Sangaku - Probleme

Aufgaben aus der japanischen Tempelgeometrie

ein Beitrag von Ingmar Rubin, Berlin

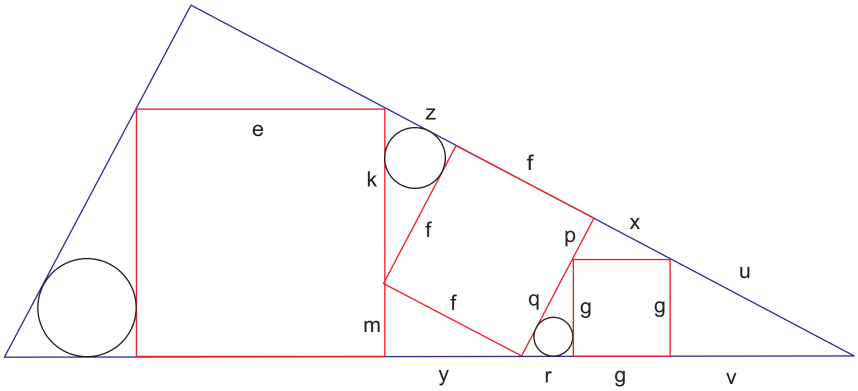

Abbildung 1: Ein typisches Sangaku-Problem

Zusammenfassung

Der Beitrag beschäftigt sich mit geometrischen Aufgaben deren Ursprung im Japan des 17. und 18. Jahrhunderts liegen. Es handelt sich um eine spezielle Klasse von Berüherungsproblemen, wobei sich Kreise und Kreisbögen untereinander berühern bzw. Kreise in geometrischen Objekten eingebettet sind (Abb. 1).
Die Lösung der Aufgaben erfordert eine geschickte Kombination der eigentlich bekannten Gesetzmäßigkeiten vom Kreis, Dreieck und Viereck. Es werden Beispielaufgaben mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad behandelt, und auf verschiedene Lösungsansätze hingewiesen.
Dem ambitionierten Leser werden am Ende des Beitrages zwei weitere Aufgaben sowie Quellen zu Sangaku-Problemen im Internet gezeigt.

Inhaltsverzeichnis

1 Historischer Hintergrund

Während der Edo Zeit (1603-1867) war Japan von den Einflüssen der westlichen Welt abgeschnitten. In dieser Zeit der selbst auferlegten Isolation schufen wissenschaftlich denkende Menschen aller Klassen - vom Landwirt bis zum Samurai - zahlreiche Theoreme in euklidischer Geometrie. Diese Theoreme erschienen als wunderbar farbige Zeichnungen auf hölzernen Tafeln. Die Tafeln hingen unter den Dächern von Buddhisten, in Tempeln und Shinto Schreinen. Viele von ihnen zeigen eine außergewöhnliche Schönheit und könnten für Kunst gehalten werden.

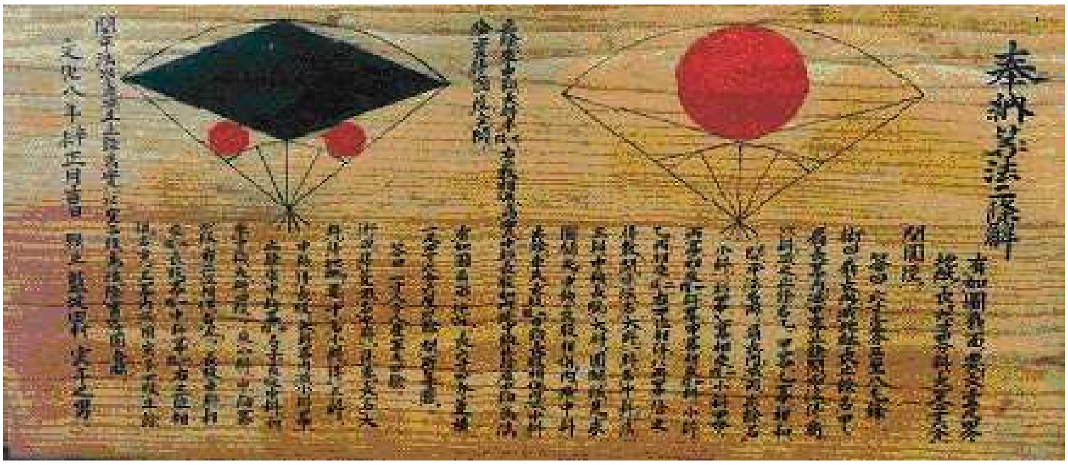

Abbildung 2: Sangaku-Tafel

Die Tafel wurde ein Sangaku genannt, was soviel wie Mathematiktafel auf japanisch bedeutet. Viele Geometer widmeten ein Sangaku, um dem Gott für die Entdeckung eines Theorems zu danken. Der Beweis des vorgeschlagenen Theorems wurde selten gegeben. Dies wurde als eine Herausforderung für andere Geometer interpretiert, 'seht her, ob ihr dies beweisen könnt'. In zweihundert Jahren sind einige Schreine und Tempel verlassen oder zerstört worden, und damit auch die Sangaku-Tafeln. Heute existieren noch 820 Sangaku's über Japan verteilt. Im Internet findet man unter `http://www.wasan.jp/english/` eine Landkarte mit japanischen Städten und den dort gefundenen Sangaku-Tafeln.

2 Ein Satz aus der Kreisgeometrie

Bevor wir mit der Lösung von Sangaku Problemen beginnen, wollen wir einen einfachen Satz aus der Kreisgeometrie wiederholen. Er wird sich bei der Lösungsfindung als äußerst nützlich und effektiv erweisen.

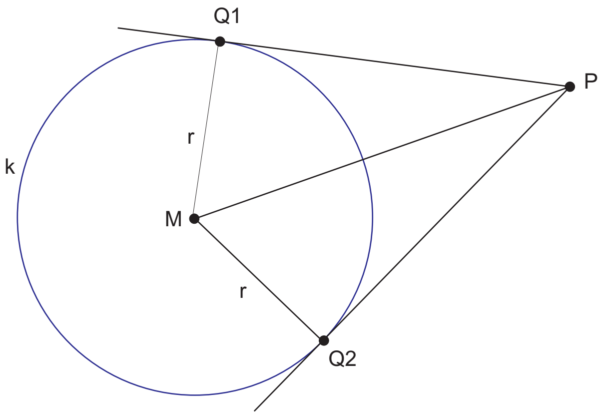

Abbildung 3: Satz vom gemeinsamen Tangentenabschnitt

Satz 1 Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt in M und Radius r. Sei P ein Punkt außerhalb von k, d.h. $MP > r$. Von P werden die Tangenten an k gelegt. Die Berüherungspunkte auf k seien Q_1 und Q_2. Es gilt nun stets $PQ_1 = PQ_2$, d.h. die Länge der Tangentenabschnitte von einem äußeren Punkt an einen Kreis sind stets gleich lang.
Der Beweis folgt unmittelbar, wenn man sich die Verbindungslinie MP einzeichnet und die Dreiecke MQ_1P und MQ_2P betrachtet (Abb.3). Die Dreiecke MPQ_1 und MPQ_2 besitzen beide eine rechten Winkel und stimmen in zwei Seiten überein. Sie sind zueinander kongruent.
Für die Lösung der folgenden Aufgaben werden neben dem Satz vom gemeinsamen Tangentenabschnitt benötigt:

- Satz des Pythagoras,
- Änhlichkeitssatz in Dreiecken (zwei identische Innenwinkel),
- Sehnensatz,
- Sehnen-Tangentensatz,
- Sekantensatz,
- Satz des Apollonius.

3 Sieben Sangaku-Probleme

In den folgenden sieben Aufagen sind einem Quadrat auf verschiedene Art Kreise und Kreisbögen einbeschrieben. Gesucht sind jeweils die Radien der Kreise in Abhängigkeit von der Kantenlänge des Quadrates. Wer im Lösen von Geometrieaufgaben Übung besitzt, sollte sich zunächst selbst an den Aufgaben versuchen.

