Über einige Sätze und Aufgaben aus der Dreiecksgeometrie

Darij Grinberg

2003

Klassische Eigenschaften von Dreiecken

§1. Einleitung

Von allen Vielecken, außer dem Punkt und der Strecke (die man aber nur in Grenzfällen als Vielecke betrachtet), ist das Dreieck das einfachste. Viele Eigenschaften des Dreiecks finden sich im Lehrplan der Schule, weil sie in der Geometrie und auch in der höheren Mathematik unumgänglich sind.

Aber diese Eigenschaften sind nicht ein kleines Teil davon, was über Dreiecke im Laufe der Jahrhunderte an interessanten Ergebnissen bekannt geworden ist. Ein ganzes Feld der Geometrie ist entstanden, die sogenannte *Dreiecksgeometrie*. Man kann dieses Feld als Spiel oder als Kunst interpretieren, denn es hat keine Anwendungen. Optimistischer könnte man dagegen sagen, die Dreiecksgeometrie sei die reinste Mathematik, die es gibt. Mit geistreichen Beweisen, mit lange unentdeckt gebliebenen Sätzen von erstaunlichen Einfachheit und mit Bezügen zur algebraischen Geometrie verdient die Dreiecksgeometrie einen festen Platz in der Unterhaltungsmathematik.

Das wichtigste Objekt der Dreiecksgeometrie ist (Überraschung!) das Dreieck. Es wird oft mit ΔABC, $\Delta A_1A_2A_3$ oder ΔXYZ bezeichnet, wobei "Δ" das Zeichen für "Dreieck" ist und $A,\ B,\ C$ (oder $A_1,\ A_2,\ A_3$ oder $X,\ Y,\ Z$) die Dreiecksecken sind.

Wir werden in diesem Vortrag die Bezeichnung ΔABC verwenden. Die Seiten des Dreiecks werden dann mit $a = BC,\ b = CA$ und $c = AB$ bezeichnet, und die Winkel heißen $\alpha = \measuredangle CAB$, $\beta = \measuredangle ABC$ und $\gamma = \measuredangle BCA$.

Bemerkung: Dreiecksgeometer kämpfen aktiv gegen die Bezeichnung A für die Fläche des Dreiecks. Ein Grund dafür ist, daß in Amerika oft die Winkel nicht $\alpha,\ \beta$ und $\gamma,$ sondern $A,\ B$ und C heißen, und ein anderer Grund ist, daß A einfach eine Dreiecksecke ist. So sind S und F gebräuchliche Bezeichnungen für die Dreiecksfläche; in den letzten Jahren hat sich auch die Bezeichnung Δ durchgesetzt.

Für die Seiten eines Dreiecks ABC gelten die bekannten Dreiecksungleichungen $a < b + c$, $b < c + a$ und $c < a + b$. Für die Winkel gilt der Satz $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Falls auch diese Ergebnisse aus unseren Schulbüchern verschwunden sind, dann bedeutet es, daß wir uns schon in einem sehr späten Stadium der Apokalypse befinden. (Nach der Streichung der Additionsformeln für Sinus und Kosinus kann man allerdings alles erwarten.)

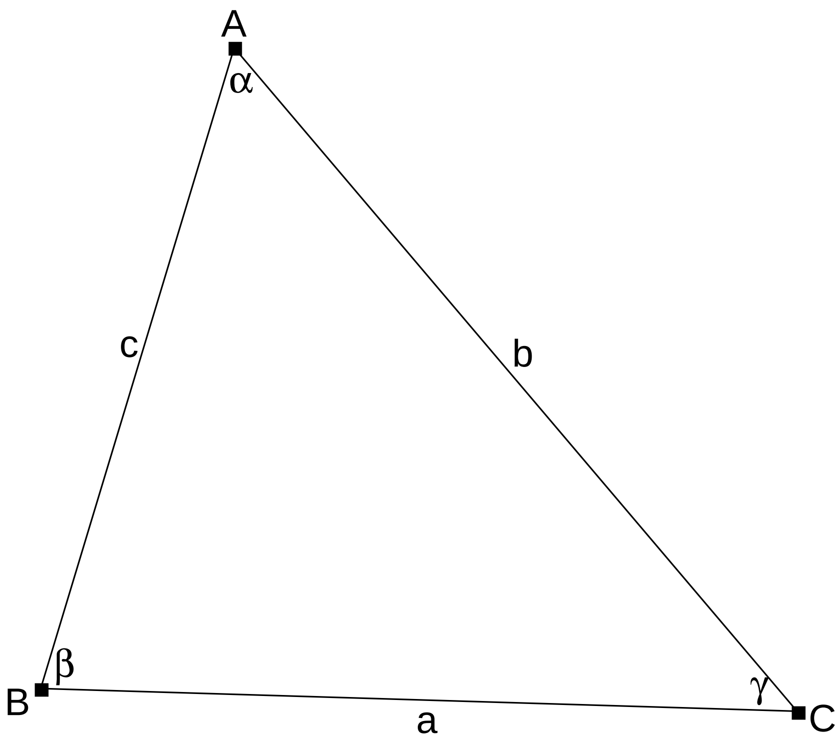

Fig. 1

Dreiecke können spitzwinklig, stumpfwinklig und (fast vergessen...) rechtwinklig sein. Für letztere gilt der Satz von Pythagoras, $a^2 + b^2 = c^2,$ wobei natürlich angenommen wird, daß der rechte Winkel bei der Ecke C liegt, also $\gamma = 90°$. Für $\alpha = 90°$ ist $b^2 + c^2 = a^2,$ und für $\beta = 90°$ ist $c^2 + a^2 = b^2$.

Ich habe mich mal mit einem Schüler gestritten, weil ich meinte, der Satz von Pythagoras laute $a^2 + b^2 = c^2,$ und er mir entgegensetzte, er laute $b^2 + c^2 = a^2$. In Wirklichkeit waren wir beide falsch - der Satz von Pythagoras lautet "Ist in einem Dreieck ABC der Winkel $\gamma = 90°,$ dann ist $a^2 + b^2 = c^2$", oder äquivalent "Ist in einem Dreieck ABC der Winkel $\alpha = 90°,$ dann ist $b^2 + c^2 = a^2$". Beidesmal unter stillschweigender Annahme, daß die Standardbezeichnungen $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ a,\ b,\ c$ benutzt werden.

In diesem Vortrag werden wir nun einige weitere Dreieckseigenschaften zeigen - bekannte und weniger bekannte. Ansonsten findet sich vieles in den lesenswerten Büchern, die ich am Ende in der Literaturliste aufführe.

§2. **Was sind merkwürdige Punkte**?

In der heutigen Schule werden vier merkwürdige (bzw. besondere, bemerkenswerte, ...) Punkte des Dreiecks gelehrt. Jedes mal ein Satz über drei Geraden, die sich in einem Punkt schneiden. An einem gleiten diese Sätze vorbei wie Trivialitäten, der andere wundert sich sein Leben lang darüber. Es war wahrscheinlich einer der letzteren, der den Begriff der merkwürdigen Punkte erfunden hat, und trotz aller Definitionsversuche ist dieser Begriff subjektiv.

Wir erinnern uns an diese Punkte, wobei wir zunächst nur die aus der Schule bekannten Eigenschaften aufführen:

§3. **Der Schwerpunkt**

Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, und dieser Punkt wird der *Schwerpunkt* des Dreiecks genannt.

Siehe Fig. 2, wo das Dreieck ΔABC heißt, die Seitenhalbierenden $AA',\ BB'$ und $CC',$ und der Schwerpunkt S. In Amerika bezeichnet man den Schwerpunkt meist mit $G,$ aber wir werden später den Buchstaben G für den Gergonnepunkt benutzen.

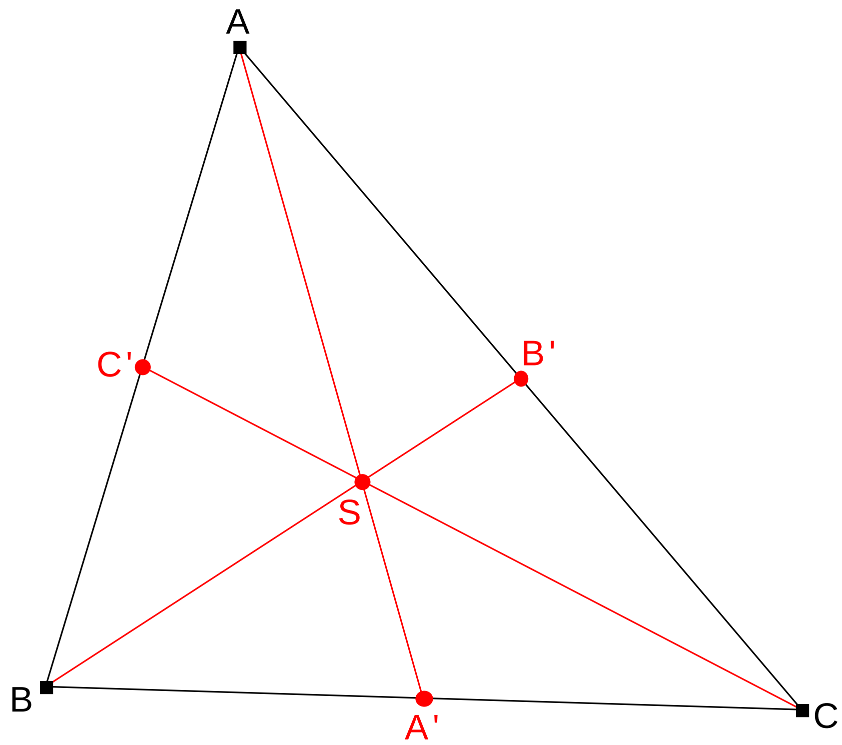

Fig. 2

Es gibt viele Beweise des Satzes, daß sich die drei Seitenhalbierenden in einem Punkt schneiden. Bekanntlich teilen sie sich in diesem Punkt im Verhältnis $2:1$, also

$$AS : SA' = BS : SB' = CS : SC' = 2.$$

§4. Der Inkreismittelpunkt

Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem sogenannten *Inkreismittelpunkt* des Dreiecks.

