# Geometrie

## Der Feuerbach–Kreis oder Neun–Punkte–Kreis

Autor: Peter Andree

## Inhaltsverzeichnis



# 6 Der Feuerbach–Kreis oder Neun–Punkte–Kreis

## 6.1 Vorbemerkungen und Satz über den Feuerbach–Kreis

Einer der geometrischen Edelsteine, der *Feuerbach–Kreis*, ist in der Literatur auch als *Neun–Punkte–Kreis* oder *Euler–Kreis* bekannt.

Der Kreis war anscheinend schon Euler bekannt, bekam aber seinen Namen nach Karl Feuerbach (1800-1834), der ihn wieder entdeckte, siehe [2].

Unser Ziel ist es, außer den klassischen auch andere Beweise zu erarbeiten, die einen tieferen Einblick in die Zusammenhänge dieser Problematik erlauben oder einfach nur die Schönheit der Geometrie unterstreichen.

Um den Überlegungen folgen zu können, sind Elementar-Kenntnisse nötig. Inhalte, die nicht zwingend zum Elementar-Wissen gehören, werden detailliert behandelt.

## 6.2 Bezeichnungen, Begriffe und der Satz zum Feuerbach-Kreis

Wir vereinbaren für jedes Dreieck die folgenden Bezeichnungen:

- $H$ ist der Schnittpunkt der Höhen, auch Orthozentrum genannt.
- $D, E, F$ sind die die Fußpunkte der Höhen. Das Dreieck, das die Höhenfußpunkte bilden, nennt man *orthisches Dreieck*.
- $L, M, N$ sind die Mitten der Dreieckseiten.
- Die Strecken $[AH]$, $[BH]$ und $[CH]$ nennen wir *Euler-Strecken*.
- $P, Q, R$ sind die Mitten der *Euler-Strecken*. Diese Punkte werden auch *Euler-Punkte* genannt.
- Die Gerade durch das Orthozentrum und den Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks nenne wir *Euler-Gerade*.
- Den *Feuerbach-Kreis* bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_K$. Geben wir auch seinen Mittelpunkt an, schreiben wir $\mathcal{F}_K(Z)$, wobei $Z$ der Mittelpunkt ist.

**Satz – Feuerbach–Kreis**
Gegeben wird ein Dreieck. Die Seitenmitten, die Höhenfußpunkte und die *Euler–Punkte* befinden sich auf einem Kreis, der unter dem Namen *Feuerbach–Kreis* bekannt ist. □

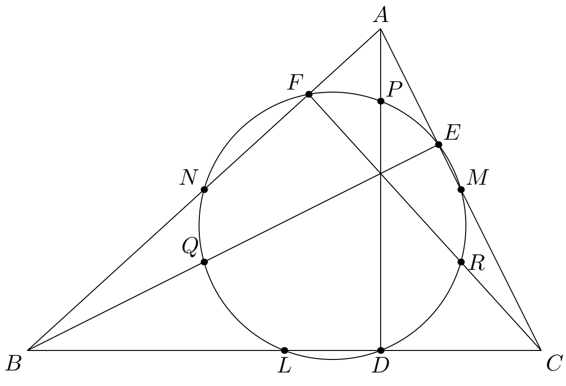


Abbildung 1: Der Feuerbach–Kreis

### 6.3 Zwei klassische Beweise

Die zwei klassischen Beweise beruhen auf elementaren Geometrie-Kenntnissen. Beide Beweise, die ansonsten kurz, verständlich und ohne große Vorkenntnisse zu erarbeiten sind, verraten nicht viel über den *Feuerbach–Kreis*.

#### 6.3.1 Erster klassischer Beweis

Wir betrachten die Abbildung (2).

(a) $LDMN$ ist ein gleichschenkliges Trapez, da $\overline{LN} = \overline{DM} = \overline{AC}/2$. Zur Begründung: $\overline{LN}$ ist Mittellinie im Dreieck $ABC$, $\overline{DM}$ ist Seitenhalbierende im rechtwinkligen Dreieck $ADC$.

(b) Analoges folgt für $MENL$ und $FNLM$.

