Zugänge zu den Kegelschnitten und ihre fachdidaktische Analyse

Diplomarbeit zur Erlangung
des akademischen Grades
Magistra der Naturwissenschaften
an der Formal- und Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Universität Wien

eingereicht von
Cordula ZWERENZ

Wien, im Juni 2000

Lebenslauf

Am 29. April 1973 wurde ich als Tochter von Dkfm. Margot Zwerenz und DDr. Gottfried Zwerenz in Wien geboren.

Von 1979-1984 besuchte ich die VS in Wien XIX, Windhabergasse 2d, anschließend das GRG XIX, Billrothstraße 73, wo ich im Juni 1991 die Reifeprüfung mit gutem Erfolg ablegte.

Danach studierte ich an der Universität die Fächerkombination Mathematik-Chemie-Lehramt und absolvierte den Hochschullehrgang Informatik für Lehramtskandidaten. Im Sommersemester 1995 verbrachte ich im Rahmen eines ERASMUS-Programms für Chemie ein Semester in Marseille (F).

Ich versichere, dass ich die Diplomarbeit selbstständig verfasst, andere als die im Literatur- bzw. Abbildungsverzeichnis angegebenen Hilfsmittel nicht benutzt und mich auch sonst keiner unerlaubten Hilfe bedient habe.

Cordula Zwerenz
Gersthofer Straße 160
1180 Wien

Vorbemerkungen

Alle Zitate wurden an die aktuellen Regeln und Schreibungen der sogenannten „neuen deutschen Rechtschreibung“ angepasst.

Weiters sei vorweg erwähnt, dass ich aus sprachökonomischen Gründen auf die explizite Nennung beider Geschlechter verzichte und statt dessen den genetischen Maskulinum verwende. Wann bzw. wo immer in dieser Arbeit die Rede von Schülern, Lehrern bzw. Professoren ist, sind immer auch Schülerinnen, Lehrerinnen und Professorinnen gemeint. Diese Termini sind also stets berufsbezeichnend, nicht aber geschlechtsspezifisch verwendet.

Die in den Fußnoten angeführten Lebensdaten von bekannten und berühmten Persönlichkeiten wurden aus den im Literaturverzeichnis aufgelisteten Lexika (HARENBERG Kompaktlexikon und MEYER Enzyklopädisches Lexikon) entnommen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Am Anfang meines Studiums besuchte ich aus Neugierde eine Vorlesung über Mathematik an Waldorfschulen, in der u.a. auch das Thema „Wiedereinführen von Kegelschnitten in der 10. Klasse“ (das entspricht der 6. Klasse AHS) als von Tangentenscharen umhüllte Kurven behandelt wurde. Dies faszinierte mich damals sehr, da diese Konstruktionsmethode gänzlich anders war als jene, die ich in der Schule kennengelernt hatte. Bis heute haben für mich Hüllkonstruktionen nichts an ihrer „Schönheit“ eingebüßt.

Dadurch angeregt suchte ich nach weiteren Möglichkeiten, die Kegelschnitte im Unterricht einzuführen. Der meist verwendete Zugang über die Brennpunktsdefinition ist eine zeitsparende Variante. Daneben gibt es aber auch andere Wege, mit deren Hilfe nicht nur mathematisches Wissen und exaktes Arbeiten geschult werden können sondern auch im Mathematikunterricht leider oft nur selten geförderte Talente, wie beispielsweise Kreativität oder auch Fähigkeiten, etwas selbstständig zu schaffen und zu gestalten.

Ich bin nämlich der Meinung, dass die meisten Schüler mehr Nutzen aus der Kenntnis allgemeiner Fähigkeiten – wie z.B. dem Argumentieren, kritischen Denken und exakten Arbeiten – für ihr späteres Leben ziehen können als aus mathematischem Formelwissen. In diesem Sinn sind die einzelnen Zugänge so aufgebaut, dass neben fachlichen Inhalten verstärkt allgemeine mathematische Fähigkeiten wie das Herleiten, Argumentieren, Verknüpfen von bereits bekanntem Wissen, … geschult werden können – ganz nach dem Motto: der Weg ist das Ziel.

In diesem Sinne werden nun im ersten Teil der Arbeit konkrete Unterrichtsvorschläge zur Einführung der Kegelschnitte vorgestellt, die hernach im zweiten Teil fachdidaktisch hinterleuchtet und analysiert werden.

Zusammenfassung

Die vorliegende Diplomarbeit zeigt, dass Kegelschnitte im Unterricht nicht nur über den Zugang der Brennpunktsdefinition vorgestellt werden können, sondern dass es auch noch andere sinnvolle Möglichkeiten gibt, mit deren Hilfe weitere, über die fachlich mathematischen Lehrziele hinaus reichende Fähigkeiten geschult und vermittelt werden können.

Die unterschiedlichen Zugänge zu den Kegelschnitten werden im mathematisch orientierten ersten Teil der Arbeit vorgestellt, und im zweiten Teil fachdidaktisch hinterleuchtet und analysiert. Es soll jedoch keine Klassifizierung der einzelnen Zugänge bezüglich bestens und weniger geeignet vorgenommen werden, da die Frage der Eignung nicht allgemein gültig beantwortet werden kann; schließlich hängt die Wahl der Unterrichtsmethode, des Stils und der Darstellungsform von vielen Faktoren ab, wie etwa dem geistig-intellektuellen Entwicklungsstand der Schüler oder der Lehrer-Schüler-Beziehung.