In Fig. 3 ist das Dreieck ABC und der Inkreismittelpunkt O. Der Inkreismittelpunkt hat seinen Namen davon, daß er der Mittelpunkt des einzigen Kreises ist, der die Seiten des Dreiecks berührt, und zwar *die Seiten als Strecken* (d. h. er berüht die Strecken BC, CA und AB und nicht ihre Verlängerungen). Dieser Kreis heißt der Inkreis des Dreiecks ABC.

Der Inkreismittelpunkt O ist gleich weit entfernt von jeder der Dreiecksseiten. D. h. auf Fig. 3 ist $OX = OY = OZ$, wobei X, Y und Z die Fußpunkte der Lote von O auf die Seiten BC, CA und AB sind. Diese Fußpunkte sind gleichzeitig die Punkte, in denen der Inkreis die jeweiligen Seiten berührt.

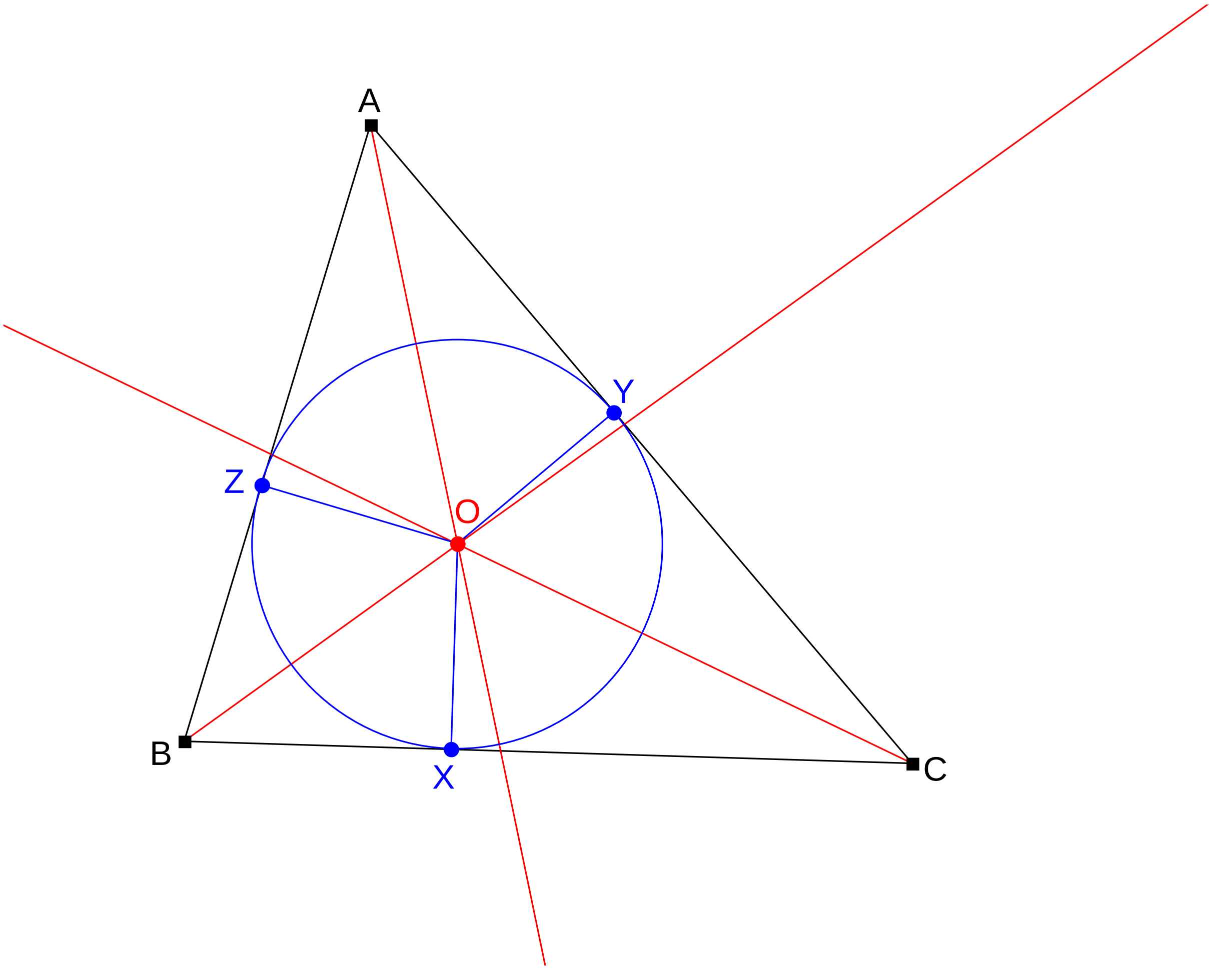

Fig. 3

"Die Winkelhalbierenden" des Dreiecks ABC, die sich in O schneiden, sind die Innenwinkelhalbierenden seiner Winkel. Man fragt sich, ob die Außenwinkelhalbierenden der Winkel sich auch in einem Punkt schneiden. Das tun sie nicht, aber man kann erkennen, daß sich je zwei Außenwinkelhalbierenden und die Innenwinkelhalbierende des dritten Winkels in einem Punkt schneiden. Mehr dazu später, in §8.

§5. **Der Höhenschnittpunkt**

Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, der (in plausibler Weise) der *Höhenschnittpunkt* des Dreiecks genannt wird.

Der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks ABC wird meist mit H bezeichnet (Fig. 4). Die Fußpunkte der Höhen nennt man öfters H_a, H_b und H_c.

Die merkwürdigen Punkte, die wir in den vorigen Paragraphen untersucht hatten, hatten stets eine klare Lage in bezug auf Dreieck ABC: Der Schwerpunkt und der Inkreismittelpunkt liegen stets im Inneren des Dreiecks; die drei Ankreismittelpunkte liegen stets außerhalb. Beim Höhenschnittpunkt ist es nun anders: Er liegt innerhalb des Dreiecks, falls es spitzwinklig ist, und außerhalb, falls es stumpfwinklig ist. Für ein rechtwinkliges Dreieck ist der Höhenschnittpunkt die Ecke mit dem rechten Winkel.

Wir werden später (in §11) zu den Höhen und dem Höhenschnittpunkt zurückkehren.