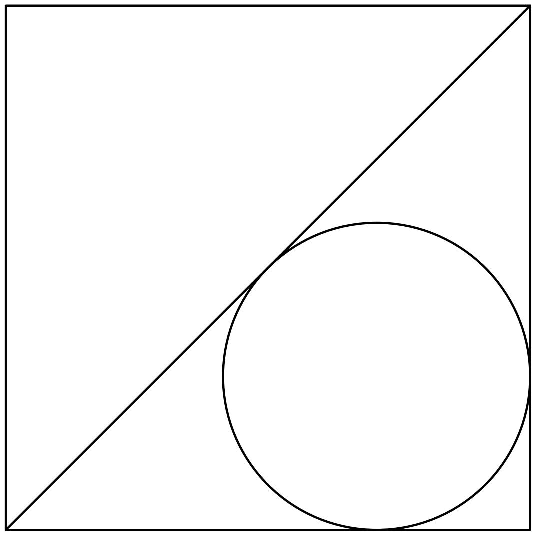

Abbildung 4: Skizze zur Aufgabenstellung 1

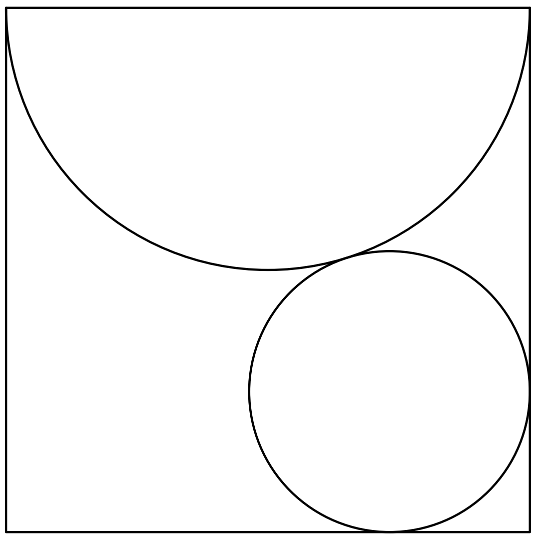

Abbildung 5: Skizze zur Aufgabenstellung 2

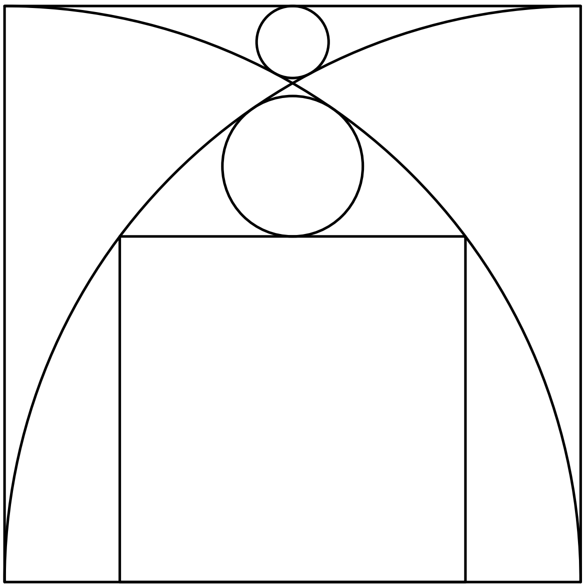

Abbildung 6: Skizze zur Aufgabenstellung 3

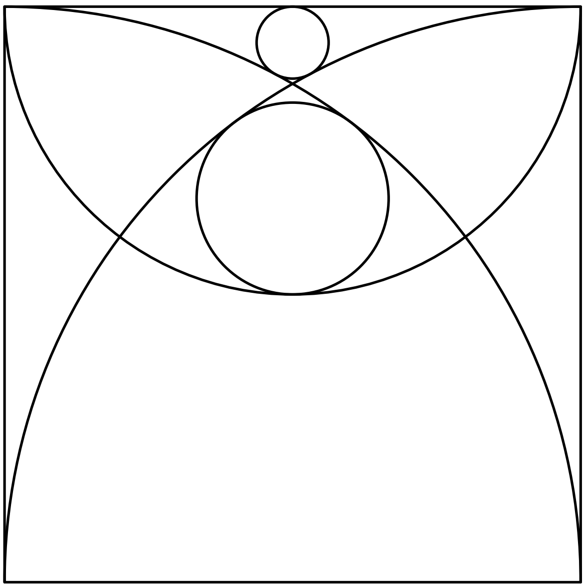

Abbildung 7: Skizze zur Aufgabenstellung 4

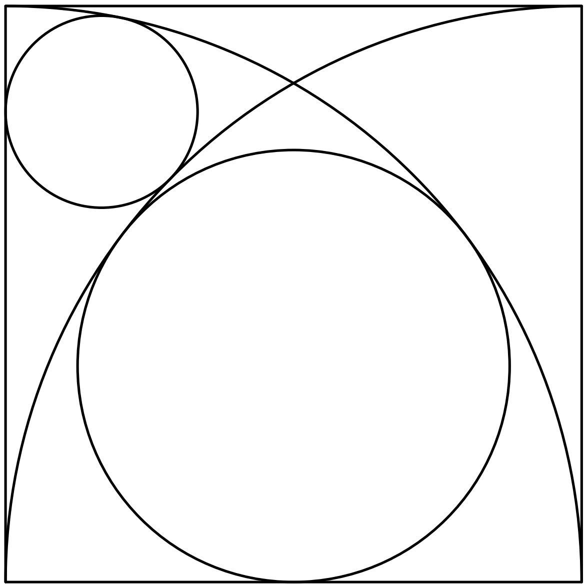

Abbildung 8: Skizze zur Aufgabenstellung 5

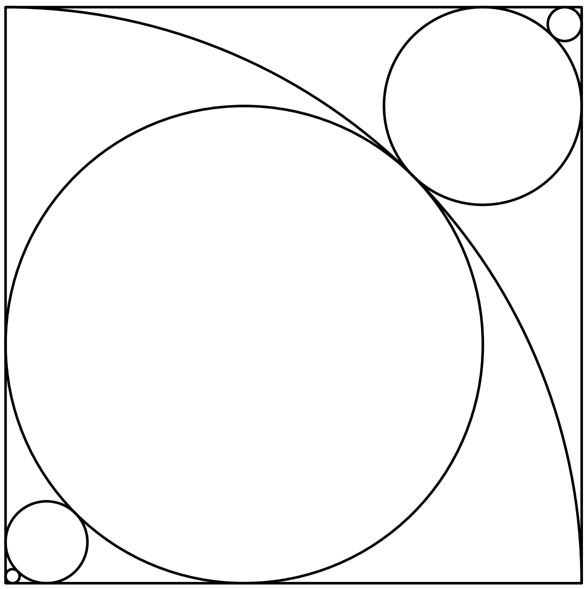

Abbildung 9: Skizze zur Aufgabenstellung 6

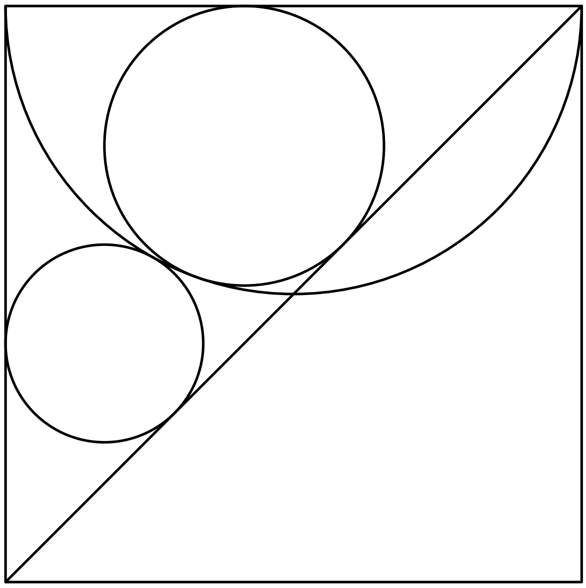

Abbildung 10: Skizze zur Aufgabenstellung 7

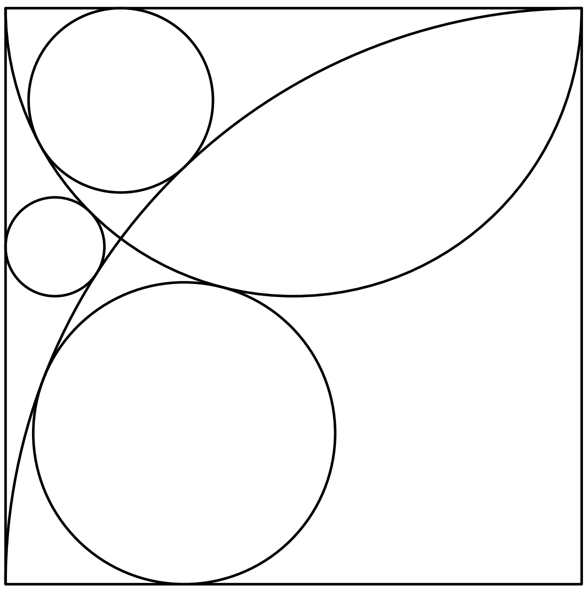

Abbildung 11: Skizze zur Aufgabenstellung 8

4 Lösungen

4.1 Lösungsvorschlag zu Aufgabe I

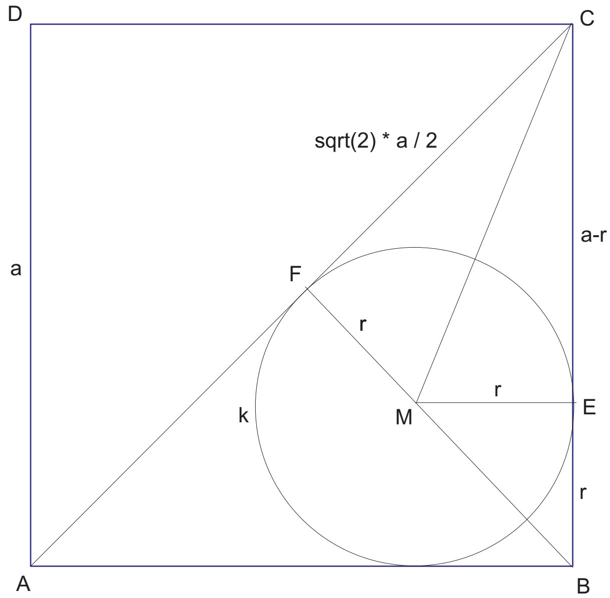

Abbildung 12: Lösungsskizze zur Aufgabe I

Die Länge der Diagonalen im Quadrat $ABCD$ beträgt:

$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\,\sqrt{2} \tag{1}$$

Die Tangentenabschnitte CE und CF vom Punkt C an den Kreis k sind gleich lang (siehe Satz 1). Strecke CF entspricht der halben Diagonalen AC. Die Länge von CE ergibt sich aus der Differenz $a - r$.

$$\overline{CE} = \overline{CF} \quad \rightarrow \quad a\,\frac{\sqrt{2}}{2} = a - r \quad \rightarrow \quad r = a\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) \tag{2}$$

Natürlich hätte man diese Aufgabe auch so lösen können:

$$\overline{BM} + \overline{MF} = \overline{BF} \quad \rightarrow \quad \sqrt{2}\,r + r = \frac{a\,\sqrt{2}}{2} \tag{3}$$

oder über die Formel vom Inkreisradius :

$$\Delta ACB = r \cdot s \quad \rightarrow \quad \frac{a^2}{2} = r \cdot \frac{a + a + \sqrt{2}\,a}{2} \tag{4}$$

4.2 Lösungsvorschlag zur Aufgabe II

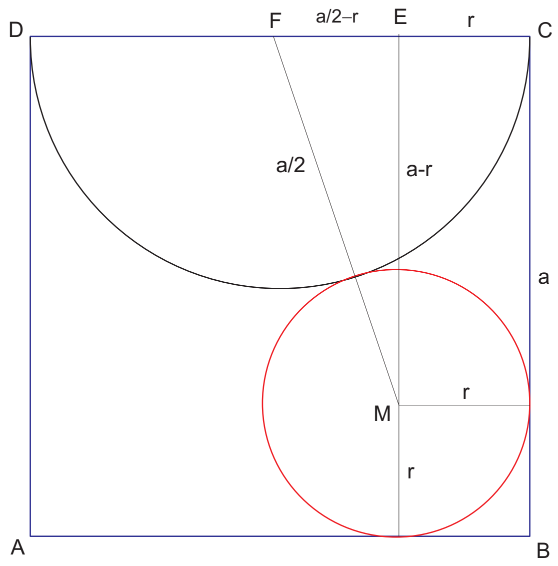

Abbildung 13: Lösungsskizze zur Aufgabe II

Der Kreisradius R folgt aus dem Dreieck FME:

$$\triangle FME: \quad \left(\frac{a}{2}+R\right)^2 = \left(\frac{a}{2}-R\right)^2 + (a-R)^2 \tag{1}$$

$$4\,a\,R = a^2 + R^2 \quad \rightarrow \quad R = a\,(2-\sqrt{3}) \tag{2}$$

4.3 Lösungsvorschlag zur Aufgabe III

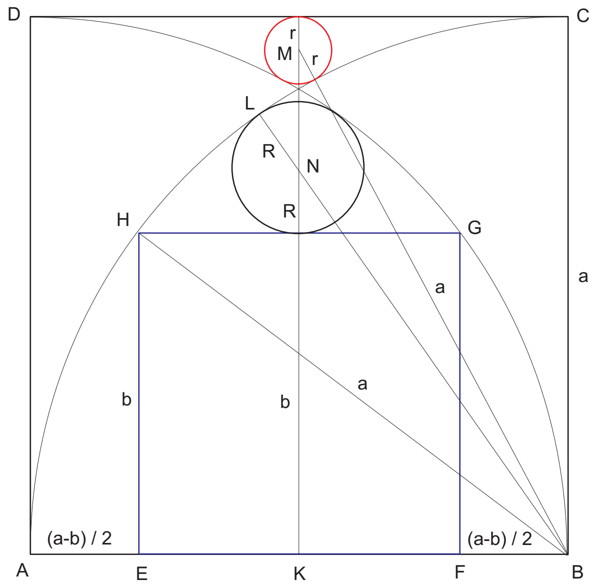

Abbildung 14: Lösungsskizze zur Aufgabe III

Den oberen, kleinen Kreisradius r bestimmen wir aus dem Dreieck BMK :

$$\triangle BMK: \quad (a+r)^2 = (a-r)^2 + \frac{a^2}{4} \quad \rightarrow \quad r = \frac{a}{16} \tag{1}$$

Zur Bestimmung von R benötigen wir die Seitenlänge b des inneren Quadrates $EFGH$:

$$\triangle BHE: \quad a^2 = b^2 + \left(b + \frac{a-b}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad b = \frac{3\,a}{5} \tag{2}$$

Für den Radius R folgt nun aus dem Dreieck BNK:

$$\triangle BNK: \quad (a-R)^2 = (R+b)^2 + \frac{a^2}{4} \quad \rightarrow \quad R = \frac{39}{320}\,a \tag{3}$$

4.4 Lösungsvorschlag zur Aufgabe IV

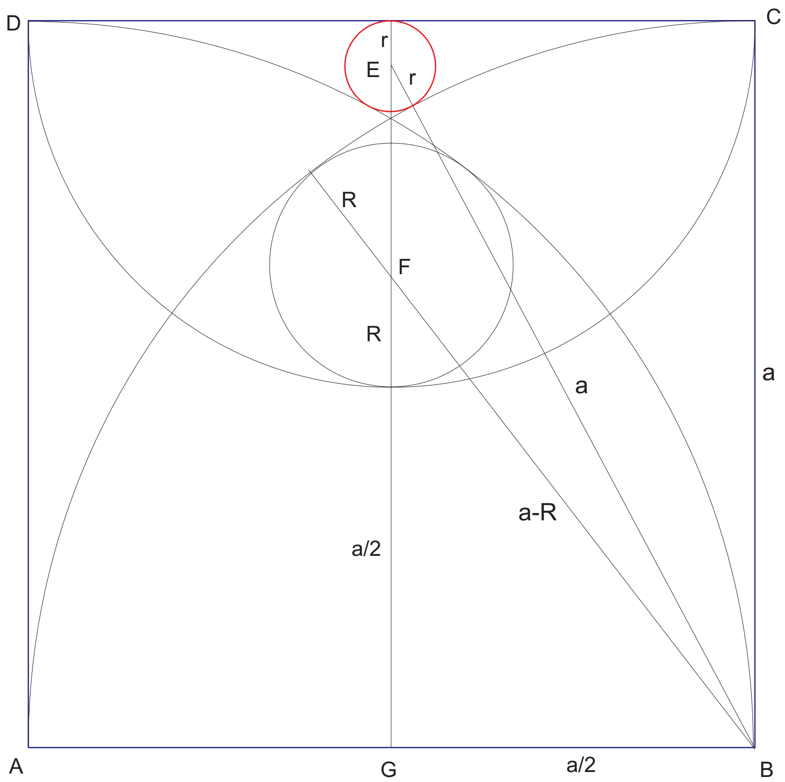

Abbildung 15: Lösungsskizze zur Aufgabe IV

Den oberen, kleinen Kreisradius r bestimmen wir aus dem Dreieck BEG:

$$\triangle BEG: \quad (a+r)^2 = (a-r)^2 + \frac{a^2}{4} \quad \rightarrow \quad r = \frac{a}{16} \tag{1}$$

Analog dazu folgt R aus dem Dreieck BFG :

$$\triangle BFG: \quad (a-R)^2 = \left(\frac{a}{2} + R\right)^2 + \frac{a^2}{4} \quad \rightarrow \quad R = \frac{a}{6} \tag{2}$$

4.5 Lösungsvorschlag zur Aufgabe V

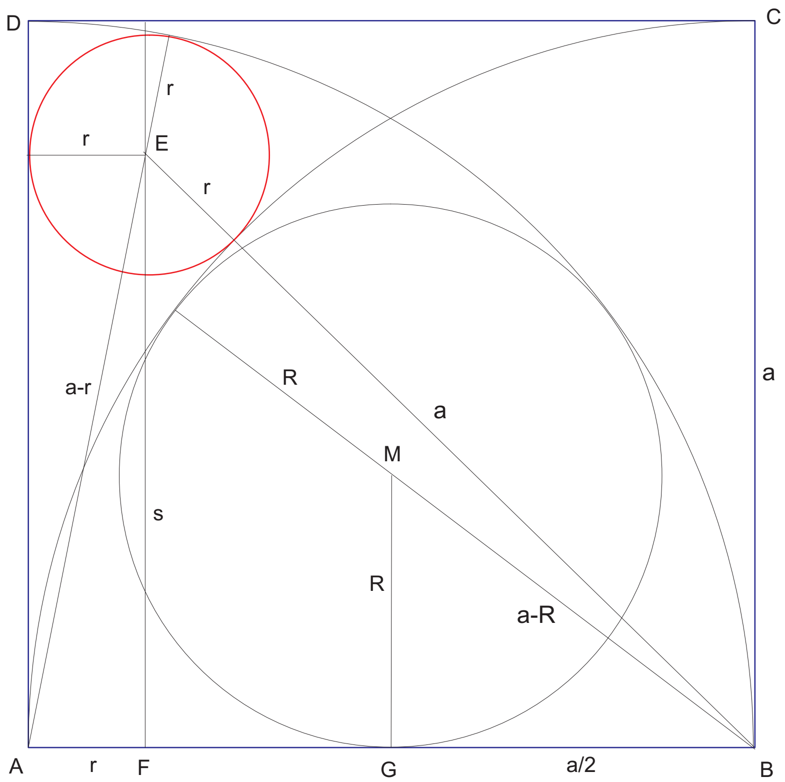

Abbildung 16: Lösungsskizze zur Aufgabe V

Der große Kreisradius R berechnet sich aus dem Dreieck BMG:

$$\triangle BMG: \quad (a-R)^2 = R^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad R = \frac{3\,a}{8} \tag{1}$$

