bc} \le ad + bc$ ist

$$\left(\sqrt{ac} + \sqrt{bd}\right)^2 = ac + bd + 2\sqrt{ac}\sqrt{bd} \le ac + bd + ad + bc \le ef.$$

Da c und d vertauschbar sind, folgt auch die andere Ungleichung. □

U.92 *Beweis:* Folgerung der AM-GM Ungleichung (U.6). □

LÖSUNGEN: GEOMETRISCHE UNGLEICHUNGEN

G.1 *Beweis:* Mit der Substitution (G.4) wird aus der Behauptung

$$(y+z)(z+x)(x+y) \geq 8xyz,$$

die unmittelbar aus $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$ und ihren zyklischen Vertauschungen folgt. □

G.2 *Beweis:* Die Substitution (G.4) führt hier auf

$$\sqrt{2}\,(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}) \leq \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}. \tag{G.101}$$

Nach der Methode „Teile und (be)herrsche“ (s. Abschnitt U.2.1) finden wir weiter:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2, \\ 2\sqrt{xy} &\leq x+y, \\ x+2\sqrt{xy}+y = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 &\leq 2(x+y), \\ \sqrt{x}+\sqrt{y} &\leq \sqrt{2}\,\sqrt{x+y}. \end{aligned} \tag{G.102}$$

Zyklische Vertauschung und Addition ergibt (G.101). Wegen (G.102) und der entsprechenden anderen Gleichungen gilt Gleichheit für $x=y=z$, d. h. für alle gleichseitigen Dreiecke. □

G.3 *Beweis:* Mit unserer Substitution $a \equiv y+z$, $b \equiv z+x$, $c \equiv x+y$ überführen wir die behauptete Ungleichung in

$$(y+z)^2(z+x)(y-x)+(z+x)^2(x+y)(z-y)+(x+y)^2(y+z)(x-z) \geq 0,$$

welche nach auswucherndem Ausmultiplizieren glücklicherweise durch gegenseitige Auslöschung der meisten Terme in

$$xy^3+yz^3+zx^3 \geq x^2yz+xy^2z+xyz^2 = xyz(x+y+z) \tag{G.103}$$

übergeht. Dieses Resultat ist ein guter Kandidat für die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung, und zwar vom Typ d) mit $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3$ bzw. $\boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ (s. Abschnitt U.2.2). Da sie durch zyklische Vertauschung der Variablen unverändert bleibt, genügt es, allein den ersten Term auf der linken Seite zu betrachten:

$$u_1^2 = xy^3. \tag{G.104}$$

Für u_1v_1 haben wir nun auf der rechten Seite drei Möglichkeiten:

$$u_1v_1 = \begin{cases} x^2yz \\ xy^2z, \\ xyz^2 \end{cases} \quad \text{denen mit (G.104)} \quad v_1^2 = \begin{cases} x^3y^{-1}z^2 \\ xyz^2 \\ xy^{-1}z^4 \end{cases}$$

entspricht. Wir erkennen Übereinstimmung (links unten und rechts Mitte) und sind damit schon fertig. □

G.4 *Beweis:* Aus der Behauptung wird mit (G.2) und (G.4)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq \frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}, \tag{G.105}$$

die ein Kandidat für ein Aufteilen ist. Versuchen wir es also mit

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \geq \frac{1}{x+y} \tag{G.106}$$

und deren zyklischen Vertauschungen, die addiert offenbar wieder (G.105) ergeben. (G.106) ist nach kurzer Rechnung jedoch nichts anderes als $(x-y)^2 \geq 0$. □

G.42 *Beweis:* a) Mit den Seitenlängen $a \equiv |\boldsymbol{a}| = |\overrightarrow{BC}|$, $b \equiv |\boldsymbol{b}| = |\overrightarrow{CA}|$ und $c \equiv |\boldsymbol{c}| = |\overrightarrow{AB}|$ des Dreiecks ist

$$\left(\frac{\boldsymbol{a}}{a}+\frac{\boldsymbol{b}}{b}+\frac{\boldsymbol{c}}{c}\right)^2 = 3+2\left(\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{bc}+\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}{ca}+\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{ab}\right) \geq 0.$$

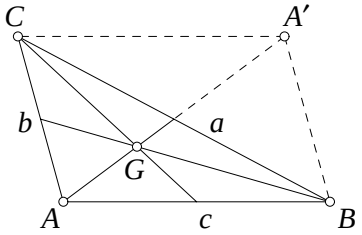
Mit $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = -bc\cos\alpha$, $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} = -ca\cos\beta$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -ab\cos\gamma$ ergibt sich die Behauptung. □
b) Da $f(x) = \sin x$ in $[0,\pi]$ eine streng konkave Funktion ist, folgt mittels der JENSENschen Ungleichung (s. Aufgabe U.14)

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \frac{1}{3}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma). \quad \square$$

G.51 *Beweis:* Nach Aufgabe D.79 gilt stets $d^2 = R^2 - 2rR$, wobei d der Abstand von Umkreis- und Inkreismittelpunkt sind. Natürlich ist $d^2 \geq 0$, woraus aus obiger Gleichung nach Umstellen und Division durch $R > 0$ die Behauptung folgt. □