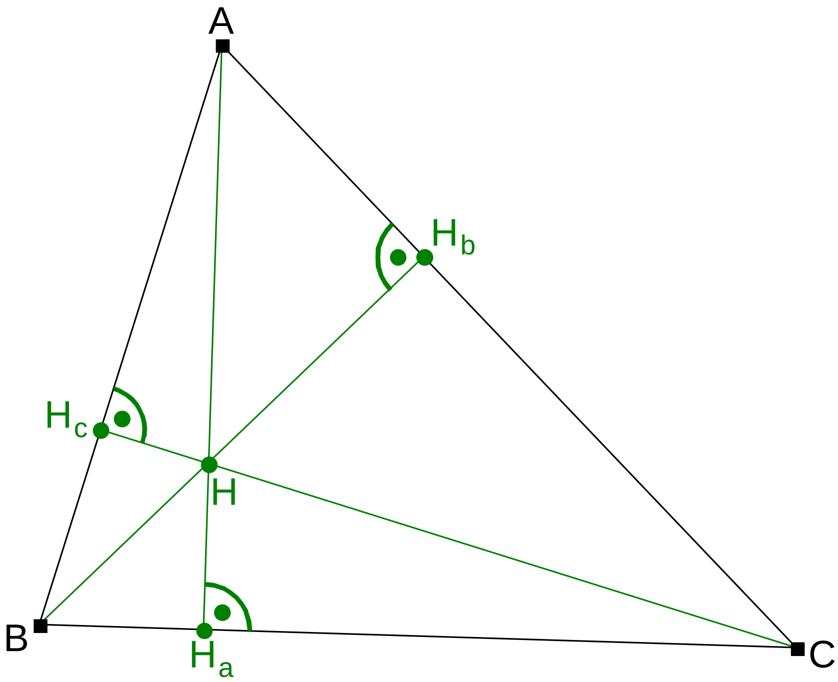

Fig. 4

§6. Der Umkreismittelpunkt

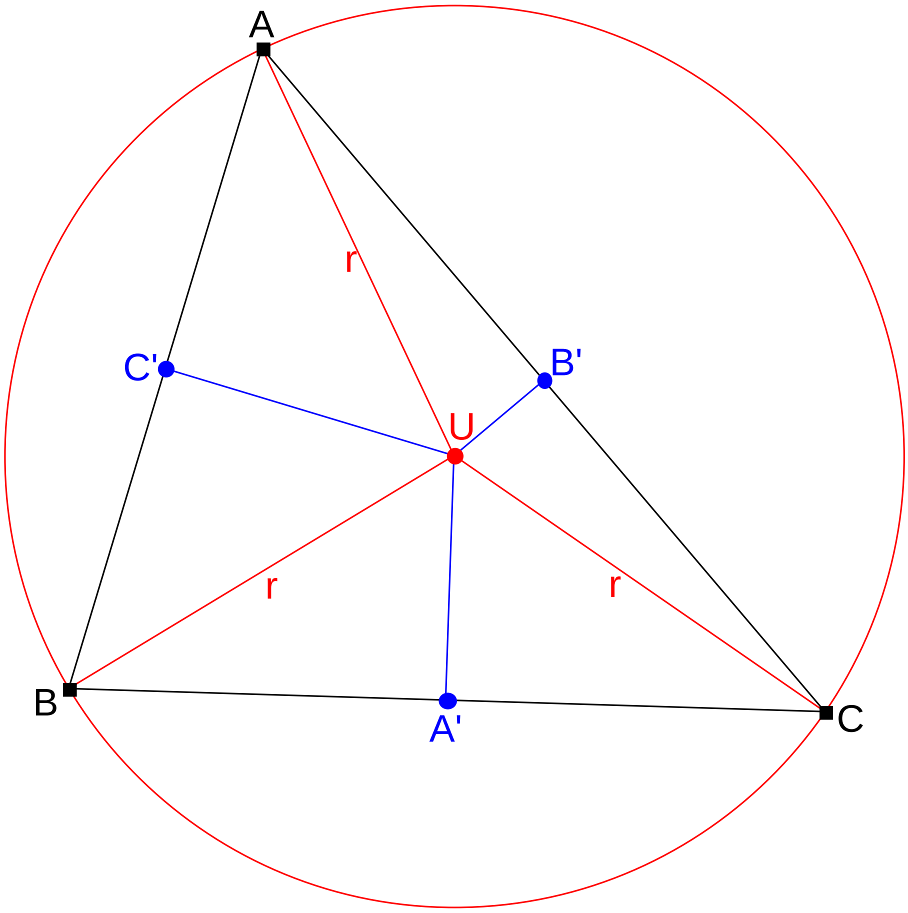

Fig. 5

Schließlich erinnern wir uns an den letzten kanonischen merkwürdigen Punkt des Dreiecks. Die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Dieser Punkt heißt *Umkreismittelpunkt* des Dreiecks. Er ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks, d. h. des Kreises durch die drei Ecken.

Auf Fig. 5 heißt das Dreieck ABC und der Umkreismittelpunkt U. Der Radius r des Umkreises ist eine sehr bedeutende Größe in der Geometrie des Dreiecks. Offensichtlich gilt
$r = UA = UB = UC$.

Wie der Höhenschnittpunkt, so liegt auch der Umkreismittelpunkt nur für spitzwinklige Dreiecke im Dreiecksinneren. Für rechtwinklige Dreiecke ist er der Mittelpunkt der Hypotenuse, und für stumpfwinklige Dreiecke liegt er außerhalb des Dreiecks.

Vergessene/Neue Eigenschaften von Dreiecken

§7. Einleitung

Damit haben wir alle vier bekannten merkwürdigen Punkte abgehandelt, nämlich den Schwerpunkt S, den Inkreismittelpunkt O, den Höhenschnittpunkt H und den Umkreismittelpunkt U. Wir haben dabei ihre aus der Schule bekannten Eigenschaften genannt. Aber an jeder der Zeichnungen kann man viel mehr ablesen, einige Sätze, die in keinem Schulbuch stehen. Einige dieser Eigenschaften sind "vergessen" (in alten Büchern), andere sind wahrscheinlich neuer. Wir werden also diese vier merkwürdigen Punkte nacheinander wieder untersuchen. Beginnen wir mit dem Inkreismittelpunkt.

§8. Die drei Ankreismittelpunkte

Am Ende von §4 haben wir festgestellt, daß sich die Außenwinkelhalbierenden *zweier* beliebiger Winkel eines Dreiecks und die Innenwinkelhalbierende des *dritten* Winkels in einem Punkt schneiden. Dieser Punkt heißt ein *Ankreismittelpunkt* des Dreiecks, und zwar der zu der Ecke des dritten Winkels gehörende Ankreismittelpunkt.

Dies ist ziemlich abstrakt; betrachten wir also Fig. 6. Die Außenwinkelhalbierenden der Winkel bei A und bei B und die Innenwinkelhalbierende des Winkels bei C schneiden sich in einem Punkt, und dieser Punkt ist der zu der Ecke C gehörende Ankreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Bezeichnen wir ihn mit O_c. Wir können aber genau so zwei andere Ankreismittelpunkte angeben, O_a und O_b, die jeweils zu den Ecken A und B gehören.

Wir stellen in einer Tabelle zusammen, welcher der Inkreis- und der Ankreismittelpunkte auf welcher Winkelhalbierenden liegt:

	liegt auf ...halbierende des Winkels CAB	liegt auf ...halbierende des Winkels ABC	liegt auf ...halbierende des Winkels BCA
Inkreismittelpunkt O	Innenwinkel...	Innenwinkel...	Innenwinkel...
Ankreismittelpunkt O_a	Innenwinkel...	Außenwinkel...	Außenwinkel...
Ankreismittelpunkt O_b	Außenwinkel...	Innenwinkel...	Außenwinkel...
Ankreismittelpunkt O_c	Außenwinkel...	Außenwinkel...	Innenwinkel...

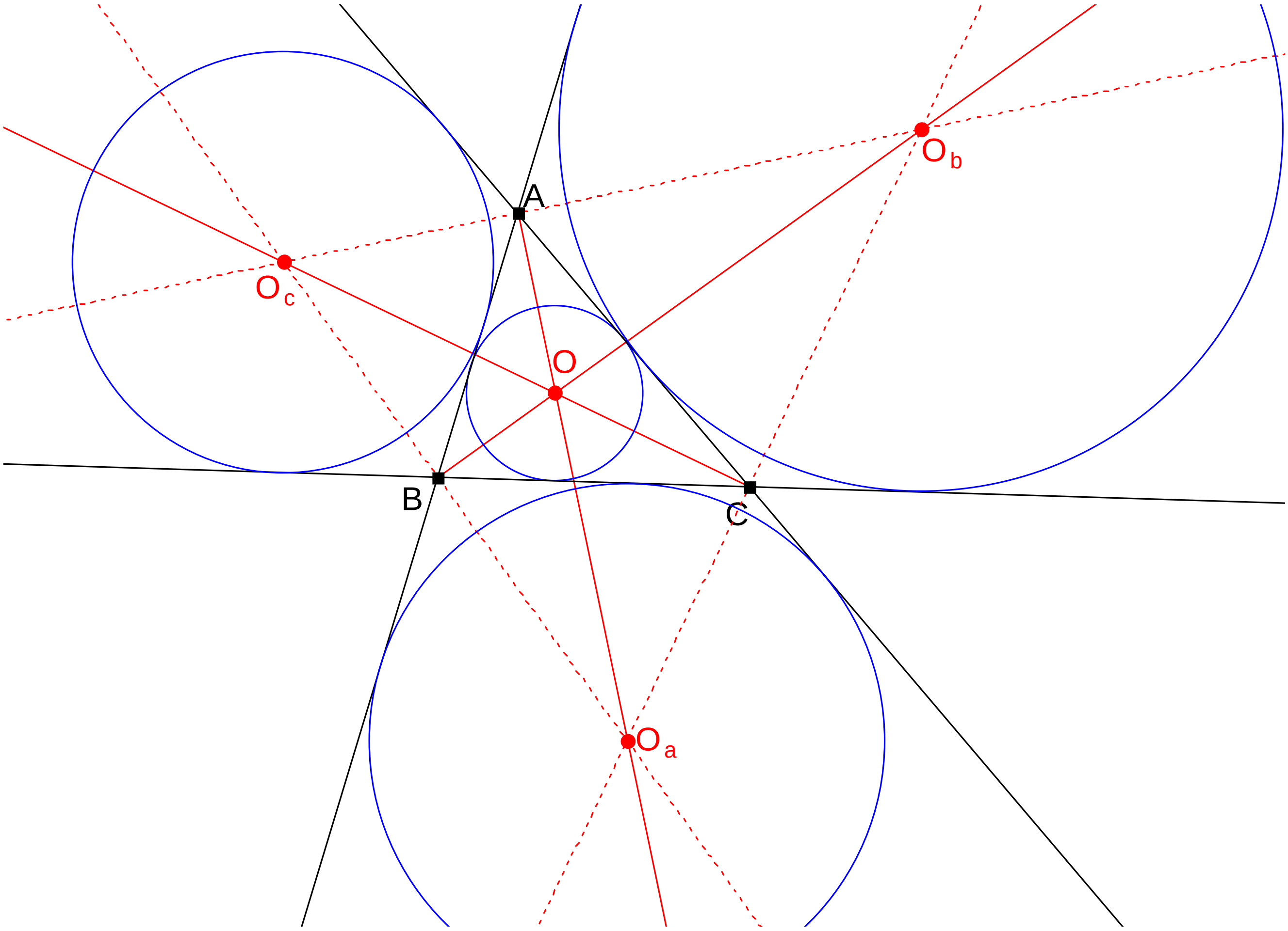

Fig. 6

Analog zu dem Inkreismittelpunkt ist jeder Ankreismittelpunkt der Mittelpunkt eines Kreises, der die Seiten des Dreiecks ABC berührt, aber diesmal berührt jeder von den drei solchen Kreisen je eine Seite als Strecke und die Verlängerungen der beiden anderen Seiten. Diese drei Kreise heißen die Ankreise des Dreiecks ABC.