(c) Jedem dieser gleichschenkligen Trapeze kann ein Kreis umschrieben werden. Da diesen Kreisen die Punkte $L, M, N$ gemeinsam sind, handelt es sich um denselben Kreis.

Wir halten fest: Seitenmitten und Höhenfußpunkte liegen auf einem Kreis.

(a) Betrachten wir nun das Dreieck $\triangle BHC$. Dessen Höhenfußpunkte sind $D, E, F$ und diese befinden sich auf dem von uns gefundenen Kreis. Es folgt, dass auch die Seitenmitten des $\triangle BHC$, also $Q$ und $R$, auf diesem Kreis liegen, .

(b) Analoges folgt für $\triangle AHC$ und Punkt $P$.

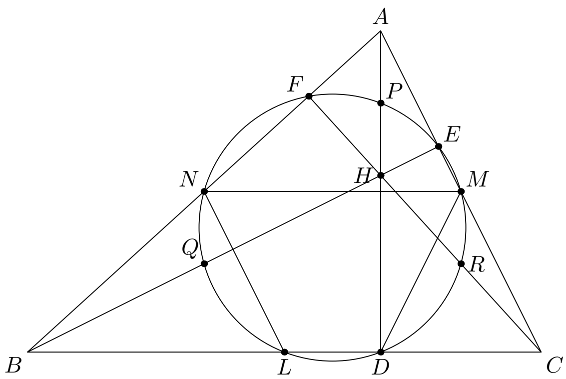


Abbildung 2: Dreieck und *Feuerbach–Kreis* zum ersten klassischen Beweis

Damit haben wir gezeigt, dass diese neun Punkte, also Seitemitten, Höhenfusspunkte und Eulerpunkte des Dreiecks $ABC$ auf einem Kreis liegen, dem $\mathcal{F}_K$. $\square$

#### 6.3.2 Zweiter klassischer Beweis

Im folgenden sei die für unsere Zwecke entsprechende Abbildung (3).

(a) $PMLQ$ ist ein Rechteck, da $[PM]$ Mittelinie im $\triangle AHC$. Es folgt $[PM] \parallel [HC]$ und $\overline{PM} = \overline{HC}/2$. $[QP]$ ist Mittellinie im Dreieck $\triangle BEC$, also ist $[QP] \parallel [AB]$. Es folgt $[QP] \perp [PM]$.

(b) Analoges folgt für das Rechteck $LNPR$. Die beiden Rechtecke haben die gemeinsame Diagonale $[PL]$. Das bedeutet, die Rechtecke haben denselben Umkreis, wobei diese Diagonale Durchmesser des Kreises ist. Andere Durchmesser sind $[NR]$ und $[MQ]$. Somit befinden sich die sechs Punkte $L$, $M$, $N$, $P$, $Q$ und $R$ auf einem Kreis.

(c) $\angle PDL$ ist ein rechter Winkel. Laut *Thaleskreis*, ist $D$ ein Punkt des Kreises mit Durchmesser $[PL]$. Analoges gilt für $E$ und $F$.

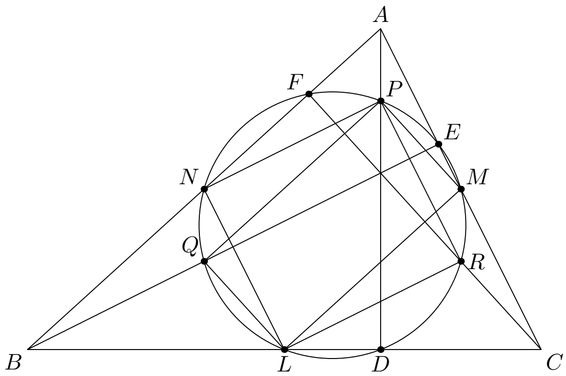


Abbildung 3: Dreieck und *Feuerbach–Kreis* zum ersten klassischen Beweis

Folglich befinden sich diese neun Punkte auf einem Kreis, dem $\mathcal{F}_K$. Aus der Beweisführung kann folgende Schlussfolgerung gezogen werden:

**Satz – Seitenmitte und Mitte der Strecke Orthozentrum–Eckpunkt**
Die Seitenmitte und die Mitte der Strecke vom Orthozentrum zum gegenüberliegenden Eckpunkt des Dreiecks, bilden Strecken, die den Durchmesser des Kreises von Euler darstellen. □

### 6.4 Der Feuerbach–Kreiss und der Acht–Punkte–Kreis

Ist der *Neun–Punkte–Kreis* vielen bekannt, so kann das nicht vom *Acht–Punkte–Kreis* behauptet werden. Der *Acht–Punkte–Kreis* ist ein einfaches und faszinierendes Beispiel eines Sachverhalts, der erst in diesem Jahrhundert entdeckt wurde und 1944 Gegenstand eines Artikels von *L. Brand* in der Zeitschrift der *AMS* war. Siehe auch [1].

### 6.4.1 Der Acht–Punkte–Kreis

**Satz – Der Acht–Punkte–Kreis**
Es sei $ABCD$ ein Viereck mit senkrechten Diagonalen. Dann liegen die Seitenmitten des Vierecks und ihre Projektionen auf die gegenüberliegende Seite auf einem Kreis, dem sogenannten *Acht–Punkte–Kreis.* □

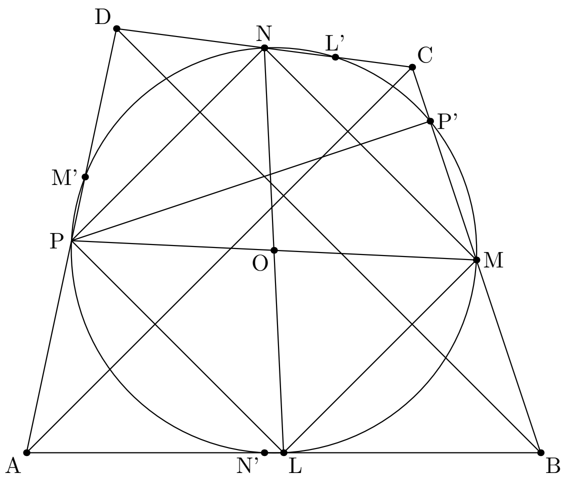


Abbildung 4: Der Acht-Punkte-Kreis

**Beweis:** Der Beweis kann mit elementar-geometrischen Kenntnissen geführt werden. Es sei des Viereck $ABCD$, siehe Abbildung (4), in dem $[AC] \perp [BD]$. Wir betrachten die Seitenmitten des Vierecks:

$$\begin{array}{llll} L \in [AB]\,, & \overline{AL} \equiv \overline{LB}, & M \in [BC]\,, & \overline{BM} \equiv \overline{MC}, \\ N \in [CD]\,, & \overline{CN} \equiv \overline{ND}, & P \in [DA]\,, & \overline{DP} \equiv \overline{PA}. \end{array}$$

und die Projektionen der der Seitenmitten auf die gegenüberliegende Seite:

$$\begin{array}{llll} L' \in [CD]\,, & \overline{LL'} \perp \overline{CD}, & M' \in [DA]\,, & \overline{MM'} \perp \overline{DA}, \\ N' \in [AB]\,, & \overline{NN'} \perp \overline{AB}, & P' \in [BC]\,, & \overline{PP'} \perp \overline{BC} \end{array}$$

Zu beweisen ist $L, M, N, P, L', M', N', P' \in \mathbf{K}(O)$.

(a) Es ist einfach zu zeigen, dass $LMNP$ ein Parallelogramm ist. Da $[AC] \perp [BD]$, folgt $[LM] \perp [MN]$, also ist $LMNP$ sogar ein Rechteck. D.h $L$, $M$, $N$ und $P$ befinden sich auf dem Kreis mit Mittelpunkt $\{O\} = [LN] \cap [MP]\,, R = \overline{OL} = \overline{OM}$.

(b) Da $\angle MP'P$ ein rechter Winkel ist, folgt, dass $P' \in \mathbf{K}(O)$, Radius $R = \overline{OM}$. Analog beweisen wir diese Eigenschaft auch für die Punkte $L'$, $M'$ und $N'$.