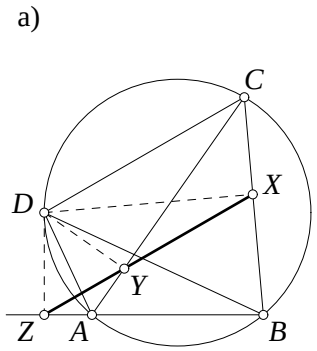
G.61 *Beweis:* (Bild) Wir wenden die Dreiecksungleichungen auf die Teildreiecke ABG, BCG und CAG an, und berücksichtigen dabei, daß der Schwerpunkt G jede Seitenhalbierende drittelt:

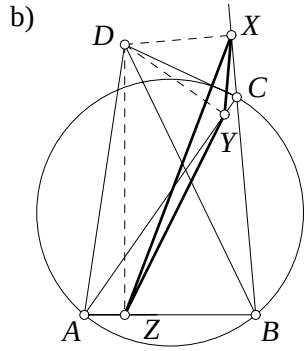
$$\frac{2}{3}(m_a+m_b) > c, \quad \frac{2}{3}(m_b+m_c) > a, \quad \frac{2}{3}(m_c+m_a) > b.$$



Addition der Ungleichungen liefert die Abschätzung nach unten $\frac{3}{2}s < m$. Für die Abschätzung nach oben ergänzen wir das Dreieck zu einem Parallelogramm $ABA'C$ mit den Diagonalen a und $2m_a$. Die Dreiecksungleichung für das Teildreieck $AA'C$ lautet dann: $b + c > 2m_a$. Analog erhalten wir mit anderen Ergänzungen die Ungleichungen $c + a > 2m_b$ und $a + b > 2m_c$, deren Addition $4s > 2m$ bzw. $m < 2s$ ergibt. □
Bemerkung: Die Anwendung von Dreiecksungleichungen auf alle anderen möglichen Teildreiecke liefert lediglich die schwächere Abschätzung $s < m < 3s$.

G.81 *Beweis:* Wir hatten in Aufgabe D.45 gesehen, daß das Lotfußpunktdreieck eines Punktes D auf dem Umkreis von $\triangle ABC$ gerade zur SIMSON-Geraden XYZ entartet (Bild a). Für alle anderen Punkte D haben wir tatsächlich ein Dreieck XYZ vorliegen (Bild





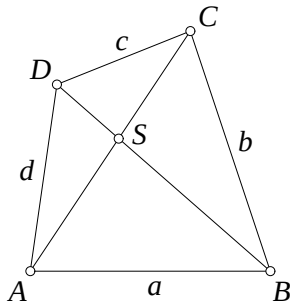
b), für welches die Seitenlängen nach Aufgabe V.26 die Dreiecksungleichung erfüllen:

$$XY + YZ > XZ, \quad \text{oder} \quad \frac{AB \cdot CD}{2R} + \frac{BC \cdot AD}{2R} > \frac{AC \cdot BD}{2R}.$$

Beide Fälle zusammen genommen ergeben nach Multiplikation mit $2R$ die behauptete Ungleichung. □

G.82 *Beweis:* (Bild) S sei der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD. Dann gelten einerseits die Dreiecksungleichungen

$$a < AS + BS, \quad b < BS + CS,$$
$$c < CS + DS, \quad d < DS + AS,$$



deren Addition und anschließende Division durch zwei $s < p + q$ ergibt. Andererseits ist

$$p < a + b, \quad q < b + c, \quad p < c + d, \quad q < d + a,$$

aus deren Addition und Division durch zwei $p + q < 2s$ folgt. □

Sachwortverzeichnis

Ähnlichkeit, von Dreiecken A.25, A.45, A.64, K.11, K.12, K.13, K.14, K.21, K.22, K.36, K.61, D.6, D.10, D.13, D.23, D.25, D.31, D.34, D.46, D.64, D.83, V.9, V.23, V.25, W.9, W.11, W.30, W.32, W.51, W.86, W.88

Abbildung K.21
Abstand, eines Punktes von Eckpunkten D.57, D.81
— eines Punktes von einer Geraden A.24, A.27
— eines Punktes von einer Seite D.58, D.83, D.84, V.26, W.16, W.22, W.52
— zweier Geraden A.65
— zweier Punkte K.14, D.79
AIME W.21
Analysis A.64, B.11, B.12, B.13, B.14, B.15, B.20, B.21, B.41, B.51
Ankreis A.34, K.35, D.35, D.39, D.65
Ankreismittelpunkt A.34, D.35, D.65
Ankreisradius D.65, D.68
APMO U.34, U.84, G.2
Apollonius, Berührungsproblem des A.31, A.32, A.33, A.34, K.33
— **Kreis des** A.22, A.26, A.68, A.69, K.62
Außenwinkel A.22, A.34, B.20, K.2, D.2, D.7, D.24, V.27, M.11, M.12, M.14
Aufsatzdreiecke B.52, D.47, D.53, D.54, W.87
Aufsatzhalbkreise K.37
Aufsatzquadrate M.8, W.3

Basiswinkel A.61, B.20, B.21, B.41, K.2, K.3, D.2, D.8, D.24, D.59, V.21, V.33, M.11, M.14, M.15, W.10, W.32, W.51, W.86
Berührungspunkt A.9, A.10, A.32, A.33, A.34, A.62, A.63, A.72, B.13, B.51, K.14, K.24, K.25, K.33, K.35, D.35, D.38, D.39, D.63, V.31, V.32, V.33, V.34, V.41, M.14, W.12, W.51, W.54, W.86, W.88
Berührungsradius K.14, K.16, K.24, K.25, D.63
Berührungssehne V.33, V.34, V.41
Bernoullische Ungleichung U.1
— **verallgemeinerte** U.2
— indirekter D.33, D.44
binomischer Satz U.84
Brocard-Winkel D.58, D.73