Interessant wird es, wenn man den Inkreis (mit dem Mittelpunkt O) und die drei Ankreise (mit den Mittelpunkten O_a, O_b und O_c) auf einer Zeichnung (Fig. 6) zusammen sieht. Da der Inkreismittelpunkt O und der zu A gehörende Ankreismittelpunkt O_a beide auf der Innenwinkelhalbierenden des Winkels CAB liegen, und da die zu B und zu C gehörenden Ankreismittelpunkte O_b und O_c beide auf der Außenwinkelhalbierenden des Winkels CAB liegen, und da die Innenwinkelhalbierende und die Außenwinkelhalbierende eines Winkels immer zueinander orthogonal sind, schneiden sich die Geraden OO_a und O_bO_c in A und sind zueinander orthogonal. Entsprechend erkennt man, daß die Geraden OO_b und O_cO_a sich in B schneiden und zueinander orthogonal sind, und daß die Geraden OO_c und O_aO_b sich in C schneiden und zueinander orthogonal sind.

Also sind OO_a, OO_b und OO_c die Höhen des Dreiecks $O_aO_bO_c$, und O ist folglich der Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks. Andererseits sind die Geraden OO_a, OO_b und OO_c nichts anderes als die Innenwinkelhalbierenden des Dreiecks ABC.

Wir erhalten also:

Satz: Die Innenwinkelhalbierenden eines Dreiecks ABC sind die Höhen des Dreiecks aus den Ankreismittelpunkten. Der Inkreismittelpunkt O des Dreiecks ABC ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks aus den Ankreismittelpunkten.

Die Ankreismittelpunkte und die Ankreise waren lange Schulstoff; leider sind sie jetzt aus unserem Lehrplan größtenteils verschwunden.

§9. Der Schwerpunkt und Flächeninhalte

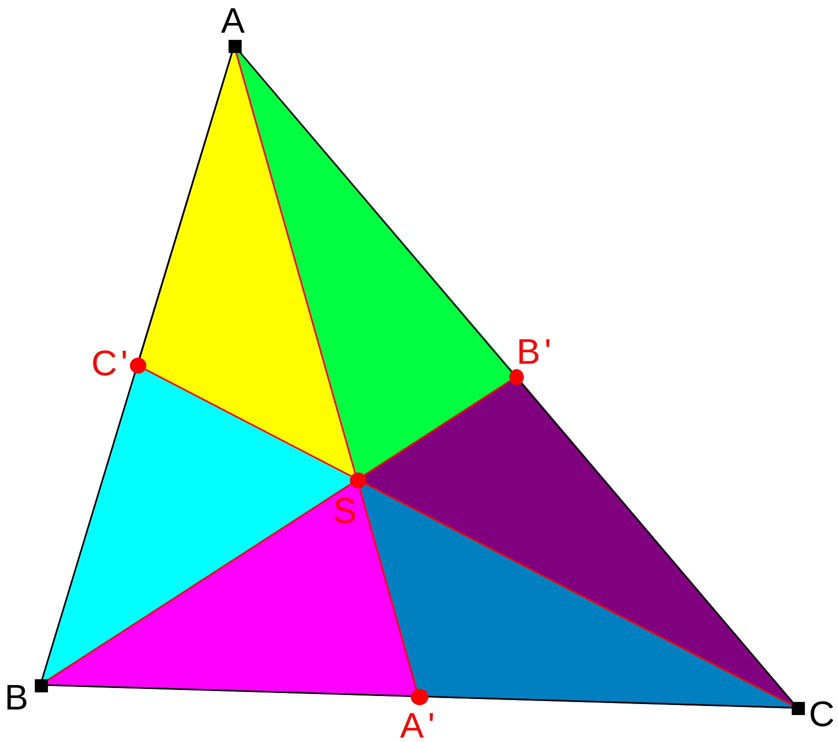

Fig. 7

Kommen wir nun zu dem Schwerpunkt S. Wenn, wie in §3, die Mittelpunkte der Seiten BC, CA und AB mit A', B' und C' bezeichnet werden, dann ist der Schwerpunkt S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden AA', BB' und CC'. Diese Seitenhalbierenden teilen das Dreieck ABC in 6 Teildreiecke: $\Delta ASC'$, $\Delta ASB'$, $\Delta CSB'$, $\Delta CSA'$, $\Delta BSA'$ und $\Delta BSC'$. Irgendwie erkennt man intuitiv an der Zeichnung (Fig. 7), daß diese 6 Teildreiecke die gleiche Fläche haben. Dies ist richtig:

Satz: Die Dreiecke $\Delta ASC'$, $\Delta ASB'$, $\Delta CSB'$, $\Delta CSA'$, $\Delta BSA'$ und $\Delta BSC'$ haben gleiche Fläche.

Beweis: Wir bezeichnen die Fläche eines Dreiecks XYZ mit F_{XYZ}; ferner sei $x = F_{BSA'}$, $x' = F_{CSA'}$, $y = F_{CSB'}$, $y' = F_{ASB'}$, $z = F_{ASC'}$ und $z' = F_{BSC'}$ (siehe Fig. 8). Wir wollen zeigen, daß $x = x' = y = y' = z = z'$ ist.

Betrachten wir die Dreiecke ACC' und BCC'. Die Fläche eines Dreiecks ist $\frac{1}{2}$ •Grundseite•Höhe; da die Dreiecke ACC' und BCC' eine gemeinsame Höhe h haben (der Lot von C auf AB), ist also

$$F_{ACC'} = \frac{1}{2} \bullet AC' \bullet h \qquad \text{und} \qquad F_{BCC'} = \frac{1}{2} \bullet BC' \bullet h.$$

Wegen $AC' = BC'$ (denn C' ist der Mittelpunkt von AB) erhalten wir also $F_{ACC'} = F_{BCC'}$, das heißt $y + y' + z = x + x' + z'$.

Kommen wir jetzt zu den Dreiecken ASC' und BSC'. Diese zwei Dreiecke haben wieder eine gemeinsame Höhe h' (der Lot von S auf AB). Damit ist

$$F_{ASC'} = \frac{1}{2} \bullet AC' \bullet h' \qquad \text{und} \qquad F_{BSC'} = \frac{1}{2} \bullet BC' \bullet h'.$$

Wegen $AC' = BC'$ ist also $F_{ASC'} = F_{BSC'}$, das heißt $z = z'$. Analog ist $x = x'$ und $y = y'$, und die Gleichung $y + y' + z = x + x' + z'$ vereinfacht sich zu $2y + z = 2x + z$, also $2y = 2x$ und $y = x$. Analog findet man $z = y$. Damit ist schließlich $x = x' = y = y' = z = z'$, was zu beweisen war.

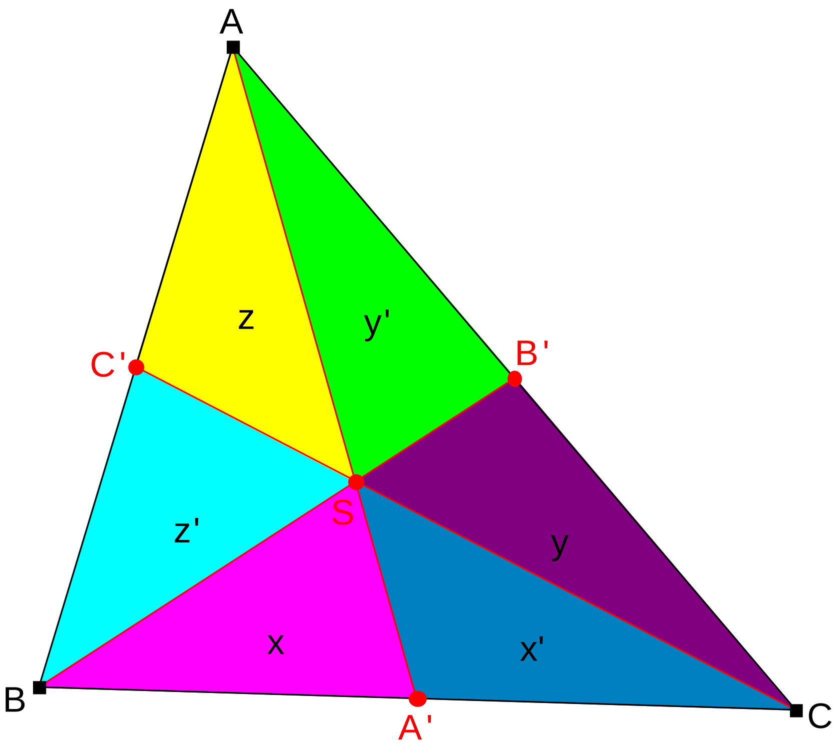

Fig. 8

§10. Der Lamoenkreis

Doch die 6 Teildreiecke, in die das Dreieck von seinen Seitenhalbierenden zerlegt wird, haben noch eine weitere Eigenschaft: Ihre Umkreismittelpunkte liegen auf einem Kreis (Fig. 9). Dieser wunderbare Satz wurde erst 2000 von Floor van Lamoen entdeckt und in der Ausgabe des "American Mathematical Monthly" vom November 2000 veröffentlicht. Der Kreis, auf dem die 6 Umkreismittelpunkte liegen, heißt demzufolge *Lamoenkreis* des Dreiecks *ABC*.

Der Beweis des Satzes von Lamoen ist ziemlich schwierig.