- Zuerst wird ein *historischer Zugang* zu den Kegelschnitten vorgestellt. Ausgehend vom mathematisch-historischen Problem der Würfelverdoppelung wird besprochen, wie in der Antike quadratische Gleichungen gelöst wurden. Dies geschah – wie damals üblich – auf geometrischem Weg mit Hilfe von Flächenverwandlungen; so werden die Gleichungen der Kegelschnitte hergeleitet.
  Dieser Zugang erfordert nur wenige elementare Vorkenntnisse von den Schülern und eignet sich sehr gut, um sie ein bisschen mit der historischen Entwicklung der Mathematik vertraut zu machen.

- Natürlich können die Kegelschnitte im wahrsten Sinne des Wortes auch als *Kegel-Schnitte* eingeführt werden. Dabei empfiehlt sich als Einstieg die Frage aufzuwerfen, welche Figuren entstehen, wenn ein Kegel eben geschnitten wird. Die Vermutungen und zugehörigen Argumentationen können von den Schülern anhand eines Kegelschnittmodells auf Richtigkeit überprüft werden. So können nicht nur die Namensgebung der Kegelschnitte verständlich ge-

macht, sondern auch das räumliche Vorstellungsvermögen und die Argumentationsfähigkeit der Schüler geschult werden. Auch entartete Kegelschnitte können als ebene Schnitte eines Drehkegels eingeführt werden.
Die Herleitung der Brennpunktsdefinition erfolgt dann mittels Dandelinscher Kugeln.
So wirklich „anschaulich" werden die Kegelschnitte aber erst durch das Grundriss-Aufriss-Verfahren; dafür werden Kenntnisse aus der Darstellenden Geometrie vorausgesetzt.

- Der Zugang zu den Kegelschnitten, der von der *Brennpunktsdefinition* ausgeht, ist der in der Schule am häufigsten gewählte Weg. Ausschlaggebend dafür ist, dass diese Einführung sehr anschaulich ist: Die Brennpunktsdefinition wird durch die punktweise Konstruktion den Schülern verständlich gemacht. Zu jedem Kegelschnitttyp gibt es eine Fadenkonstruktion, die am besten vom Lehrer vorgezeigt und von den Schülern nachgeahmt wird, wobei die Konstruktion zu begründen ist.
  In diesem Kapitel wird angeregt, nicht nur die Kurven konstanter Brennstreckensumme bzw. -differenz zu untersuchen, sondern auch jene geometrischen Örter, deren Brennstreckenprodukt bzw. -quotient konstant sind. Es ergeben sich die durchaus reizvollen Cassinischen Kurven und der Apollonius-Kreis. Da von Hand angefertigte Zeichnungen der punktweisen Konstruktionen zeitintensiv und ungenau sind, bietet sich hier der Einsatz von Computern an.

- Beim Zugang über die *Leitliniendefinition und Hüllkurven*, welcher in dieser Arbeit als entdeckendes Lernen konzipiert wurde, wird von den Ortsliniendefinitionen der Strecken- und Winkelsymmetrale ausgegangen, die den Schülern bereits aus der Unterstufe bekannt sind. Dann wird die Menge aller Punkte, die von einer Geraden und einem Punkt denselben Abstand haben, untersucht (Parabel). In Analogie dazu lassen sich auch Ellipse und Hyperbel als Menge aller Punkte, die von einem Kreis und einem Punkt innerhalb bzw. außerhalb des Kreises denselben Abstand haben (Leitliniendefinition), beschreiben.

Die Kegelschnitte lassen sich als Hüllkurven ihrer Tangentenschar darstellen; zur raschen Visualisierung dieser überaus ästhetischen Zeichnungen empfiehlt sich der Computereinsatz.

- *Kegelschnitte* treten *im täglichen Leben* immer wieder auf; man denke nur etwa an den Umriss eines Lichtkegels an einer Wand, an die Gestalt von Autoscheinwerfern oder an die Flugbahn eines geworfenen Balles. So banal erscheinende „Aufhänger“ lassen sich sehr gut in den Mathematikunterricht integrieren; schließlich fördern sie nicht nur die mathematische Modellbildung, sondern lockern den meist formal gehaltenen Unterricht etwas auf. Als Einstieg in das Kapitel der Kegelschnitte würde sich beispielsweise die Untersuchung der Schnittfläche einer schräg aufgeschnittenen Wurst eignen.
  Die Durchführung eines rein anwendungsorientierten Mathematikunterrichts ist jedoch nicht wünschenswert, da die Mathematik zur „Hilfswissenschaft“ degradiert, und wichtige Facetten der Mathematik vernachlässigt werden würden.

Die vorliegende Arbeit möchte überzeugen, dass es sich lohnt, die Einführung der Kegelschnitte im Unterricht auf Verständnis aufzubauen. Sie möchte die Lehrer anregen, sich einmal von einem anderen Unterrichtsvorschlag inspirieren zu lassen und so die Kegelschnitte lebendig und unter Einbeziehung übergeordneter Lehrziele zu unterrichten.