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung D.58, W.52, W.84, U.11, U.32, U.33, U.34, U.35, U.36, U.45, U.82, G.3
Ceva, Satz von D.31, D.32, D.33, M.34, W.26
— **Umkehrung des Satzes von** D.33, D.34, D.36, D.37, D.38, D.39, D.41, D.47, W.26
Crux Mathematicorum B.51, K.62, M.40, W.81, W.82, W.83, W.84, W.85, W.86, W.87, W.88

Determination B.11, B.14

Diagonale A.44, A.68, A.71, B.12, B.21, D.6, D.10, V.1, V.2, V.3, V.9, V.23, V.24, M.9, M.39, W.1, W.2, W.12, W.15, W.16, W.17, W.31, W.33, W.53, W.82, W.86, G.61, G.81, G.82
Diagonalen, senkrechte A.2, A.3, K.31, V.25, M.3, W.16, W.33
Drachenviereck A.3, D.23, W.33, W.81, W.86
Drehung A.7, B.20, D.59, W.54
— um 180 Grad B.16, B.19, D.61, W.81, G.61
— um 60 Grad A.67, D.53
— um 90 Grad A.65
Drehverschiebung A.65
Dreieck A.8, B.19, B.52, K.11, K.12, K.13, K.33, K.35, D.1, D.2, D.3, D.4, D.5, D.6, D.7, D.8, D.9, D.10, D.11, D.12, D.13, D.22, D.23, D.24, D.25, D.31, D.32, D.33, D.34, D.35, D.36, D.37, D.38, D.39, D.40, D.41, D.42, D.43, D.44, D.45, D.46, D.47, D.57, D.58, D.61, D.63, D.64, D.65, D.66, D.67, D.68, D.69, D.70, D.72, D.73, D.79, D.81, D.83, D.91, V.1, V.2, V.3, V.23, V.26, V.27, V.32, V.34, M.1, M.2, M.9, M.12, M.31, M.32, M.33, M.34, M.35, M.36, M.37, M.38, M.39, M.40, M.41, M.42, M.43, W.7, W.11, W.13, W.21, W.26, W.28, W.31, W.32, W.52, W.53, W.81, W.84, W.85, W.86, G.1, G.2, G.3, G.4, G.42, G.51, G.61
— gleichschenkliges A.1, A.5, A.8, A.24, A.61, A.66, A.70, B.14, B.20, B.21, B.41, K.2, K.3, K.4, K.36, D.2, D.4, D.51, D.56, D.59, D.71, D.82, V.21, V.22, V.24, V.25, V.33, M.11, M.12, M.13, M.14, M.15, M.21, W.3, W.10, W.16, W.17, W.24, W.25, W.51, W.54, W.85
— gleichseitiges A.42, A.50, A.67, A.69, B.52, D.6, D.53, D.54, D.84, M.21, W.7, W.13, W.15, W.17, W.25, W.87
— rechtwinkliges A.14, A.15, A.23, A.25, A.61, A.65, A.72, B.11, B.13, B.15, B.18, B.23, B.51, K.4, K.14, K.21, K.61, D.25, D.62, D.64, D.82, D.83, V.9, V.24, M.13, W.3, W.4, W.8, W.9, W.10, W.11, W.16, W.54, W.61, W.82, W.88, U.21
— spitzwinkliges D.21, D.53, D.54, D.55, D.56, W.4, W.6, W.24, W.82, W.87
Dreieckskonstruktion A.67, A.69, B.1, B.2, B.3, B.4, B.11, B.12, B.13, B.14, B.15, B.16, B.17, B.18, B.19, B.20, B.21, B.22, B.23, B.41, B.51, B.52
Dreiecksungleichung B.3, B.12, D.51, V.26, W.2, U.3, U.10, G.61, G.82
Drittelung D.12, D.13, M.13, G.61
Durchmesser A.63, A.64, K.3, K.11, K.12, K.15, K.21, D.25, D.64, D.82, W.8, W.9, W.15,

W.29, W.30, W.61

Eckpunkt A.67, B.52, D.13, D.53, D.81, M.1, M.2, M.8, W.13, W.32
Ecktransversale D.31, D.32, D.33, D.34, D.36, D.37, D.38, D.39, D.40, D.41, D.47, D.69, D.70, D.91, M.13, M.34, M.35, M.36, M.37, M.38, M.40, M.41, M.42, W.21, W.26, W.84, W.88
elementare symmetrische Funktionen U.51, U.52, U.53, U.54
Elementarzelle A.42, M.10
Ellipse A.72
Erdös-Mordell, Satz von D.83, D.84
Euler-Gergonne, Satz von M.36, M.37, M.41, M.42, W.21
Eulers Abstand D.79
Extremalaufgabe, geometrische D.51, D.53, D.56, D.57, D.58, D.59, W.22, W.27, W.52, W.82