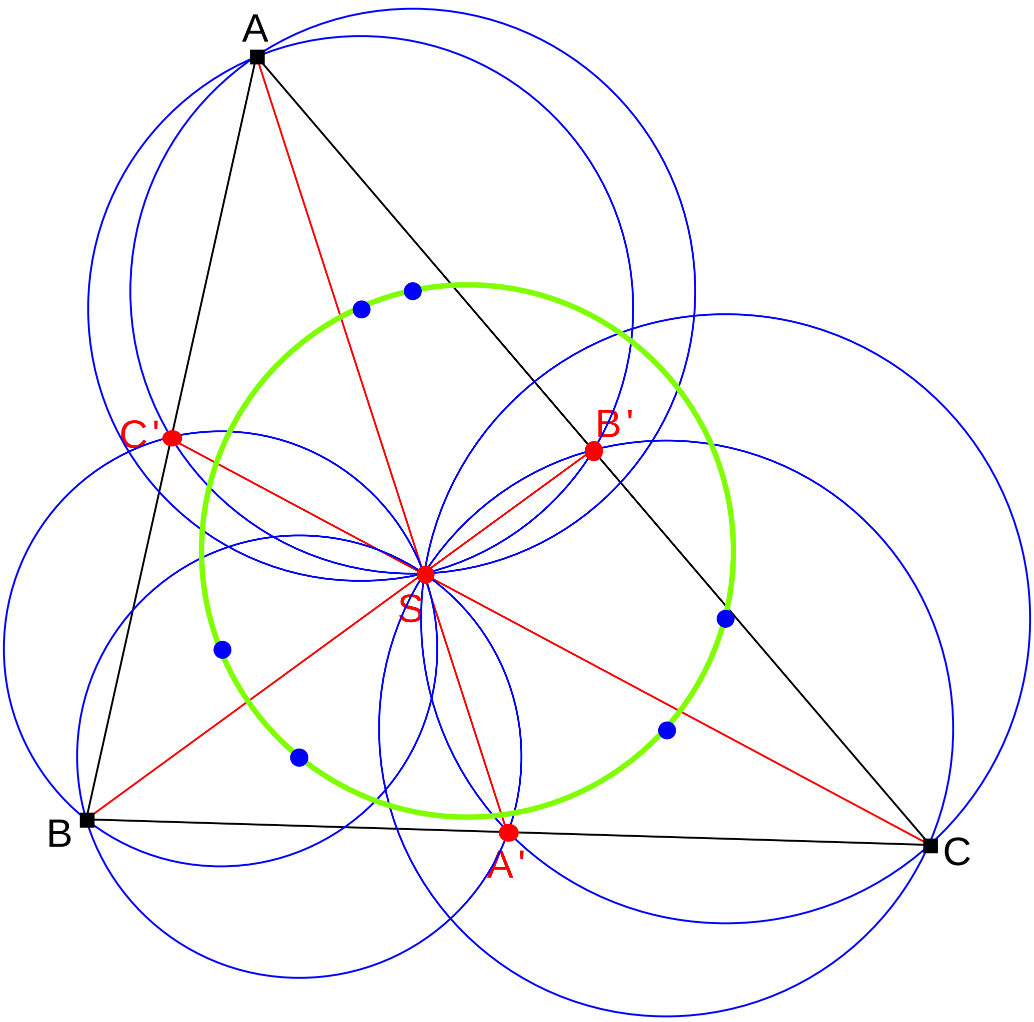

Fig. 9

§11. Einige Besonderheiten der Höhen

Jetzt unterziehen wir Fig. 4 mit den Höhen des Dreiecks ABC, ihren Fußpunkten H_a, H_b und H_c und ihrem Schnittpunkt H einer Revision: Die Dreiecke AHH_b und BHH_a sind ähnlich (ww; weil sie in den Winkeln bei H und in den rechten Winkeln übereinstimmen); daher ist $AH : HH_b = BH : HH_a$, also $AH \bullet HH_a = BH \bullet HH_b$. Analog findet man $BH \bullet HH_b = CH \bullet HH_c$. Damit haben wir bewiesen:

Satz: Für die Höhen eines Dreiecks ABC gilt

$$AH \bullet HH_a = BH \bullet HH_b = CH \bullet HH_c.$$

Eine weitere interessante Formel ist

$$AH^2 + a^2 = BH^2 + b^2 = CH^2 + c^2 = 4r^2,$$

wobei r der Umkreisradius des Dreiecks ABC ist (siehe §6). Ein Beweis kommt in §12.

§12. Die Eulergerade

In der Geometrie sollte man niemals zu viele Punkte auf eine Zeichnung quetschen - man verliert sofort den Überblick. Allerdings ist es manchmal sinnvoll, Zeichnungen zu überlagern, wenn die Punkte einen starken Zusammenhang miteinander haben. So zeigt Fig. 10 die Höhen, die Seitenhalbierenden und die Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC. Man erkennt an der Zeichnung:

Satz von Euler: Der Höhenschnittpunkt H, der Schwerpunkt S und der Umkreismittelpunkt U eines Dreiecks ABC liegen auf einer Geraden, und es gilt $HS = 2 \bullet SU$ (wobei S zwischen H und U liegt).

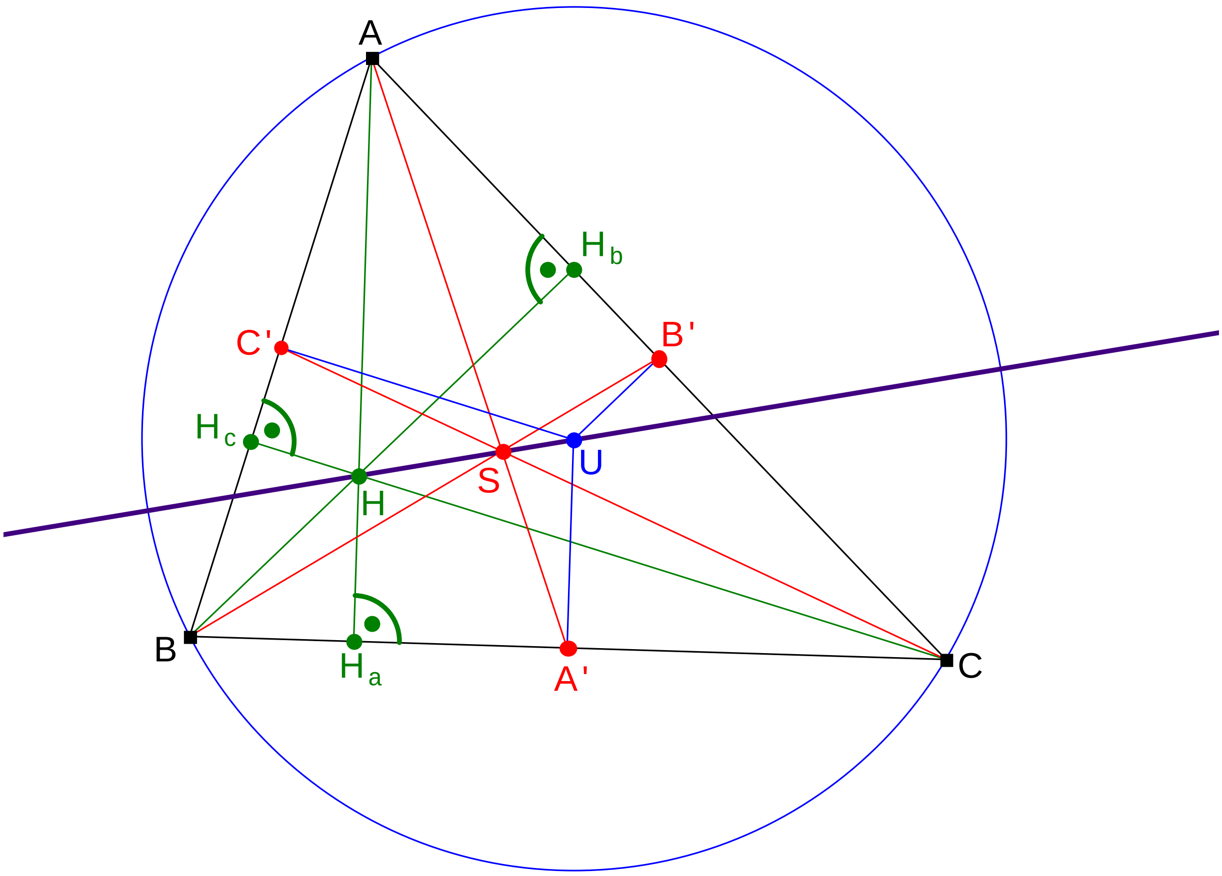

Fig. 10

Dies ist ein bekannter Satz, und die Gerade durch H, S und U heißt die *Eulergerade* des ΔABC.

Ein einfacher, aber hinterlistiger und impliziter *Beweis* des Satzes von Euler ist möglich, wenn man einen Punkt H' auf der Geraden SU einführt, für den gelten soll: $H'S = 2 \bullet SU$ (wobei S zwischen H' und U liegt). Durch diese Vorlagen ist der Punkt H' eindeutig festgelegt; wir müssen zeigen, daß dieser Punkt H' mit dem Höhenschnittpunkt H des ΔABC übereinstimmt. Siehe Fig. 11.

Wir haben $H'S : SU = 2$; andererseits wissen wir aber $AS : SA' = 2$ (aus §3). Nach dem Strahlensatz ist also $AH' \parallel A'U$. Da aber $A'U \perp BC$ ist (denn der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks ABC liegt auf der Mittelsenkrechten von BC), ist damit $AH' \perp BC$. Das bedeutet, daß H' auf der von A ausgehenden Höhe des Dreiecks ABC liegt. Analog beweist man, daß H' auf der von B ausgehenden Höhe und auf der von C ausgehenden Höhe liegt. Damit ist H' der Höhenschnittpunkt des ΔABC, also $H' = H$. Folglich liegt H auf der Geraden SU, und $HS = 2 \bullet SU$, und S liegt zwischen H und U, womit der Satz von Euler bewiesen ist.