Damit ist die Behauptung des Satzes bewiesen □

### 6.4.2 Beweis mit Hilfe des Acht–Punkte-Kreises

Wir erarbeiten einen neuen Beweis für den *Feuerbach–Kreis*, dem der *Acht–Punkte–Kreis* zugrunde liegt. Betrachten wir die Abbildung 1.

(a) Wenden wir den Satz über den *Acht–Punkte–Kreis* auf das Viereck $ABCH$ an, da $(BH) \perp (AC)$, folgt, dass die Seitenmitten $N, L, R, P$ auf einem Kreis liegen. Auf dem selben Kreis befindet sich noch $F$, die Projektion von $R$ auf $(AB)$, und $D$, die Projektion von $P$ auf $(BC)$.

(b) Analog, mit Viereck $AHBC$, ist einfach zu beweisen, dass auch $P$, $Q$, $L$, $D$, $E$ und $M$ auf einem Kreis liegen.

(c) Bekannt ist, dass drei Punkte einen Kreis bestimmen. Da die Punkte $D$, $L$, $P$ auf beiden Kreisen liegen, handelt es sich um denselben Kreis, auf dem die Punkte $L$, $M$, $N$, die Seitenmitten, $D, E, F$, die Höhenfußpunkte und $P$, $R$ , $Q$, die *Eulerpunkte* liegen. □

## 6.5 Interessante Eigenschaften und ein anderer Beweis

*Eigenschaft über Orthozentrum, Seitenmitte und Symmetriepunkt.*

In einem Dreieck $ABC$, sind Orthozentrum $H$, die Mitte der Seite $L$ und der Symmetriepunkt $G$ von $A$ bezüglich dem Kreismittelpunktes des Umkreises des Dreiecks $ABC$, kollinear. □

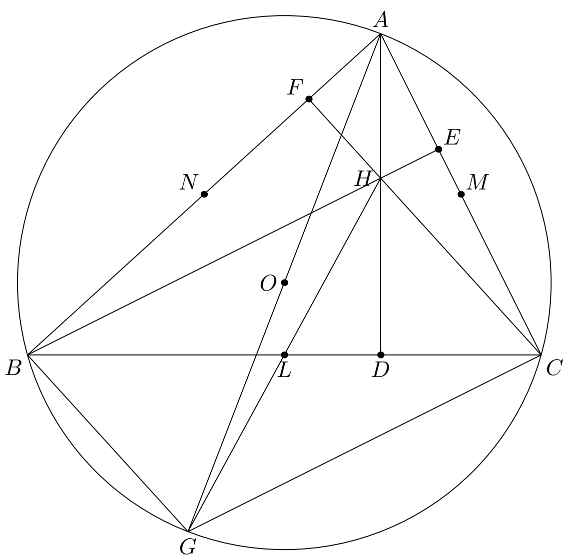


Abbildung 5: Kollinearität Orthozentrum, Seitenmitte und Symmetriepunkt

**Beweis:** Betrachten wir die entsprechende Abbildung (5). $\overline{AG}$ ist der Durchmesser des Umkreises von $ABC$ mit Mittelpunkt in $O$,

$$\overline{BL} \equiv \overline{LC},\ [AD] \perp [BC]\,,\ [BE] \perp [CA]\,,\ [CF] \perp [AB]\,.$$

$$\angle GBA \text{ (rechter Winkel, Thaleskreis) } \Rightarrow [BG] \perp [AB] \text{ und } [BG] \parallel [HC] \quad (1)$$
$$\angle GCA \text{ (rechter Winkel, Thaleskreis) } \Rightarrow [GC] \perp [CA] \text{ und } [GC] \parallel [BH]\,. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt dass $GCHB$ ist ein Parallelogramm. Somit sind die Punkte $H, L, G$ sind kollinear. □

**Bemerkung:** Zu bemerken ist zusätzlich, dass sich die Diagonalen halbieren, dass heißt: $\overline{HL} \equiv \overline{LG}$.