Fünfeck, konvexes M.22, W.2
— regelmäßiges A.13, M.21
Fagnano, Problem von D.56
Faktorisierung W.28, U.22
Fallunterscheidung A.10, A.15, A.32, A.33, A.34, A.65, A.66, A.68, A.69, B.2, B.4, K.2, K.4, K.36, D.5, D.24, D.43, V.1, W.12, W.14, W.28, W.82, W.87, U.2, U.12, U.22, U.33
Fermat-Punkt B.52, D.53, D.54, D.55, W.87
Flächeninhalt, allgemein A.15
— eines Dreiecks D.11, D.58, V.3, M.9, M.22, M.31, M.32, M.33, M.34, M.35, M.36, M.37, M.38, M.39, M.40, W.7, W.11, W.13, W.15, W.21, W.22, W.31, W.52, W.87
— eines Fünfecks M.22
— eines Parallelogramms M.10
— eines Sechsecks M.10
— eines Trapezes A.64
— eines Vierecks V.3, M.22, W.31, W.87
— Formel D.61, D.62, D.63, D.64, D.65, D.66, M.31
Flächenprinzip M.31, M.32, M.33, M.34, M.35, M.36, M.37, M.38, M.39, M.40, M.41, M.42, M.43
Flächenumwandlung D.62, M.21, M.22, W.31, W.87
Flächenvektor M.9, M.10
Funktion, konvexe U.14
— streng konkave G.42
— streng konvexe U.14
— streng monoton wachsende W.87, U.4

Gelenkmechanismus K.31
geometrischer Ort A.21, A.22, A.23, A.24, A.25, A.26, A.27, A.31, A.32, A.33, A.66, A.68, B.14, B.20, K.62, D.1, D.82, W.25, W.83
Gerade A.1, A.3, A.4, A.6, A.9, A.23, A.24, A.27, A.32, A.33, A.34, A.41, A.43, A.46, A.47, A.48, A.49, A.66, A.71, A.72, K.21, D.7, D.12, D.13, D.59, D.61, V.25, M.31
— parallele A.27, D.62
Geraden, nichtparallele A.24
— parallele A.4, A.10, A.11, A.12, A.41, A.64, A.67, K.33, K.62, V.19, V.27, W.31
— zueinander senkrechte K.3, K.24, K.25, D.7, V.9, V.41, W.24
Gergonnes Punkt D.38, D.40
Gitter, schiefwinkliges M.10
— trigonales A.42
Gleichung, kubische W.28
— quadratische A.13, A.15, A.66, W.12, W.53
Gleichungssystem, lineares K.33, D.39, D.63, M.38
goldener Schnitt A.13

Höhe A.5, B.11, B.15, B.16, B.18, B.20, B.21, B.22, D.21, D.22, D.34, D.42, D.56, D.59, D.61, D.64, D.65, D.70, D.72, D.73, V.2, M.31, W.4, W.6, W.7, W.13, W.16, W.26, W.61
Höhenfußpunkt B.22, D.23, W.6
Höhenfußpunktdreieck D.21, D.56, W.6
Höhensatz A.14, A.66, V.9, W.8
Höhenschnittpunkt D.21, D.22, D.23, D.24, D.25, D.42, W.6, W.61
Höldersche Ungleichung U.9, U.10, U.11
Höldersche Ungleichungen, verallgemeinerte U.8, U.9
Halbierung A.25, A.44, A.64, B.12, B.21, D.2, D.21, V.1, V.2, M.9, M.14, M.22, W.15, W.61
Halbkreis A.63, A.64, B.12, W.8
Halbkugel W.13
Halbumfangspunkt K.33, D.35, D.39
Heron, Problem von D.51
Herons Formel D.66, W.21
Hypotenuse A.14, A.15, A.23, A.66, B.15, B.51, V.9, M.13, W.12, W.16, W.28, W.82, W.83, U.21

IMO W.51, W.52, W.53, W.54, G.3
IMTS M.39
Inkreis A.33, A.34, A.62, B.13, B.51, D.38, D.63, D.65, V.27, W.6, W.81, W.86, W.88
Inkreismittelpunkt A.34, A.62, A.62, B.13, D.9, D.21, D.63, D.63, D.79, V.24, V.27, V.32, M.43, W.6, W.32, W.51, W.52, W.86, W.88
Inkreisradius B.13, D.63, D.67, D.68, D.79, V.32, M.43, W.7, W.81, W.88, G.51
Innenwinkel D.2, D.7, D.8, D.21, M.12, W.17
Inversion K.21, K.22, K.23, K.24, K.25, K.31, K.33, K.35, K.36, K.37
isogonal konjugierter Punkt D.37, D.41, D.42, W.61
isogonale Gerade D.37, D.41, D.42, D.91, W.61
isogonaler Punkt D.37, D.41
Isoscelizer A.24

isotomisch konjugierter Punkt D.36, D.40
isotomische Gerade D.36, D.40
isotomischer Punkt K.33, D.36