Wir haben hierbei aber noch neu bewiesen, daß sich die drei Höhen des Dreiecks ABC in einem Punkt schneiden. Denn als wir H' einführten, wussten wir noch nichts über die Existenz von H; als wir dann zeigten, daß H' auf den drei Höhen des Dreiecks ABC liegt, bekamen wir als Bonus hinzu, daß die drei Höhen wirklich einen gemeinsamen Punkt haben.

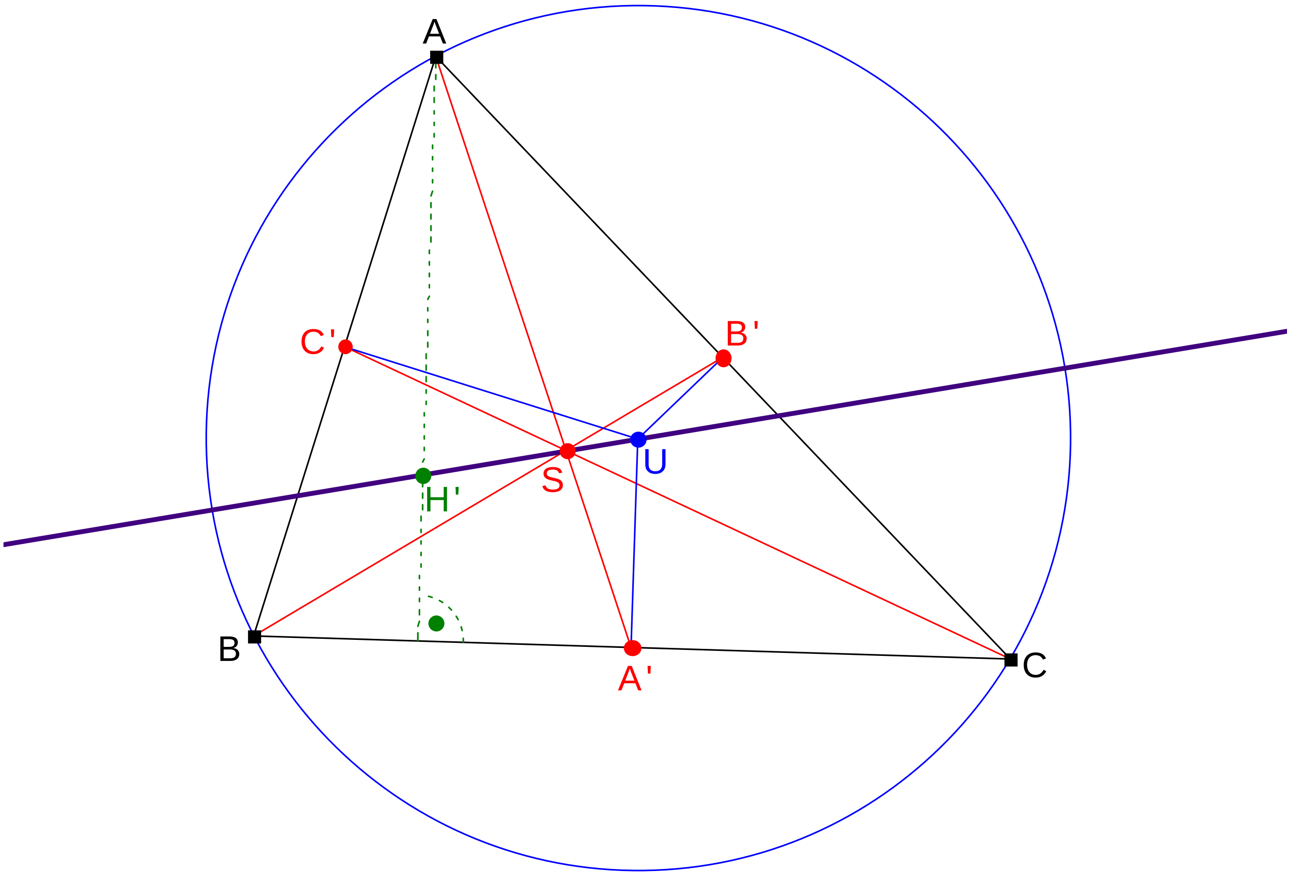

Fig. 11

Übrigens läßt sich der Satz von Euler auch wie folgt formulieren: Der Umkreismittelpunkt U ist das Bild des Höhenschnittpunktes H bei der zentrischen Streckung mit dem Zentrum S und dem Faktor $-1/2$.

Außer dem Satz von Euler erkennt man auf der Zeichnung vieles mehr. Wir wissen (nach dem Satz von Euler), daß die Punkte H, S und U auf einer Geraden liegen, und daß $HS : SU = 2$ ist. Andererseits wissen wir aus §3, daß die Punkte A, S und A' auf einer Geraden liegen, und daß $AS : SA' = 2$ ist. Nach dem Strahlensatz ist also $AH \parallel A'U$ und $AH = 2 \bullet A'U$. Analog findet man $BH = 2 \bullet B'U$ und $CH = 2 \bullet C'U$. Wir haben damit folgenden (oft benutzten) Satz erhalten:

Satz: Es ist $AH = 2 \bullet A'U$, $BH = 2 \bullet B'U$ und $CH = 2 \bullet C'U$.

In Worten: Der Abstand einer Dreiecksecke vom Höhenschnittpunkt ist doppelt so groß wie der Abstand des Umkreismittelpunktes vom Mittelpunkt der Seite, die unserer Ecke gegenüberliegt.

Das Dreieck $BA'U$ ist rechtwinklig (denn $A'U \perp BC$, weil U als Umkreismittelpunkt auf der Mittelsenkrechten von BC liegt); nach dem Satz von Pythagoras ist also $UB^2 = A'U^2 + BA'^2$. Nun ist $UB = r$ (der Umkreisradius des Dreiecks); nach dem gerade bewiesenen Satz ist $A'U = \frac{AH}{2}$, und ferner ist $BA' = \frac{a}{2}$ (denn A' ist der Mittelpunkt von BC). Folglich haben wir

$$r^2 = \left(\frac{AH}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

also $r^2 = \frac{1}{4}AH^2 + \frac{1}{4}a^2$, und damit $AH^2 + a^2 = 4r^2$. Analog zeigt man $BH^2 + b^2 = 4r^2$ und $CH^2 + c^2 = 4r^2$, und damit ist die Gleichung

$$AH^2 + a^2 = BH^2 + b^2 = CH^2 + c^2 = 4r^2$$

gezeigt (die wir in §11 gefunden haben). Andere Beweise dieser Gleichung sind z. B. mit Trigonometrie möglich.

§13. Der Feuerbachkreis

An der Konfiguration von Fig. 10 erkennt man mehr: Die Seitenmitten A', B' und C' und die Höhenfußpunkte H_a, H_b und H_c liegen auf einem Kreis. Wenn man ganz aufmerksam hinschaut, erkennt man zusätzlich, daß die Mittelpunkte der Strecken AH, BH und CH auf diesem Kreis liegen. Wir fassen also zusammen:

Satz vom Feuerbachkreis: Sei ΔABC ein beliebiges Dreieck. Dann liegen seine Seitenmitten A', B' und C', seine Höhenfußpunkte H_a, H_b und H_c, und die Mittelpunkte D, E und F der Strecken AH, BH und CH (wobei H der Höhenschnittpunkt des ΔABC ist) auf einem Kreis. Dieser Kreis heißt der *Feuerbachkreis* oder *Neunpunktekreis* des Dreiecks ABC.

Bemerkung: Die Bezeichnung "Feuerbachkreis" ist auf eine von Karl Feuerbach gefundene Eigenschaft dieses Kreises zurückzuführen - siehe §14. Die Bezeichnung "Neunpunktekreis" bezieht sich dagegen auf die neun Punkte A', B', C', H_a, H_b, H_c, D, E und F, die auf dem Kreis liegen.

Die Punkte D, E und F heißen gelegentlich *Eulerpunkte* des Dreiecks ABC.