*Eigenschaft.*

Es sei das Dreieck $\triangle ABC$, $L$ die Mitte von $[BC]$, $H$ das Orthozentrum und der Umkreis mit dem Mittelpunkt $O$. Dann gilt $2 \cdot \overline{OL} = \overline{AH}$. □

**Beweis:** Betrachten wir erneut die die Abbildung (5) mit den Voraussetzungen der ersten Eigenschaft. $\overline{OL}$ ist Mittellinie im $\triangle AGH$, das bedeutet

$$\overline{OL} \parallel \overline{AH} \text{ und } 2 \cdot \overline{OL} = \overline{AH}.$$

□

**Bemerkung:** Es sei $S = [AL] \cap [OH]$. Es ist einfach zu beweisen, dass

$$\overline{LS} : \overline{SA} = 1 : 2.$$

Es folgt, $S$ ist der Schwerpunkt des $\triangle ABC$ und liegt auf der Eulerschen Gerade, wobei und $\overline{OS} : \overline{SH} = 1 : 2$.

Mit Hilfe dieser Eigenschaften, versuchen wir einen neuen Beweis für den *Feuerbach–Kreis* auszuarbeiten. Dieser Beweis liefert mehrere Informationen über den behandelten Kreis.

(a) $\angle LDP$ ist recht, siheh Abbildung (6) Die Punkte $D, L, P$ liegen auf einem Kreis mit Durchmesser $\overline{PL}$. Laut erster Eigenschaft, sind $H, L, G$ kollinear. $[OL]$ ist Mittellinie im $\triangle AHG$, laut zweiter Eigenschaft. Es folgt

$$[OL] \parallel [PH] \text{ und } \overline{OL} = \overline{PH},$$

also ist $POLH$ ein Parallelogramm. Die Diagonalen halbieren sich in $Z$, d.h., $Z$ ist der Mittelpunkt des Kreises. Da $\overline{PL}$ Mittellinie im $\triangle AHG$ ist, resultiert der Radius des Kreises $r = R/2$.

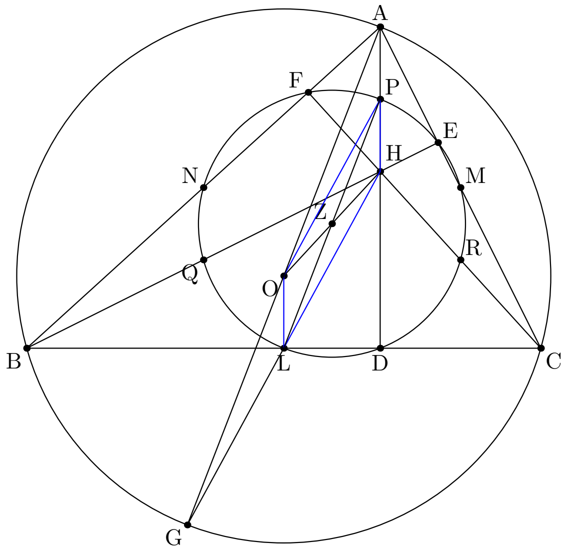


Abbildung 6: $D, L, P$ liegen auf einem Kreis mit Durchmesser $\overline{PL}$

(b) Analog wird gezeigt, dass $E, M, Q$ auf einem Kreis liegen und $HMOQ$ ein Parallelogramm ist. Dessen eine Diagonale ist $[OH]$. Es folgt $Z$ ist Mittelpunkt des Kreises mit dem gleichen Radius $R/2$, mit gleicher Begründung wie im vorherigen Punkt. Es handelt sich also um denselben Kreis.

(c) Analog wird gezeigt, dass $F, N, R$ auf einem Kreis liegen und $HPON$ ein Parallelogramm ist. Eine Diagonale ist wiederum $[OH]$. Alle anderen Schlußfolgerungen nehmen denselben Lauf.

**Satz – Mittelpunkt und Radius des** ***Feuerbach–Kreises***
Der Mittelpunkt des *Feuerbach–Kreises*, $Z$, befindet sich auf der *Eulerschen Geraden* $[OH]$, wobei $Z$ die Mitte der Strecke $[HO]$ ist. Der Radius des *Feuerbach–Kreises* ist halb so groß wie der Radius des Umkreises des gegebenen Kreises. $\square$

### 6.6 Der Feuerbach–Kreis und die zentrische Streckung

Aus schon bewiesenen Eigenschafte ist uns folgendes bekannt:

(a) Der Symmetriepunkt des Orthozentrums $H$ bezüglich einer Dreieckseite, befindet sich auf dem Umkreis des Dreiecks.