Jensensche Ungleichung U.14, G.42

Kathete A.15, A.23, A.66, B.15, M.13, W.3, W.12, W.83, W.88
kollineare Punkte K.31, D.43, D.44, D.45, D.46, W.53, W.87
Komplementwinkel B.13, B.20, B.21, K.2, K.4, D.24, D.25, M.13, W.24, W.33, W.88
komplexe Zahlen U.3
— konjugiert W.28
Kongruenzsatz SSS A.6, A.45, B.3, B.41, W.10, W.81
Kongruenzsatz SSW B.4, B.15, B.23, V.31, V.32
Kongruenzsatz SWS B.1, B.14, B.22, D.4, D.54, D.61, M.8, W.17
Kongruenzsatz WSW A.21, B.2, B.4, B.13, B.20, D.4, V.2, W.16, W.88
Kongruenzsatz, WSW D.59
Konstruktion, Euklidische A.1, A.2, A.3, A.4, A.5, A.6, A.7, A.8, A.9, A.10, A.11, A.12, A.13, A.14, A.15
— **geometrische** A.61, A.62, A.63, A.64, A.65, A.66, A.67, A.68, A.69, A.70, A.71, A.72, K.37
— **Mohr-Mascheronische** A.41, A.42, A.43, A.44, A.45, A.46, A.47, A.48, A.49, A.50, K.36
Kosinussatz D.66, D.69, W.28
Kreis A.8, A.9, A.10, A.23, A.25, A.34, A.41, A.43, A.44, A.46, A.47, A.63, A.66, A.71, K.2, K.4, K.11, K.12, K.13, K.14, K.15, K.21, K.22, K.23, K.24, K.25, K.35, K.37, K.61, K.62, V.9, V.10, V.27, W.3, W.5, W.8, W.9, W.12, W.23, W.24, W.27, W.29, W.30, W.51, W.54, W.83, W.84
Kreisbogen A.21, A.70, A.72, K.1, K.2, K.24, K.31, D.82, W.5
Kreise, berührende A.10, A.25, A.33, A.62, A.63, B.14, K.33, K.35, M.14, W.12, W.27, W.51
— konzentrische A.9, A.10, A.45, A.68, A.69, K.16, W.32
— schneidende A.9, A.10, A.32, A.33, K.24, K.25, K.35, K.62, D.54, W.23, W.24
Kreiskonstruktion A.31, A.32, A.33, A.34, A.66, K.33
Kreissektor A.62

Logarithmusfunktion U.4
Lot A.3, A.23, A.49, K.21, K.61, D.43, D.45, V.9, M.13, W.5, W.11, W.82
Lotfußpunkt A.3, A.24, A.27, A.49, A.50, B.15, B.16, B.18, B.21, K.21, D.13, D.34, D.45, D.59, D.61, D.62, D.82, D.83, D.91, V.26, V.32, M.13, M.43, W.4, W.5, W.8, W.11, W.12, W.15, W.16, W.25, W.52, W.82, W.88
Lotfußpunktdreieck D.81, D.82, D.83, V.26, W.22, W.25
Lémoine-Punkt D.41, D.58, D.91

Mathematik-Olympiade B.12, B.21, K.35, D.22, V.3, V.25, M.8, M.22, M.42, M.43, W.1, W.2, W.3, W.4, W.5, W.6, W.7, W.8, W.9, W.10, W.11, W.12, W.13, W.14, W.15, W.16, W.17, W.22, W.23, W.24, W.25, W.26, W.27, W.28, W.29, W.31, W.32, W.33, W.51, W.52, W.53, W.54, U.22, U.23, U.41, U.44, U.45, U.81, G.3, G.4
— **Australien** M.42
— **Auswahlwettbewerb** W.61
— **Bulgarien** K.35
— **DDR** B.12, D.22, M.8, M.43, W.10, U.44
— **Deutschland** B.21, V.25, M.22, W.1, W.2, W.3, W.4, W.5, W.6, W.7, W.8, W.9, W.11, W.12, W.13, W.14, W.15, W.16, W.17, U.81
— **Großbritannien** W.22, W.23, W.24, U.23, U.41
— **Internationale** W.51, W.52, W.53, W.54, G.3
— **Irland** W.25, W.26, U.22, U.45
— **Kanada** V.3, W.27, W.28
— **Lettland** W.29
— **Polen** G.4
— **Schweden** W.31
— **USA** W.32, W.33
Maximum D.59, W.22, W.27, U.85, U.90
Menelaus, Satz von D.43, D.44, M.35, M.38, W.53
— **Umkehrung des Satzes von** D.44, D.46
Minimum D.51, D.53, D.56, D.57, D.58, D.59, W.52, W.82, U.85, U.90
Minkowskische Ungleichung U.10
Mittel, arithmetisches A.14, M.1, M.2, U.5, U.7
— geometrisches A.14, U.5, U.6
— harmonisches A.14, U.6, U.7
Mittellinie D.13, V.1, V.3, M.3, M.9, W.1, W.11, W.14, W.31
Mittelparallele A.33, K.33
Mittelpunkt, einer Diagonalen V.1, V.3, W.1, W.14
— einer Sehne A.25, K.61, W.83
— einer Seite B.16, B.17, B.18, D.13, D.61, V.1, V.3, M.1, M.9, W.1, W.11, W.14, W.17, W.31
— einer Strecke A.2, A.9, A.13, A.14, A.49, A.50, B.52, K.61, D.10, D.11, M.22, W.3, W.14, W.51, W.83
— eines Kreisbogens A.44, A.62
— eines Kreises A.1, A.8, A.9, A.10, A.14, A.21, A.23, A.31, A.32, A.33, A.45, A.46, A.47, A.63, A.66, A.68, A.69, A.70, A.72, B.12, B.20, B.21, K.2, K.3, K.4, D.2, V.21, V.22, W.3, W.12, W.14, W.15, W.25, W.27, W.29, W.30, W.54, W.85
— eines Quadrates M.8