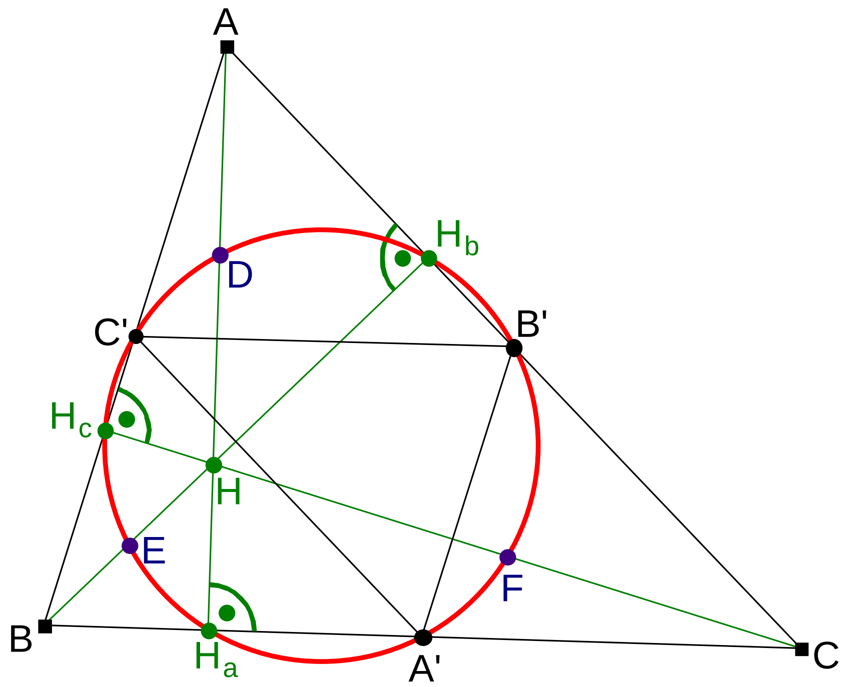

Fig. 12

Es sind viele Beweise des Satzes vom Feuerbachkreis bekannt; siehe etwa [1], [2], [4]. Im übrigen sind die meisten dieser Beweise sehr ähnlich, da der Satz nicht schwer ist. Ein *Beweis* geht z. B. folgendermaßen (Fig. 12a): Da die Punkte C' und D die Mittelpunkte der Strecken AB und AH sind, ist die Strecke $C'D$ Mittelparallele im Dreieck BAH und mithin parallel zu BH. Also ist $\measuredangle AC'D = \measuredangle ABH = \measuredangle ABH_b = 90° - \measuredangle BAH_b = 90° - \measuredangle BAC$. Andererseits haben wir $C'A' \parallel CA$ und damit $\measuredangle BC'A' = \measuredangle BAC$; also ist

$$\measuredangle DC'A' = 180° - \measuredangle AC'D - \measuredangle BC'A' = 180° - (90° - \measuredangle BAC) - \measuredangle BAC = 180° - 90° = 90°.$$

Analog ist $\measuredangle DB'A' = 90°$. Außerdem ist $\measuredangle DH_aA' = 90°$ (trivial). Also liegen die Punkte C', B' und H_a auf dem Thaleskreis über der Strecke DA'. In anderen Worten: Die Punkte H_a und D liegen auf dem Kreis durch die Punkte A', B' und C'. Doch genauso läßt sich zeigen, daß die Punkte H_b und E ebenfalls auf diesem Kreis liegen, und gleichfalls die Punkte H_c und F. Also liegen alle neun Punkte A', B', C', H_a, H_b, H_c, D, E und F auf einem Kreis, was zu beweisen war. [Im Fall, wenn ΔABC stumpfwinklig ist, muß dieser Beweis leicht geändert werden (wie fast jeder Beweis, der mit Winkeln arbeitet).]

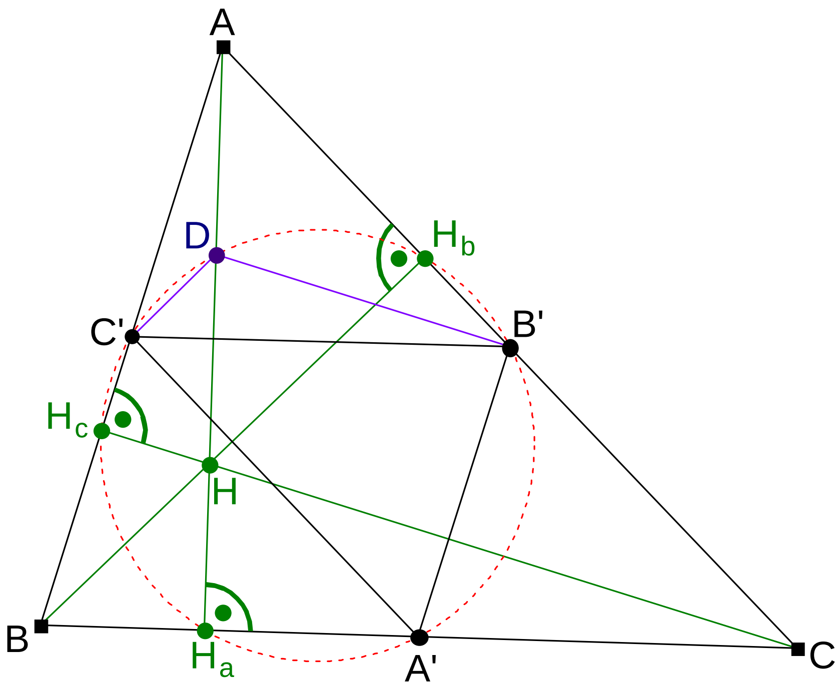

Fig. 12a

Weitere Eigenschaften des Feuerbachkreises sind leicht zu beweisen: Der Radius des Feuerbachkreises eines Dreiecks ist halb so groß wie der Radius des Umkreises. Der Mittelpunkt des Feuerbachkreises ist der Mittelpunkt der Strecke HU, wobei H der Höhenschnittpunkt und U der Umkreismittelpunkt des Dreiecks sind.

§14. Der Satz von Feuerbach

Der Feuerbachkreis hat eine ganz besondere Eigenschaft, weshalb er Feuerbachkreis heißt, und zwar ist diese Eigenschaft ein Satz von Karl Feuerbach:

Satz von Feuerbach: Der Feuerbachkreis des Dreiecks berührt den Inkreis und die drei Ankreise.

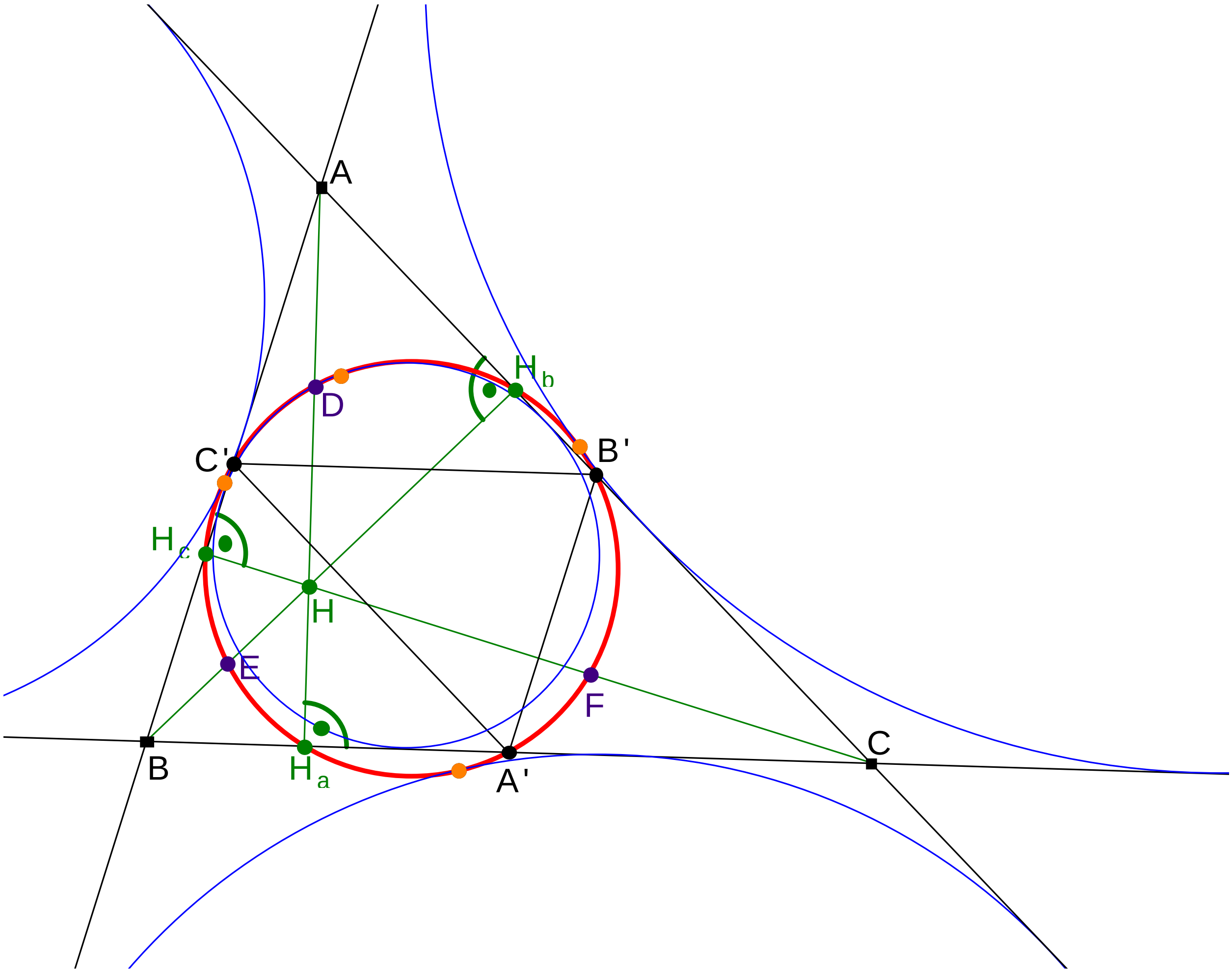

Fig. 13

Ein schöner und sehr schwieriger Satz. Siehe auch [1] und [2].

§15. Der Gergonnepunkt

Mit dem Satz von Feuerbach sind wir wieder beim Inkreis des Dreiecks angekommen. Der Inkreis des Dreiecks *ABC* berühre die Seiten *BC*, *CA* und *AB* in den Punkten *X*, *Y* und *Z* (natürlich in dieser Reihenfolge: d. h. er berühre *BC* in *X*, *CA* in *Y* und *AB* in *Z*). Eine Zeichnung mit einem dynamischen Geometrieprogramm gibt einige Ideen: Die Geraden *AX*, *BY* und *CZ* schneiden sich doch in einem Punkt, oder ist es nur eine Täuschung? Vielleicht begrenzen sie ein sehr kleines Dreieck? Oder findet man so einfach merkwürdige Punkte?