Für die Bestimmung des kleinen Radius sind zwei quadratische Gleichungen notwendig.

$$\triangle BEF: \quad (a+r)^2 = (a-r)^2 + s^2 \quad \rightarrow \quad s^2 = 4\,a\,r \tag{2}$$

$$\triangle AEF: \quad (a-r)^2 = r^2 + s^2 \tag{3}$$

Das Ergebnis für s aus (2) setzen wir in (3) ein und erhalten

$$(a-r)^2 = r^2 + 4\,a\,r \quad \rightarrow \quad r = \frac{a}{6} \tag{4}$$

4.6 Lösungsvorschlag zur Aufgabe VI

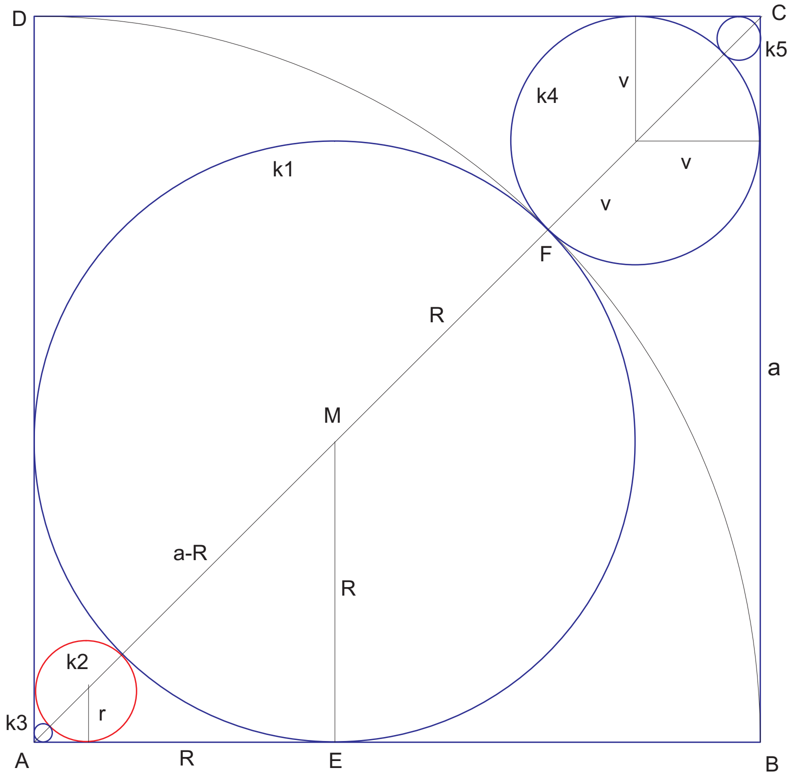

Abbildung 17: Lösungsskizze zur Aufgabe VI

Aus der Berührung zwischen dem Viertelkreisbogen mit Radius a und dem Kreis k_1 erhält man das Dreieck AME :

$$k_1 : \quad (a-R)^2 = R^2 + R^2 \quad \rightarrow \quad R = a\,(\sqrt{2}-1) \tag{1}$$

Die beiden links, unten liegenden Kreise k_2 und k_3 ergeben sich zu:

$$k_2 : \quad [a - 2\,R - r]^2 = 2\,r^2 \quad \rightarrow \quad r = \frac{a}{7 + 5\,\sqrt{2}} \tag{2}$$

und

$$k_3 : \quad [a - 2\,R - 2\,r - u]^2 = 2\,u^2 \quad \rightarrow \quad u = \frac{a}{41 + 29\,\sqrt{2}} \tag{3}$$

Für den Kreis k_4 erhalten wir :

$$k_4 : \quad [a\,(\sqrt{2}-1) - v]^2 = 2\,v^2 \quad \rightarrow \quad v = a\,(3 - 2\,\sqrt{2}) \tag{4}$$

und schließlich k_5:

$$k_5 : \quad [a\,(\sqrt{2}-1) - 2\,v - x]^2 = 2\,x^2 \quad \rightarrow \quad x = \frac{a}{17 + 12\,\sqrt{2}} \tag{5}$$

4.7 Lösungsvorschlag zur Aufgabe VII

Bestimmung von R

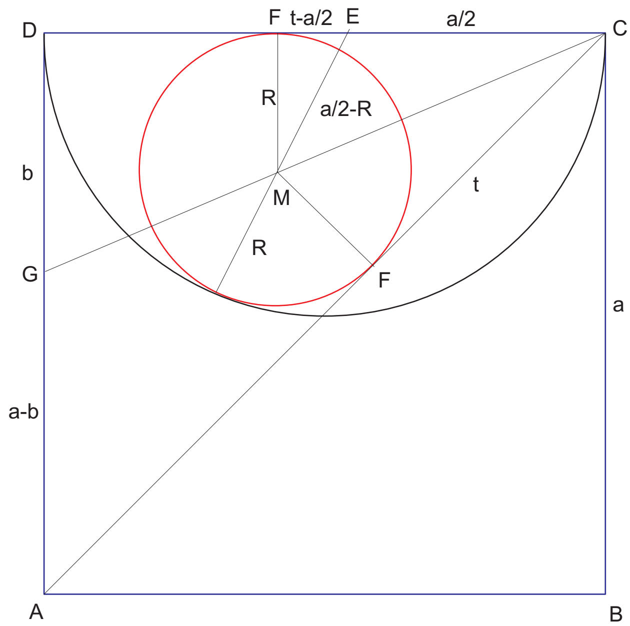

Abbildung 18: Lösungsskizze I zur Aufgabe VII

Bezeichne $t = \overline{CF}$ den Tangentenabschnit von C an den Kreis. Es gilt dann im rechtwinkligen Dreieck MFE der *Satz des Pythagoras*:

$$\triangle MFE: \quad \left(\frac{a}{2} - R\right)^2 = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + R^2 \tag{1}$$

Die Strecke $\overline{CG}$ ist die Winkelhalbierende vom Winkel $\sphericalangle ACD$. Es gilt der *Satz des Apollonius*:
Die Winkelhalbierende $\overline{CG}$ teilt die Strecke $\overline{AD}$ im Verhältnis der anliegenden Seiten $\overline{CA}$ und $\overline{CD}$, also:

$$\frac{AG}{GD} = \frac{AC}{CD} \quad \rightarrow \quad \frac{a-b}{b} = \frac{a\sqrt{2}}{a} \quad \rightarrow \quad b = \frac{a}{1+\sqrt{2}} \tag{2}$$

Die Dreiecke CGD und CMF sind einander ähnlich und es gilt:

$$\frac{t}{R} = \frac{a}{b} \quad \rightarrow \quad \frac{t}{R} = 1+\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad t = R\,(1+\sqrt{2}) \tag{3}$$

Das Ergebnis für t setzen wir in (1) ein und lösen nach R auf:

$$\left(\frac{a}{2} - R\right)^2 = \left(R\,(1+\sqrt{2}) - \frac{a}{2}\right)^2 + R^2 \quad \rightarrow \quad R = a\,\frac{\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \tag{4}$$

Bestimmung von r

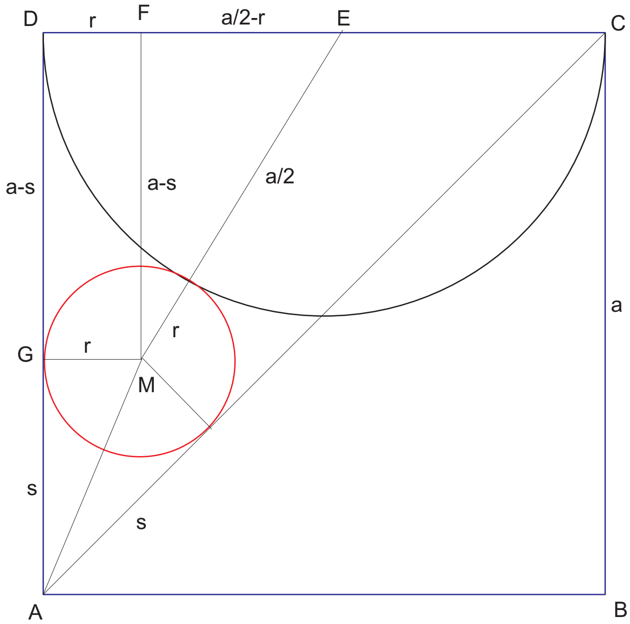

Abbildung 19: Lösungsskizze II zur Aufgabe VII

Bezeichne $s = \overline{AG}$ den Tangentenabschnitt von A an den Kreis. Es gilt dann im rechtwinkligen Dreieck MFE der *Satz des Pythagoras*:

$$\triangle MFE: \quad \left(\frac{a}{2}+r\right)^2 = \left(\frac{a}{2}-r\right)^2 + (a-s)^2 \tag{5}$$

Das Verhältnis $s \div r$ ist identisch mit dem Verhältnis $t \div R$ aus dem vorangegangenen Aufgabenteil:

$$\frac{t}{R} = \frac{s}{r} = 1+\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad s = r\,(1+\sqrt{2}) \tag{6}$$