Mittelsenkrechte A.1, A.2, A.8, A.31, A.61, A.66, A.68, A.70, K.31, D.1, D.2, D.3, D.4, D.42, M.10, W.3, W.17, W.27

Nagels Punkt D.39, D.40
Nebenwinkel A.21, A.22, K.22, D.7, D.8, M.33, W.24
Netzhaut-Satz K.14

Oberflächeninhalt U.43
Ornament A.63, K.37, M.11
orthogonale Kreise K.24, K.25, K.35

Packung, von Kreisen W.12
Parabel A.32
Paradoxon D.4
Parallelogramm A.41, A.44, A.48, B.12, B.16, B.19, B.21, D.10, D.59, D.61, V.19, M.8, M.10, M.12, W.1, W.14, G.61
Parallelverschiebung A.10, A.14, A.65, A.67, D.55
Peaucelliers Inversor K.31
Peripherie W.13
Peripherie-Zentriwinkel-Satz B.14, K.2, K.3, K.4, V.10, W.16, W.24
Peripheriewinkel A.21, B.14, B.20, B.21, K.2, K.4, K.11, K.12, D.2, D.5, D.24, D.25, D.45, D.53, D.64, D.82, V.10, V.23, V.24, V.27, M.13, M.15, W.5, W.9, W.11, W.15, W.23, W.27, W.51, W.84
Peripheriewinkelsatz K.1, M.15
Permutation U.83
Polygon, regelmäßiges A.13
Polynom U.22, U.23, U.24, U.31, U.32, U.33, U.35, U.51, U.52, U.53, U.54, U.82, U.84
Polynomwurzeln W.28, U.53
Potenz, eines Punktes K.11, K.12, K.13
Proportionale, mittlere A.13, A.32, A.49, K.13, K.14, M.21
— vierte A.11, A.45, A.48, B.41, W.11
Ptolemäus' Ungleichung G.81
Ptolemäus, Satz des D.6, V.26, G.81
Punkt A.1, A.3, A.4, A.6, A.8, A.9, A.22, A.23, A.24, A.31, A.32, A.33, A.41, A.43, A.49, A.66, K.22, K.25, K.36, D.59, D.83, D.91, V.19, M.13, M.22, M.31, M.41, W.5, W.14, W.25, W.27, W.29, W.30, W.82, W.84
— im Raum M.4, M.9
Pythagoras, Satz des A.13, A.15, A.23, A.44, A.50, A.63, A.64, A.72, K.15, K.16, D.72, V.9, M.21, W.3, W.4, W.12, W.28, W.83, W.88, U.21

Quader U.43
Quadrat A.14, A.15, A.64, A.65, A.71, M.8, W.10, W.12, U.21
— umschriebenes K.37

Radius K.24
Rechteck A.14, V.9, W.82
Relation, dimensionslose M.36, M.37
— Flächeninhalt A.14, A.64, D.11, D.61, D.62, D.63, D.64, D.65, D.66, D.73, V.1, V.2, V.3, M.9, M.10, M.21, M.31, M.32, M.33, M.34, M.35, M.36, M.37, M.38, M.39, M.40, M.43, W.7, W.11, W.21, W.22, W.31, W.87, U.43
— Länge A.12, A.13, A.14, A.22, A.23, A.24, A.25, A.26, A.27, A.44, A.50, A.63, A.64, A.66, A.68, B.21, B.23, B.41, B.52, K.11, K.12, K.13, K.14, K.15, K.16, K.21, K.22, K.24, K.35, K.36, K.61, K.62, D.1, D.5, D.6, D.8, D.10, D.12, D.13, D.22, D.31, D.33, D.34, D.35, D.36, D.37, D.38, D.39, D.43, D.44, D.46, D.47, D.51, D.53, D.54, D.56, D.57, D.58, D.59, D.63, D.64, D.67, D.68, D.69, D.70, D.71, D.72, D.73, D.79, D.81, D.83, D.84, D.91, V.1, V.10, V.11, V.19, V.22, V.25, V.26, V.31, V.34, M.1, M.2, M.3, M.4, M.9, M.12, M.13, M.21, M.31, M.32, M.33, M.34, M.35, M.38, M.41, M.42, M.43, W.2, W.3, W.4, W.5, W.7, W.8, W.9, W.11, W.12, W.16, W.21, W.22, W.26, W.28, W.29, W.30, W.51, W.52, W.53, W.54, W.81, W.82, W.84, W.85, W.86, W.88, U.21, G.1, G.51, G.61, G.81, G.82
— Vektor D.55, D.57, M.1, M.2, M.3, M.4, M.8, M.9, M.10
— Volumen U.43
— Winkel A.61, A.70, B.20, B.21, K.1, K.2, D.5, D.7, D.9, D.21, D.23, D.24, D.25, D.32, D.42, D.45, D.53, D.56, D.59, D.73, D.82, V.8, V.10, V.21, V.27, V.32, V.33, V.34, M.11, M.12, M.13, M.14, M.15, M.43, W.5, W.10, W.17, W.23, W.24, W.33, W.54, W.85, W.86
Rhombus A.2, A.4, A.24, A.68, K.31
Routh, Satz von M.38