(b) Der Symmetriepunkt des Orthozentrums $H$ bezüglich der Mitte einer Dreieckseite, befindet sich auf dem Umkreis des Dreiecks.

**Satz – Zentrische Streckung**
Es sei ein Punkt $Z$ der Ebene und eine Zahl $k \in \mathbb{R}$. Jedem Punkt $M$ der Ebene ordnen

wir einen Punkt $M'$ der Eben zu, so dass

1. $M'$ ein Punkt des Strahls $ZM$ ist.
2. $\overline{ZM'} = k \cdot \overline{ZM}$.

□

**Bemerkung:** $Z$ wird Zentrum und $k$ Faktor der Streckung genannt.

Kreise werden durch zentrische Streckung in Kreise verwandelt. Betrachten wir das Orthozentrum $H$ als Zentrum einer zentrischen Streckung mit Faktor 1/2. Somit wird der Umkreis des $\triangle ABC$ in einen Kreis verwandelt, siehe Abbildung (7)

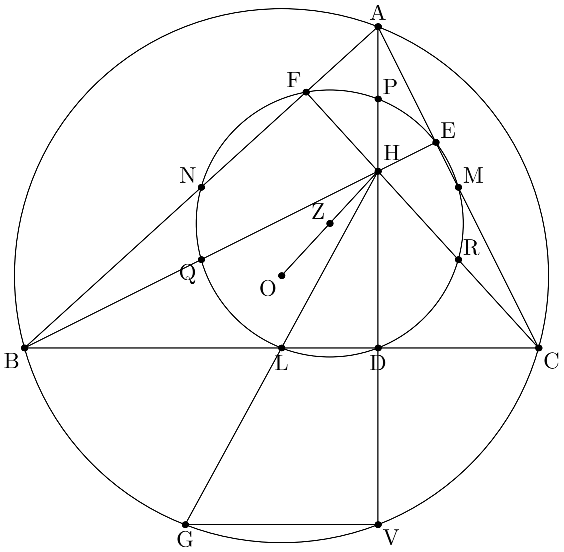


Abbildung 7: Feuerbach–Kreis und die zentrische Streckung

(a) Da $\overline{HZ} = \overline{HO}/2$, ist $Z$ der Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius $r = R/2$, den wir $\mathcal{K}(Z)$ bezeichnen.

(b) Da $\overline{HD} = \overline{HV}/2$, $\overline{HL} = \overline{HG}/2$ und $\overline{HP} = \overline{HA}/2$, folgt $D, L, P \in \mathcal{K}(Z)$.

Analog, beweisen wir die Zugehörigkeit der restlichen 6 Punkte zum Kreis $\mathcal{K}(Z)$. Somit liegen alle 9 Punkte auf dem Kreis $\mathcal{K}(Z)$ und es gilt $\mathcal{K}(Z) \equiv \mathcal{F}_K$.

### 6.7 Andere Eigenschaften im Neun–Punkte Kreis

**Satz – Mitte der Strecke Höhenfußpunkt-Seitenmitte**
Die Mittelsenkrechten der Strecken zwischen Seitenmitte und Höhenfußpunkt schneiden sich im Mittelpunkt des *Feuerbach–Kreises*. □

**Beweis:** Die genannten Mittelsenkrechten sind Mittellinien in den Trapezen $OHDL$, $OHME$ und $OHFN$, denen der Schenkel $[OH]$ gemeinsam ist. Folglich durchlaufen alle genannten Mittelsenkrechten die Mitte $Z$ von $[OH]$, den Mittelpunkt des *Feuerbach–Kreises*. □

### Satz – Orthozentrum und die Dreieckseckpunkte

Ist $H$ das Orthozentrum eines Dreiecks $\triangle ABC$, so haben die Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle AHB$, $\triangle BHC$ und $\triangle CHA$ denselben *Feuerbach–Kreis*. □