Das Ergebnis für s setzen wir in (5) ein und lösen nach r auf:

$$\left(\frac{a}{2}+r\right)^2 = \left(\frac{a}{2}-r\right)^2 + (a - r\,(1+\sqrt{2}))^2 \tag{7}$$

$$r = \frac{a}{3+2\sqrt{2}} = a\,(3-2\sqrt{2}) \tag{8}$$

4.8 Lösungsvorschlag zur Aufgabe VIII

Bestimmung von r

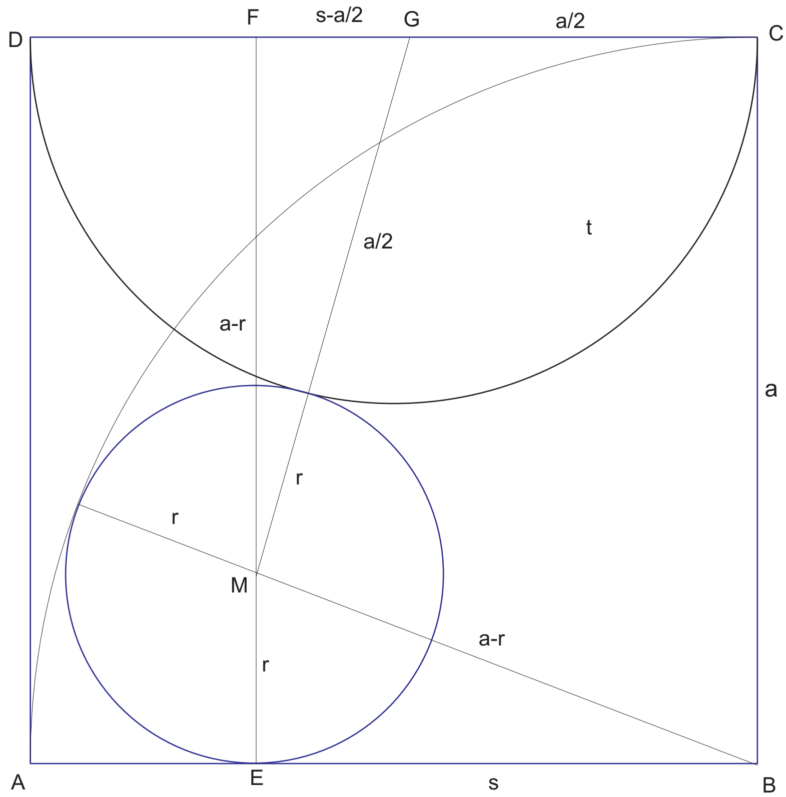

Abbildung 20: Lösungsskizze 1 zur Aufgabe VIII

Bezeichne $s = \overline{BE}$ den Tangentenabschnit von B an den Kreis k_1. Es gilt dann im Dreieck BME der Pythagoras:

$$\triangle BME: \quad (a-r)^2 = r^2 + s^2 \quad \rightarrow \quad s^2 = a\,(a - 2\,r) \tag{1}$$

Aus der Berührung zwischen dem Halbkreis mit Radius $a/2$ und dem Kreis k_1 entsteht das rechtwinklige Dreieck FMG :

$$\triangle FMG: \quad \left(\frac{a}{2} + r\right)^2 = \left(s - \frac{a}{2}\right)^2 + (a-r)^2 \tag{2}$$

Das Einsetzen von (1) in (2) liefert die quadratische Gleichung zur Bestimmung von r:

$$3\,a^2 - 18\,a\,r + 25\,r^2 = 0 \quad \rightarrow \quad r = a\left(\frac{9-\sqrt{6}}{25}\right) \tag{3}$$

Bestimmung von u

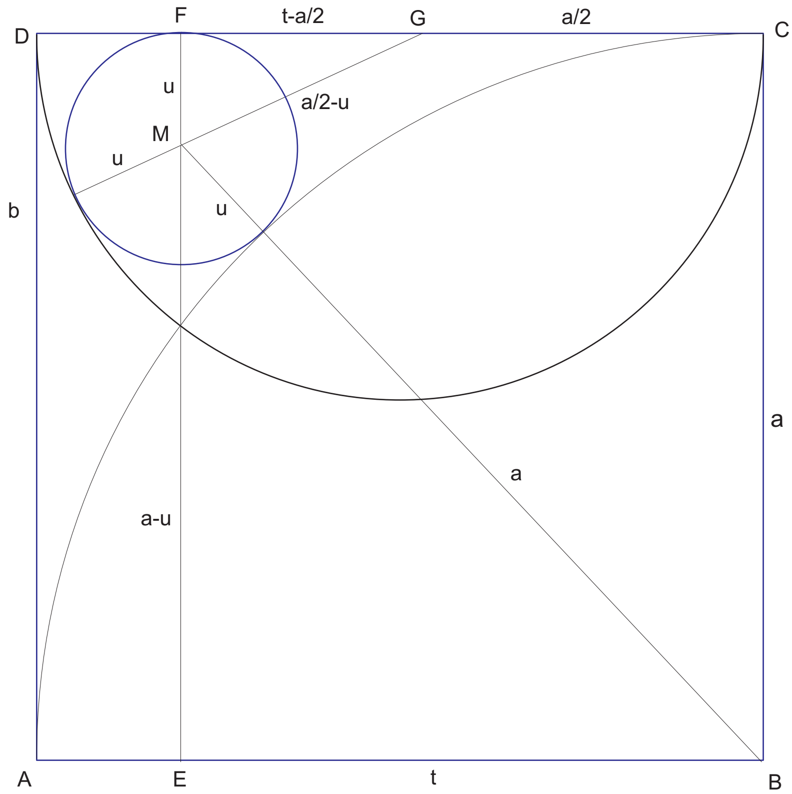

Abbildung 21: Lösungsskizze 2 zur Aufgabe VIII

Bezeichne $t = \overline{CF}$ den Tangentenabschnitt von C an den Kreis k_2. Aus der Berüherung zwischen dem Viertelkreisbogen mit Radius a und k_2 erhalten wir das rechtwinklige Dreieck BME :

$$\triangle BME: \quad (a+u)^2 = (a-u)^2 + t^2 \quad \rightarrow \quad t^2 = 4\,a\,u \tag{4}$$

Ein zweites Berührungdreieck GMF finden wir zwischen k_2 und dem Halbkreisbogen mit Radius $a/2$:

$$\triangle GMF: \quad \left(\frac{a}{2} - u\right)^2 = \left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + u^2 \quad \rightarrow \quad t = 5\,u \tag{5}$$

Der Vergleich zwischen (4) und (5) liefert:

$$t^2 = 25\,u^2 = 4\,a\,u \quad \rightarrow \quad u = \frac{4\,a}{25} \tag{6}$$

Bestimmung von v

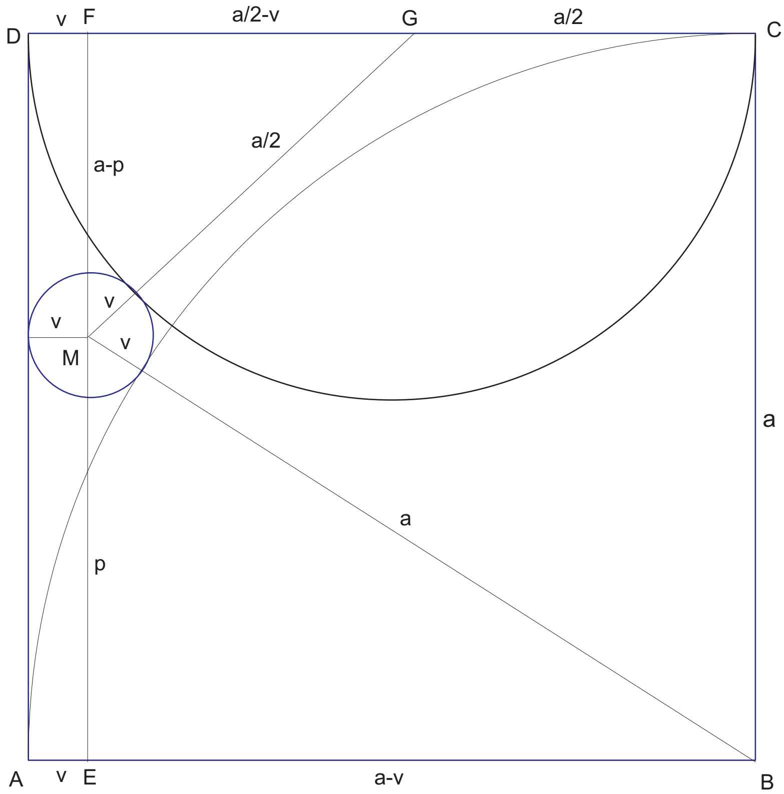

Abbildung 22: Lösungsskizze 3 zur Aufgabe VIII

Bezeichne $p = \overline{EM}$ den Abstand vom Kreismittelpunkt M zur Grundlinie $\overline{AB}$. Aus der Berührung zwischen dem Viertelkreisbogen mit Radius a und k_3 erhalten wir das rechtwinklige Dreieck BME :

$$\triangle BME : \quad (a+v)^2 = (a-v)^2 + p^2 \quad \rightarrow \quad p^2 = 4\,a\,v \tag{7}$$