Scheitelpunkt A.5, A.6, A.24, A.61, B.1, B.4, W.13
Scheitelwinkel A.70, V.9, V.23, V.34, M.15, W.32, W.51
Schenkel A.5, A.6, A.24, A.61, B.1, B.2, B.4, B.14, B.16, D.47, D.56, V.21
Schmetterling-Satz K.61
Schnittpunkt V.19
— dreier Geraden D.1, D.31, D.33, D.34, D.36, D.37, D.38, D.39, D.40, D.41, V.22, M.34, M.35, M.36, M.37, M.41
— vierer Geraden V.34
— von Diagonalen A.71, B.12, K.31, D.6, V.23, V.24, V.25, V.34, M.39, W.1, W.2, W.16, W.33
— von Ecktransversale und Kreis W.84, W.86
— von Ecktransversale und Seite W.87, W.88
— von Ecktransversalen D.33, D.34, M.13, M.42, W.7, W.26
— von Gerade und Kreis A.26, A.46, A.47, A.68, A.70, B.15, B.22, K.16, V.9, W.23, W.24, W.27

— von Winkelhalbierenden A.34
— zweier Geraden A.8, A.11, A.27, A.48, A.68, K.23, D.3, D.4, D.43, D.44, D.51, V.22, M.40, W.24, W.31
— zweier Kreise A.41, A.43, A.44, A.45, A.69, B.12, W.23
— zweier Sehnen K.61
— zweier senkrechter Geraden A.49, A.65, V.24
— zwischen Sekante und Tangente D.46, W.29, W.30
Schnittwinkel, zweier Kurven K.23
Schursche Ungleichung U.13
Schwerpunkt G.61
— **eines Dreiecks** B.12, B.18, B.19, D.10, D.11, D.12, D.13, D.57, D.84, M.1, M.2, M.37, W.22
— eines Quadrats M.8
Sechseck M.2, W.3, W.81, W.84
— regelmäßiges W.15, W.53
Sehne A.25, A.45, A.66, A.70, B.14, B.20, K.1, K.2, K.4, K.11, K.14, K.15, K.61, K.62, D.6, V.10, V.24, V.27, M.13, M.14, M.15, W.3, W.8, W.11, W.15, W.29, W.30, W.33, W.83
Sehnen-Tangentenwinkel K.4, K.13, M.14, W.11, W.51
Sehnen-Tangentenwinkel-Satz D.46, M.14, W.23
Sehnensatz K.11, K.15, K.61, K.62, D.22, D.79, W.8, W.29
Sehnentangentenviereck V.41
Sehnenviereck K.1, K.22, D.5, D.6, D.21, D.22, D.23, D.45, D.53, D.81, D.82, D.83, V.21, V.22, V.23, V.24, V.25, V.26, V.27, V.41, M.13, M.15, W.16, W.24, W.29, W.30, W.33, W.51, W.54, W.82, W.87, G.81
Seite A.63, B.1, B.2, B.3, B.4, B.11, B.17, B.21, B.41, D.6, D.8, D.9, D.23, D.38, D.39, D.40, D.45, D.46, D.54, D.58, D.61, D.62, D.63, D.64, D.65, D.67, D.69, D.70, D.72, D.73, V.8, V.9, V.19, V.31, V.32, M.3, M.4, M.8, M.32, W.2, W.4, W.6, W.11, W.14, W.16, W.25, W.51, W.52, W.54, W.82, W.85, W.87, U.21, G.1, G.2, G.3, G.4
Seitenhalbierende B.12, B.14, B.15, B.16, B.17, B.18, B.19, D.10, D.11, D.12, D.13, D.34, D.41, D.70, D.91, M.1, M.37, W.26, W.61, W.83, G.61
Sekante K.12, K.13, K.21, K.23, K.62, W.30
Sekanten-Tangentensatz A.32, A.72, K.13, K.21, K.24
Sekantensatz A.66, A.72, K.12
Senkrechte A.1, A.61, B.11, W.27
Siebeneck M.11
Simson-Gerade D.45, D.81, V.26, G.81
Sinussatz D.5, D.32, D.47, D.81, D.91, V.34, W.84
Skalarprodukt D.57, M.3, M.4, M.8, U.11, U.32, U.34, U.35, G.3
Soddys Kreise K.33
Spiegelung A.24, A.33, A.43, A.70, A.71, A.72, B.21, D.23, D.51, D.56, W.8, W.10, W.25, W.33, W.85
Steiner-Lehmus, Satz von D.71
Stereometrie M.9, W.13
Stewart, Satz von D.69, D.70, D.71, W.21
Strahlensatz, erster A.11, A.25, B.17, B.41, K.21, K.62, D.8, D.12, D.13, D.31, D.59, V.19, W.5, W.14, W.31
— zweiter A.12, A.27, B.18, B.41, K.21, D.10, D.31, D.43, V.1, V.19, W.5
Strecke A.2, A.7, A.11, A.12, A.13, A.21, A.24, A.42, A.45, A.50, A.63, A.72, K.61, D.38, D.40, W.5, W.14, W.28, W.30, W.32, W.82, W.87
Streckung, zentrische A.69, W.15
Stufenwinkel D.8, D.10
Supplementwinkel B.20, B.21, B.51, K.1, K.2, K.22, K.23, D.5, D.7, D.8, D.21, D.23, D.69, D.81, V.8, V.24, V.27, V.32, V.33, V.34, V.41, M.12, M.33, M.43, W.24, W.33, W.84, W.86
Symmediane D.41, D.91