**Beweis:** Wir betrachten das $\triangle ABH$. Die Seitenmitten $N, P, Q$ bestimmen eindeutig einen Kreis. Da diese Punkte auch auf dem *Feuerbach–Kreis* liegen, handelt es sich um denselben Kreis. Analoges zeigt man für $\triangle BCH$ und $\triangle CAH$. □

### Satz – Durchmesser Neun–Punkte Kreis

Die Strecke zwischen Seitenmitte und der Mitte der Verbindungsstrecke des gegenüberliegenden Eckpunktes und Orthozentrum ist Durchmesser des *Feuerbach–Kreises*. Dieser Durchmesser ist Mittelsenkrechte für die entsprechende Seite des orthischen Dreiecks. □

**Beweis:** Um diese Aussage zu beweisen, betrachten wir die Abbildung (8).

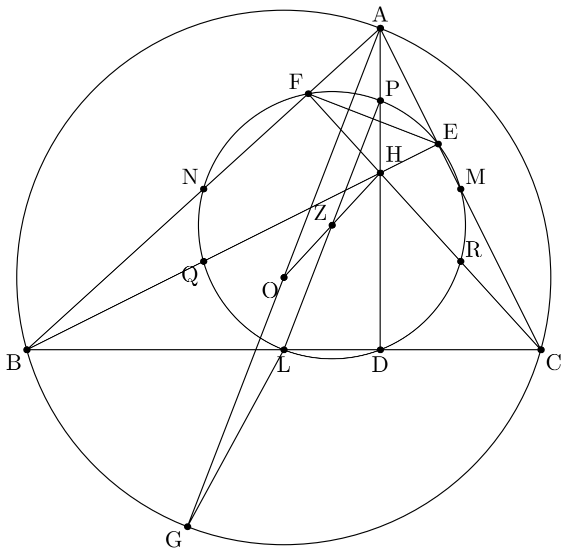


Abbildung 8: Die Mittelsenkrechten des orthischen Dreiecks

$$\angle FAG + \angle EFA = \angle FAG + \angle C \tag{3}$$

weil $[FE]$ die Antiparallele von $[BC]$ ist. Da $\angle C = \angle BGA$ als Umfangswinkel, folgt

$$\angle FAG + \angle EFA = \angle FAG + \angle BGA \tag{4}$$

ist ein rechter Winkel und entsprechend $[AG] \perp [EF]$. $[PL]$ ist Mittellinie im $\triangle AGH$, also gilt $[PL] \parallel [AG]$ und $[PL] \perp [EF]$. Da $[PL]$ auch Durchmesser des *Feuerbach–Kreises* ist, siehe den Beweis der Eigenschaften, ist $[PL]$ zugleich auch Mittelsenkrechte für die Seite $[FE]$ des orthischen Dreiecks. Analoges gilt für $[NR]$ und $[MQ]$. Wie wir schon in den Eigenschaften gezeigt haben, schneiden sich diese Mittelsenkrechten in $Z$, die Mitte von $[OH]$ und Mittelpunkt des *Feuerbach–Kreises*. □

**Satz – Umkreis eines Dreiecks und Parallelen zu den Dreieckseiten**
Der Umkreis eines Dreiecks ist der *Feuerbach–Kreis* des Dreiecks, dessen Seiten die Parallelen durch die Eckpunkte zu den Dreieckseiten sind. □

**Beweis:** Es sei $H$ das Orthozentrum eines $\triangle ABC$ und $M, N, P$ die Schnittpunkte der parallelen der Dreieckseiten. Es ist einfach zu beweisen, dass $[AH]$, $[BH]$ und $[CH]$ Mittelsenkrechten des $\triangle MNP$ sind. Da $A, B, C$ die Seitenmitten des $\triangle MNP$ sind, bestimmen diese Punkte einen Kreis, der der *Feuerbach–Kreis* des $\triangle MNP$ ist □

## Literatur

[1] H.S.M. Coxeter: Introduction to Geometry. John Wileey & Sons, Inc., New York, Chichester, Brisbane, 1989.

[2] H. Dörrie: 100 Great Problems of Elemetary Mathematics. Their History and Solutions. Dover Publications, Inc., New York, 1965.