Ein zweites Berührungdreieck GMF finden wir zwischen k_3 und dem Halbkreisbogen mit Radius $a/2$:

$$\triangle GMF : \quad \left(\frac{a}{2}+v\right)^2 = \left(\frac{a}{2}-v\right)^2 + (a-p)^2 \quad \rightarrow \quad (a-p)^2 = 2\,a\,v \tag{8}$$

Die Lösung aus (7) für p setzen wir in (8) ein und erhalten eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von v

$$v^2 - 3\,a\,v + \frac{a^2}{4} \quad \rightarrow \quad v = \frac{a}{2}\left(3-\sqrt{8}\right) \tag{9}$$

5 Das gefaltete Quadrat

5.1 Aufgabenstellung

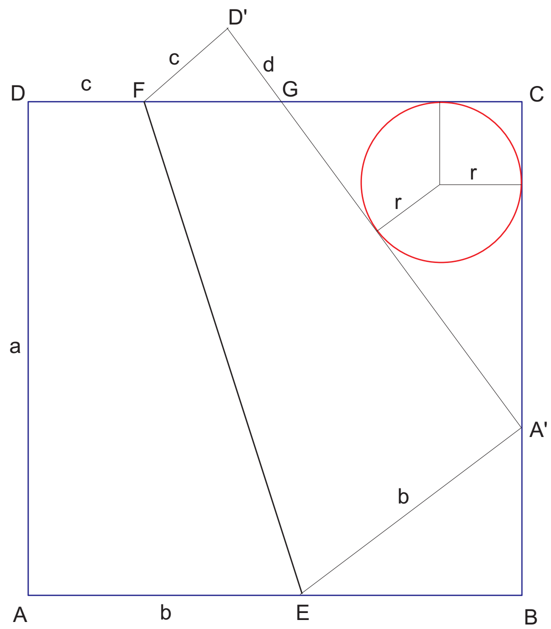

Abbildung 23: Skizze zur Aufgabenstellung

Im Jahresheft 1992 des Hamburger Schülerzirkel fand ich die folgende Aufgabe die in einer Sangaku Tafel ihren Ursprung hat.
Gegeben sei das Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a. Entlang der Linie EF wird das Quadrat gefaltet, so das der Punkt $A = A'$ auf Seite BC liegt. Ein Kreis k tangiert die Seiten BC und CD des Quadrats sowie die Linie $A'D'$. Zeige an dieser Figur das stets $d = r$ gilt!

5.2 Lösungsvorschlag I

von Ingmar Rubin, Berlin Es sei vorangestellt, dass der Lösungsweg des Hamburger Schülerzirkel allein mit Hilfe von Spiegelungen die Gleichheit der Strecke d mit dem Kreisradius r nachweist. Dem Leser sei an dieser Stelle Spielraum für eigene Lösungsideen gegeben. Im folgenden soll mittels algebraischer Gleichungen der Nachweis erfolgen. Wir beginnen damit die Streckenabschnitte c, e, f, g und h auf der Peripherie des Quadrats zu berechnen. Strecke b wird dabei als freier Parameter betrachtet. Die Seite $e = BA'$ folgt aus dem *Satz des Pythagoras*:

$$\triangle EBA' : \qquad e^2 = b^2 - (a-b)^2 \quad \rightarrow \quad e = \sqrt{2\,a\,b - a^2} \tag{1}$$

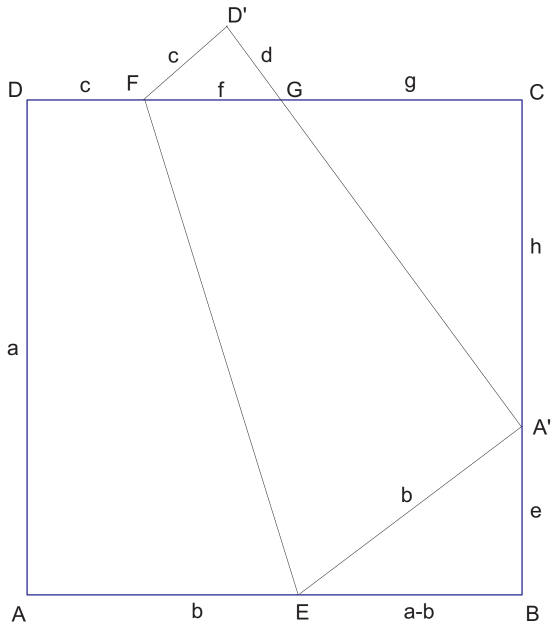

Abbildung 24: Skizze zum Lösungsvorschlag I, Teil a

Der Streckenabschnitt $h = A'C$ ist die Differenz aus $a - e$:

$$h = a - e = a - \sqrt{2\,a\,b - a^2} \tag{2}$$

Die Dreiecke EBA' und $A'CG$ sind einander ähnlich. Aus dem Seitenverhältnis folgt die Strecke $g = CG$ zu:

$$\frac{e}{a-b} = \frac{g}{h} \quad \rightarrow \quad g = \frac{(a - \sqrt{2\,a\,b - a^2})\,\sqrt{2\,a\,b - a^2}}{a-b} \tag{3}$$

Weiterhin ist Dreieck FGD' ähnlich zum Dreieck EBA' :

$$\frac{c}{f} = \frac{a-b}{b} \quad \rightarrow \quad f = \frac{c\,b}{a-b} \tag{4}$$

Die Summe der Abschnitte $g + f + c$ entspricht der Seitenlänge $a = CD$ vom Quadrat :

$$CD = a = g + f + c = \frac{(a - \sqrt{2\,a\,b - a^2})\,\sqrt{2\,a\,b - a^2}}{a-b} + \frac{c\,b}{a-b} + c \tag{5}$$

Diese Gleichung wird nach c aufgelöst:

$$c = b - \sqrt{a\,(2\;b - a)} \quad \rightarrow \quad c = b - e \tag{6}$$

Aus der Ähnlichkeit zwischen den Dreiecken $\triangle FD'G \sim \triangle EBA'$ berechnen wir die Strecke d:

$$\frac{c}{d} = \frac{a-b}{e} \tag{7}$$

$$d = \frac{c\,e}{a-b} = \frac{(b-e)\,e}{a-b} = \frac{a^2 - 2\,a\,b + b\,\sqrt{a\,(2\,b-a)}}{a-b} \tag{8}$$

Lenken wir nun unsere Aufmerksamkeit auf den Berührungskreis mit Radius r. Die Tan-

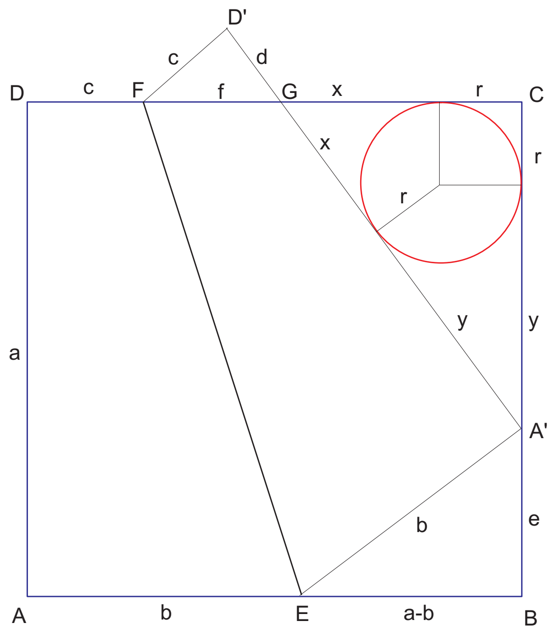

Abbildung 25: Skizze zum Lösungsvorschlag I, Teil b

gentenabschnitte x vom Punkt G an den Kreis sind gleich lang. Das gleiche gilt für die Tangentenabschnitte y vom Punkt A' an den Kreis.

$$A'C: \qquad h = a - \sqrt{2\,a\,b - a^2} = y + r \tag{9}$$

$$CG: \qquad g = \frac{(a - \sqrt{2\,a\,b - a^2})\,\sqrt{2\,a\,b - a^2}}{a-b} = x + r \tag{10}$$

Die gespiegelte Quadratseite $A'D'$ besteht aus den Teilstrecken:

$$A'D': \qquad a = x + y + d = x + y + \frac{a^2 - 2\,a\,b + b\,\sqrt{a\,(2\,b-a)}}{a-b} \tag{11}$$

Die Gleichungen (9),(10) und (11) werden mit einem Computeralgebrasystem (z.B. Mathematica) nach r, x, y aufgelöst.

$$\{\{r \to \frac{a^2 - 2\,a\,b + \sqrt{-a\,(a-2\,b)}\,b}{a-b},$$
$$x \to \sqrt{-a\,(a-2\,b)},$$
$$y \to \frac{a\left(-\sqrt{-a\,(a-2\,b)} + b\right)}{a-b}\}\}$$

Der Vergleich mit den vorangegangenen Gleichungen, insbesondere (8) zeigt:

$$r = d, \qquad x = e, \qquad y = \frac{a\,c}{a-b} \tag{12}$$

5.3 Lösungsvorschlag II

von Jutta Gut, Wien

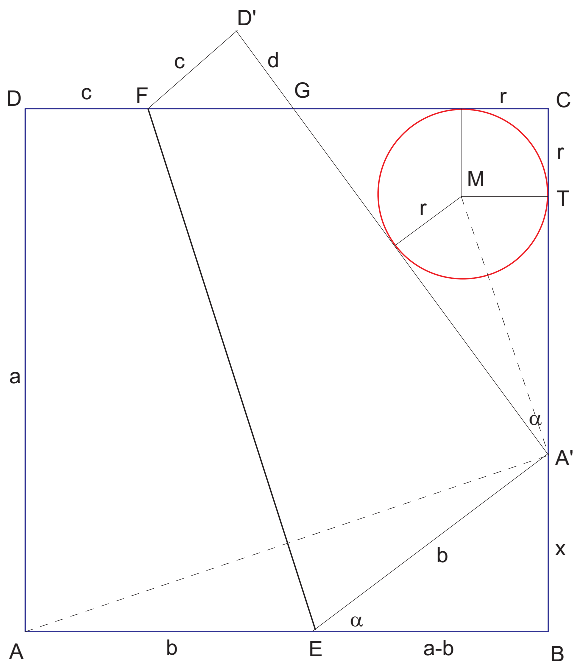

Abbildung 26: Skizze zum Lösungsvorschlag II

Es sei $x = BA'$, M der Mittelpunkt des Kreises, T der Berhrpunkt von Kreis und Seite BC und α der Winkel $\sphericalangle BEA' = \sphericalangle CA'G$.