Tangente A.9, A.10, A.32, B.13, K.4, K.13, K.14, K.16, K.23, K.24, D.46, M.14, W.11, W.23, W.29, W.30, W.51, W.54, W.81, W.88
Tangenten, gemeinsame A.10
Tangentenabschnitt A.32, A.72, B.51, K.13, K.14, K.16, K.21, K.25, K.62, D.35, D.38, D.39, D.46, D.63, V.31, V.32, V.34, M.14, W.81, W.88
Tangentenviereck V.31, V.32, V.33, V.34, V.41, M.43
Teilung, stetige A.13
Teilungsverhältnis A.12, A.13, A.22, A.27, A.63, A.68, B.19, D.6, D.8, D.10, D.12, D.13, D.22, D.31, D.32, D.33, D.34, D.43, D.44, D.46, D.72, M.1, M.36, M.37, M.41, M.42, W.9, W.21, W.26, W.53
Tetraeder W.13
Thales-Kreis A.9, A.14, A.22, A.25, A.66, A.68, B.12, B.16, B.23, K.3, K.21, K.25, D.2, D.21, W.8, W.27, W.61, W.83
Tournament of Towns M.15
Trapez A.64, B.23, D.13, D.83, V.8, V.11, M.12, M.39, W.3, W.11
Tschebyscheffsche Ungleichung U.12, U.25

Umfang, eines Dreiecks B.20, D.56, D.63, D.65, D.67, W.9, W.13, W.81, G.61
— eines Fünfecks W.2
— eines Sechsecks W.81, W.84
— eines Vierecks G.82
Umkreis K.35
— eines Dreiecks A.8, A.31, B.14, B.15, B.20, B.22, D.1, D.2, D.3, D.4, D.6, D.23, D.25,

D.45, D.46, D.53, D.64, V.22, V.26, M.15, W.11, W.23, W.32, W.33, W.51, G.81
— eines Sechsecks W.15
Umkreismittelpunkt B.22, D.1, D.3, D.24, D.25, D.42, D.64, D.79, V.22, W.24, W.32, W.33, W.61
Umkreisradius B.14, B.22, D.5, D.64, D.67, D.79, D.81, V.26, W.13, G.51
Ungleichung U.22, U.23, U.25, U.26, U.27, U.31, U.32, U.33, U.34, U.35, U.36, U.37, U.42, U.43, U.52, U.53, U.54, U.81, U.82, U.83, U.84, U.85, U.86, U.87, U.88, U.89, U.90, U.91, U.92
— **AM-GM** M.41, W.13, W.22, U.5, U.6, U.7, U.24, U.31, U.42, U.43, U.82, U.83, U.84, U.88, U.91, U.92
— AM-HM M.41, U.7, U.36, U.37, U.81, U.87, U.88
— **geometrische** D.58, D.83, D.84, M.41, W.7, W.13, W.22, W.52, W.84, U.3, U.21, U.43, G.1, G.2, G.3, G.4, G.42, G.51, G.81, G.82
— gewichtete AM-GM U.4, U.5, U.8, U.24
— GM-HM U.6, U.7
— mit Nebenbedingung W.22, U.41, U.42, U.43, U.44, U.45, U.88, U.89, U.91
— unsymmetrische U.41

Varignon-Parallelogramm V.1, V.3, M.9, W.1, W.14
Vektor D.55, D.57, M.1, M.2, M.3, M.4, M.8, M.9, M.10
Vektorprodukt M.9, M.10
Verdopplung, einer Strecke A.42, B.19
Vervielfachung, einer Strecke A.42, K.36
Viereck A.4, A.46, D.82, V.1, V.2, V.3, V.8, V.10, V.33, V.41, M.3, M.22, W.31, W.87
— im Raum M.4, M.9
— konvexes W.1, W.14, W.17, G.81, G.82
vollständige Induktion U.1, U.3, U.14
Volumen W.13, U.43

Würfel U.43
Wechselwinkel B.41, D.62, M.33, W.10
Wigner-Seitz-Zelle M.10
Winkel A.5, A.6, A.7, A.24, A.33, A.61, A.62, B.2, B.4, B.13, B.14, B.16, B.20, B.22, D.9, D.24, D.32, D.47, D.62, V.21, M.11, M.13, M.15, W.10, W.17, W.27, W.28, W.85, W.86, W.87, G.42
— 120 Grad B.52, D.53, D.54, D.55
— 150 Grad V.10, W.25
— 36 Grad A.13
— 45 Grad B.23
— 60 Grad D.54, V.10, W.15
— 72 Grad A.13
— 75 Grad W.25
— eingeschlossener B.1, K.23, V.8
— gegenüberliegende V.10
— konstanter A.21
— rechter B.12, B.51, K.3, W.25, W.83
Winkeldifferenz W.23
— von Innenwinkeln B.21, B.22, D.25
Winkelhalbierende A.1, A.5, A.22, A.33, A.34, A.61, A.62, A.68, B.1, B.13, B.15, B.41, K.4, D.2, D.3, D.4, D.7, D.8, D.9, D.21, D.34, D.51, D.70, D.71, V.27, M.14, W.6, W.26, W.51, W.61, W.85, W.86

Zehneck, regelmäßiges A.13
Zentrale K.12
Zentriwinkel B.14, B.20, B.51, K.2, D.24, V.10, V.24, W.5, W.27, W.33
Zerlegung A.8, D.6, D.11, D.63, V.3, V.23, M.12, M.22, M.34, M.35, M.36, M.37, M.38, M.39, M.40, M.41, W.22, W.32