Berechnung von r

Es ist:

$$\sphericalangle BAA' = \sphericalangle CA'M = \frac{\alpha}{2} \tag{1}$$

Daher ist:

$$\frac{AB}{BA'} = \frac{A'T}{TM} \quad \rightarrow \quad \frac{a}{x} = \frac{(a-x-r)}{r} \quad \rightarrow \quad r = \frac{x \cdot (a-x)}{a+x} \tag{2}$$

Berechnung von d

Aus dem rechtwinkligen Dreieck EBA' erhält man

$$b^2 = (a-b)^2 + x^2 \quad \rightarrow \quad b = \frac{a^2+x^2}{2\,a}, \quad a-b = \frac{a^2-x^2}{2\,a} \tag{3}$$

Die Dreiecke $A'CG$ und EBA' sind ähnlich:

$$\frac{GC}{a-x} = \frac{x}{a-b} \quad \rightarrow \quad GC = \frac{2\,a\,x\,(a-x)}{a^2-x^2} \tag{4}$$

Auch die Dreiecke $FD'G$ und EBA' sind ähnlich:

$$\frac{FG}{c} = \frac{b}{a-b} = \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2} \quad \rightarrow \quad FG = \frac{c \cdot (a^2+x^2)}{a^2-x^2} \tag{5}$$

Die Seite $\overline{CD}$ setzt sich zusammen aus:

$$\overline{CD} = c + FG + GC = a \tag{6}$$

also

$$c + \frac{c \cdot (a^2+x^2)}{a^2-x^2} + \frac{2\,a\,x \cdot (a-x)}{a^2-x^2} = a \quad \rightarrow \quad c = \frac{(a-x)^2}{2\,a} \tag{7}$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $FD'G$ und EBA' ergibt sich weiter:

$$\frac{d}{c} = \frac{x}{a-b} \quad \rightarrow \quad d = \frac{x\,c}{a-b} = \frac{x \cdot (a-x)^2}{2\,a} \cdot \frac{2\,a}{a^2-x^2} \tag{8}$$

$$d = \frac{x \cdot (a-x)}{a+x} \tag{9}$$

d.h. $d = r$, qed.

Zusatzaufgabe: Für welchen Abstand $x = BA'$ wir der Radius r maximal?

6 Weitere Aufgaben

Zum Abschluß seien dem Leser zwei weitere Aufgaben zur eigenen Lösung gegeben.

6.1 Fünf Kreise im Quadrat

In Abbildung 27 sind einem Quadrat fünf gleich große Kreise einbeschrieben. Gesucht ist ihr Radius r.

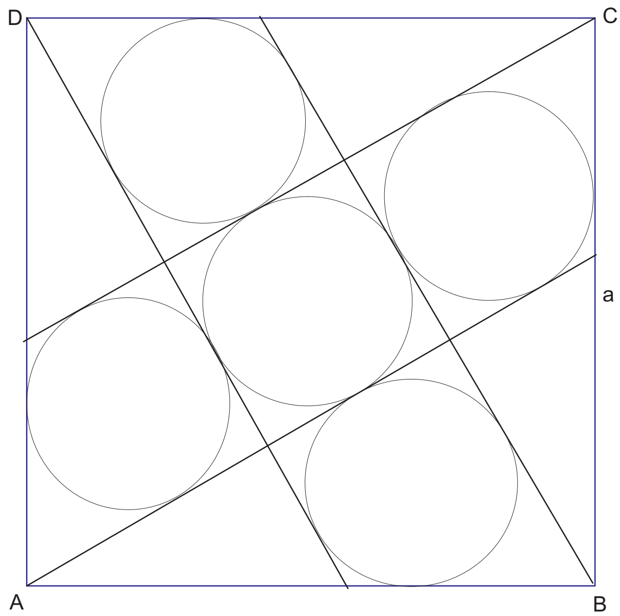

Abbildung 27: Skizze zur Aufgabe 6

6.2 Zwei Kreise und ein Dreieck im Kreis

Gegeben sei der Kreis k_1 mit Radius R und Mittelpunkt in M_1. Sein Durchmesser sei die Strecke AB. Ein zweiter Kreis k_2 mit Radius $r, r < R$ liegt mit seinem Mittelpunkt M_2 auf AB und berühert k_1 in A. Der innere Schnittpunkt zwischen dem Durchmesser AB und k_2 sei P. Über der Strecke PB werde ein gleichschenkliges Dreieck PCB errichtet, so dass C auf k_1 liegt. Ein dritter Kreis $k_3, (M_3, p)$ berühert k_1, k_2 und die Seite PC in je einem Punkt (Abbildung 28). Zeige, dass der Fußpunkt des Lotes von M_3 auf AB immer mit P zusammenfällt!

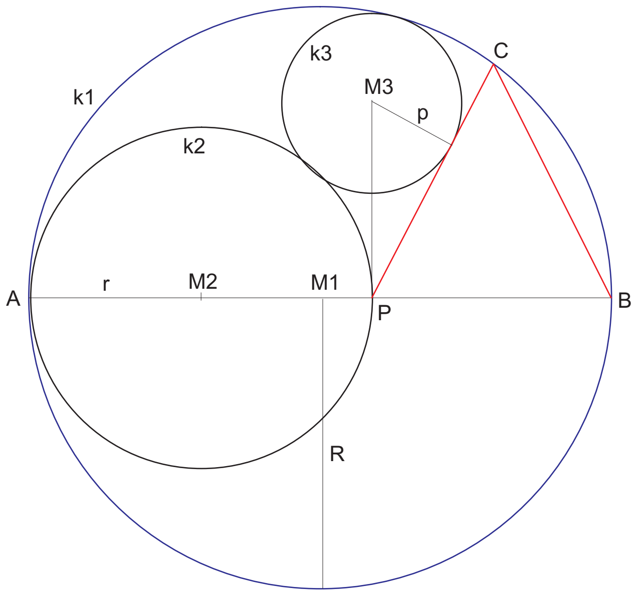

Abbildung 28: Skizze zur Aufgabe 7

7 Anhang

7.1 Sangaku-Quellen im Internet

Wer an den Sangaku Problemen Gefallen gefunden hat, findet im Internet zahlreiche Aufgabenbilder. Bei einer Suche unter GOOGLE nach `sangaku problems` oder `Japanese Temple Geometry` fand ich einige interessante Seiten. Hier eine kleine Auswahl:

http://www.wasan.jp/english/
http://www.cut-the-knot.org/proofs/jap.shtml
http://www.ethnomath.org/resources/okumura2001.pdf
http://www.hojm.fsnet.co.uk/edo.htm
http://mathworld.wolfram.com/SangakuProblem.html
http://www.arsetmathesis.nl/sangatekst.htm
http://interactive-mathvision.com/PaisPortfolio/Sangaku/SangakuFrames.html
http://www.paginar.net/matias/articles/Sangaku/Sangaku.html
http://www.matheraetsel.de/sangaku.html

7.2 Lösungsvorschlag *Fünf Kreise im Quadrat*

Wir bezeichnen die Strecken und Punkte entsprechend Abbildung 29. Zunächst machen

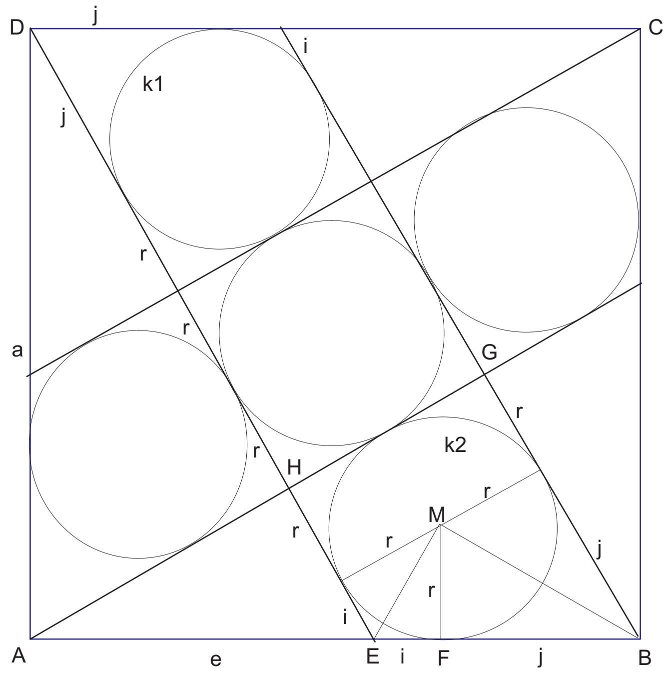

Abbildung 29: Skizze zur Lösung

wir uns den Satz vom gemeinsamen Tangentabschnitt an einen Kreis zu nutze:
Die Tangentenabschnitte von einem äußeren Punkt an einen Kreis sind stets gleich lang.
Wir berachten den Punkt B und den Kreis k_2. Die gemeinsamen Tangentenabschnitte sind die Strecken j. Gleiches gilt für den Punkt E und die eingezeichneten Abschnitte i an k_2. Die Seite $a = \overline{AB}$ setzt sich aus drei Abschnitten zusammen:

$$\overline{AB}: \qquad a = e + i + j \tag{1}$$

Vom Punkt D an den Kreis k_1 erhalten wir die Tangentenabschnitte j. Für die Transversale $\overline{DE}$ gilt:

$$\overline{DE} = j + i + 4\,r \tag{2}$$

Das Dreieck EAD ist rechtwinklig und es gilt der *Satz des Pythagoras*:

$$\triangle EAD: \qquad a^2 + e^2 = (j + i + 4\,r)^2 \tag{3}$$

Die Dreiecke AEH und ABG sind einander ähnlich und es gilt die Verhältnisgleichung:

$$\triangle AEH \sim \triangle ABG: \qquad \frac{e}{r+i} = \frac{a}{r+j} \tag{4}$$

Im rechtwinkligen Dreieck EMB gilt der Höhensatz:

$$\triangle EMB: \qquad i \cdot j = r^2 \tag{5}$$

Die Gleichungen (1) bis (5) werden mit einem Computeralgebrasystem nach den größen e, i, j, r aufgelöst.

$$e = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad i = \frac{a}{12}\left(3 - \sqrt{3}\right), \quad j = \frac{a}{4}\left(3 - \sqrt{3}\right), \quad r = \frac{a}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

Alle Strecken lassen sich als *algebraische Zahl* darstellen. Das gestellte Sangakuproblem kann damit als eine Zirkel- und Lineal Konstruktion ausgeführt werden.

7.3 Lösungsvorschlag *Zwei Kreise und ein Dreieck im Kreis*

Bestimmung des Kreisradius von k_3

Wir bezeichnen die Strecken und Punkte entsprechend Abbildung 30. Vorerst interessieren wir uns nur für den linken Teil mit den drei Kreisen. Von allen möglichen Kreisen k_3 die k_1 und k_2 berühern wollen wir den bestimmen, dessen Lot vom Mittelpunkt M_3 genau die Tangente im Punkt A bildet.

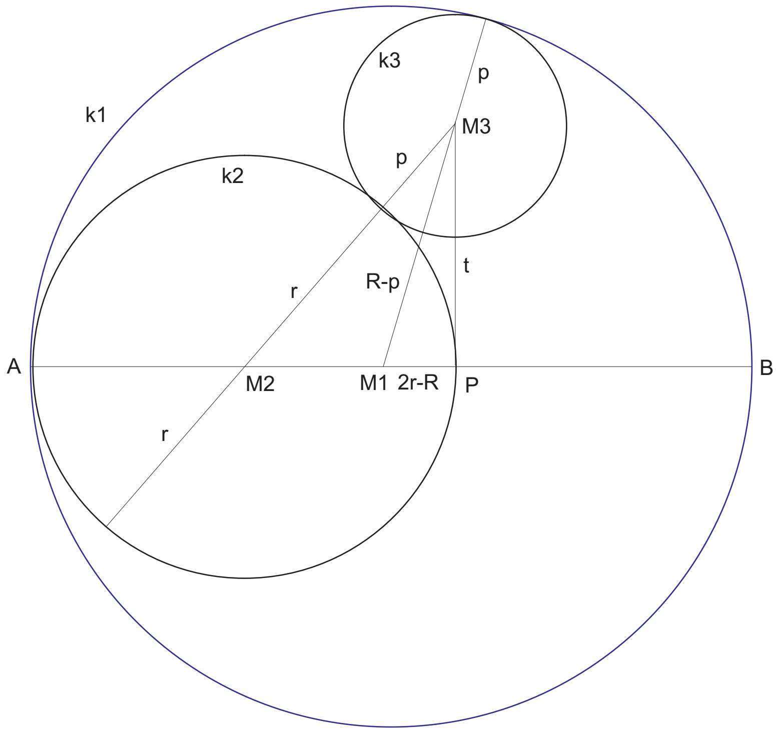

Abbildung 30: Skizze zum Lösungsweg, Teil I

Nach den Sehnen-Tangentenastz vom Mittelpunkt M_3 aus gilt:

$$t^2 = p \cdot (p + 2\,r) \tag{1}$$

Im rechtwinkligen Dreieck M_1AM_3 gilt der *Satz des Pythagoras*:

$$(R - p)^2 = t^2 + (2\,r - R)^2 \quad \rightarrow \quad p^2 - 2\,p\,R = t^2 + 4\,r^2 - 4\,r\,R \tag{2}$$

Die Gleichungen (1), (2) werden mit einem Computeralgebrasystem nach t, p aufgelöst

$$p = \frac{2\,r\,(R - r)}{R + r}, \qquad t = \frac{2\,r\,\sqrt{2\,(R - r)}}{R + r} \tag{3}$$

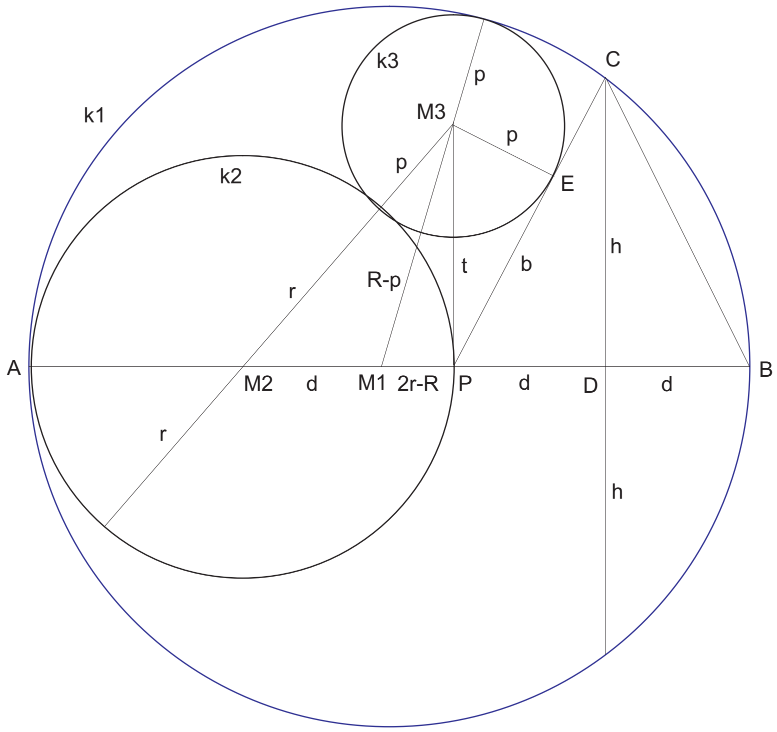

Abbildung 31: Skizze zum Lösungsweg, Teil II

Ähnlichkeitsbetrachtung

Im zweiten Teil betrachten wir das Dreick PCB und seine Höhe h. Punkt D sei der Fußpunkt der Höhe auf PB. Der Abschnitt d berechnet sich aus

$$PB = 2\,d = 2\,R - 2\,r \quad \rightarrow \quad d = R - r \tag{4}$$

Die Höhe $h = CD$ erhalten wir aus dem Sehnensatz im Kreis k_1:

$$h \cdot h = d \cdot (2\,R - d) \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{R^2 - r^2} \tag{5}$$

Das Dreieck PEM_3 ist dem Dreieck PDC ähnlich, es gilt:

$$\frac{b}{p} = \frac{h}{d} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{t^2 - p^2}}{p} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R - r} \tag{6}$$

Wenn Gleichung (6) tatsächlich erfüllt ist, muß P der Fußpunkt von M_3 auf AB sein. Wir ersetzen auf der linken Seite nun p, t mit den Ergebnissen aus (3) :

$$\sqrt{t^2 - p^2} = \frac{2\,r\,\sqrt{R - r}}{R + r}, \quad p = \frac{2\,r\,(R - r)}{R + r} \tag{7}$$

$$\frac{\sqrt{t^2 - p^2}}{p} = \frac{\sqrt{R + r}}{\sqrt{R - r}} = \frac{\sqrt{R + r}\,\sqrt{R - r}}{R - r} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R - r} \tag{8}$$

Das Ergebnis von (8) entspricht der rechten Seite von Gleichung (6), womit die Aussage aus der Aufgabenstellung bewiesen ist.