Ja, stellt sich heraus, die Geraden *AX*, *BY* und *CZ* schneiden sich tatsächlich in einem Punkt. Dieser Punkt heißt der *Gergonnepunkt* des Dreiecks *ABC* und ist ein ziemlich wenig bekannter merkwürdiger Dreieckspunkt.

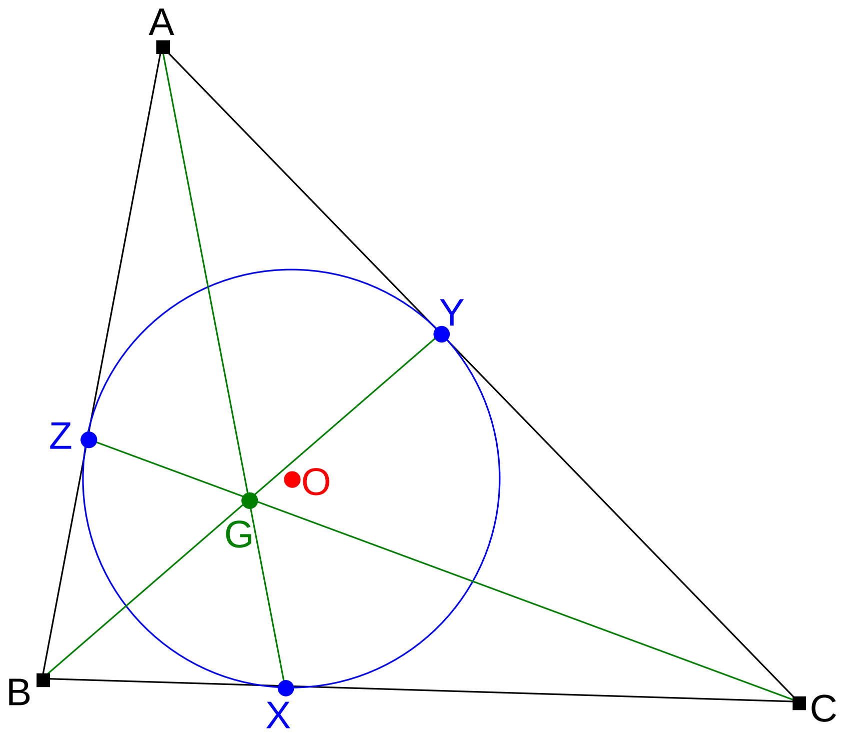

Fig. 14

Beweise, daß sich die Geraden AX, BY und CZ in einem Punkt schneiden, findet man in [1], [2], [4] und [5].

§16. Die Geraden AX, BY und CZ

Untersuchen wir weiter die Geraden AX, BY und CZ. Es gilt der folgende Satz ([4], Exercise 1.2):

Satz: Für den Berührpunkt X des Inkreises mit BC gilt: Die Inkreise der Dreiecke ABX und ACX berühren einander.

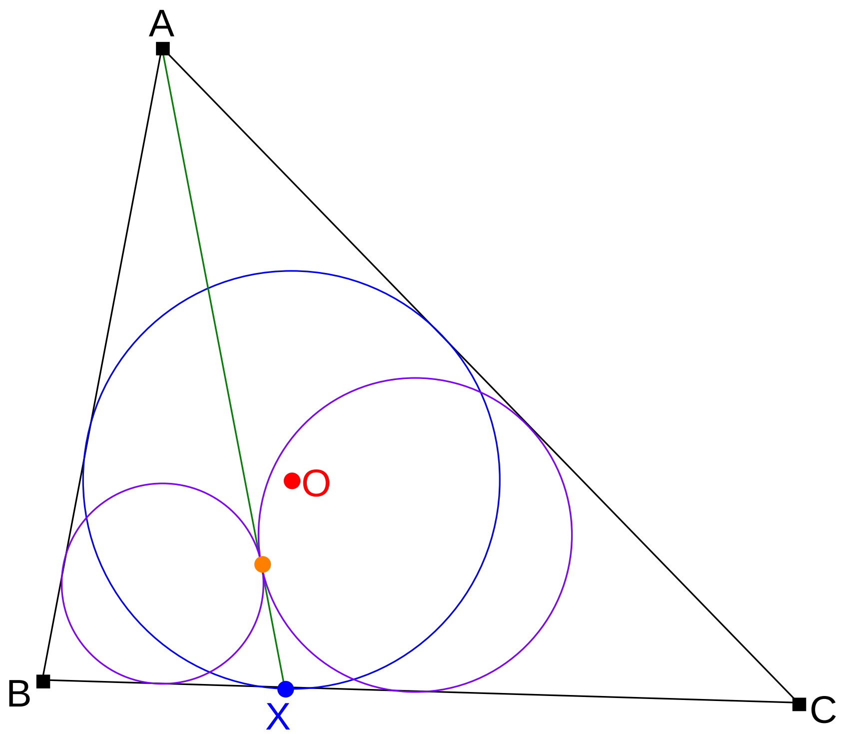

Fig. 15

Beweis: Der Inkreis des ΔABX berühre BX in K, AB in L und AX in M. Der Inkreis des ΔACX

berühre CX in N, CA in P und AX in Q. Wir werden zunächst beweisen, daß die Punkte M und Q zusammenfallen.

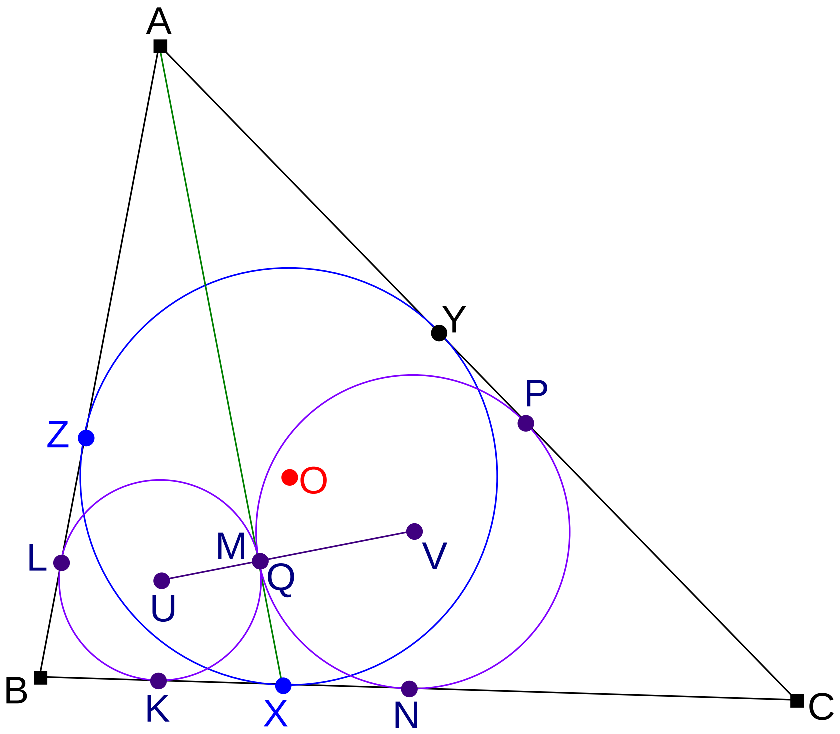

Fig. 16

Wir erinnern uns erstmals an den folgenden Satz: Zeichnet man die Tangenten von einem Punkt an einen Kreis, dann sind die beiden Tangentenabschnitte (Abschnitte vom Punkt zum Berührpunkt mit dem Kreis) gleich lang. Wir werden diesen Satz als *Tangentengleichheitssatz* (kurz *TGS*) bezeichnen.

Nach dem TGS gilt: $XK = XM$, $AM = AL$ und $BL = BK$. Daher haben wir

$$XK = XM = AX - AM = AX - AL = AX - (AB - BL) = AX - AB + BL$$
$$= AX - AB + BK = AX - AB + (BX - XK) = AX - AB + BX - XK,$$

und damit

$$2 \bullet XK = AX - AB + BX.$$

Analog beweist man

$$2 \bullet XN = AX - AC + CX.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} & 2 \bullet XK - 2 \bullet XN \\ = & (AX - AB + BX) - (AX - AC + CX) \\ = & (-AB + BX) - (-AC + CX) \\ = & (AC - CX) - (AB - BX) \\ = & (AC - CY) - (AB - BZ) \qquad \text{(denn } CX = CY \text{ und } BX = BZ \text{ nach dem TGS)} \\ = & AY - AZ \\ = & 0 \qquad \text{(denn } AY = AZ \text{ nach dem TGS).} \end{aligned}$$

Also ist $2 \bullet XK = 2 \bullet XN$, und damit $XK = XN$. Nach dem TGS gilt aber $XK = XM$ und $XN = XQ$.

Folglich ist $XM = XQ$. Also müssen die (auf der Strecke AX liegenden) Punkte M und Q übereinstimmen.

Das bedeutet, daß die Inkreise der Dreiecke ABX und ACX die Strecke AX in demselben Punkt berühren. Daraus folgt aber sehr leicht, daß diese beiden Inkreise einander berühren: Sind U und V die Mittelpunkte der zwei Kreise, dann ist $UM \perp AX$ und $VQ \perp AX$ (denn ein Berührradius ist stets orthogonal zur Tangente). Wegen $M = Q$ ist also $UM \perp AX$ und $VM \perp AX$, und die Punkte U, M und V liegen daher auf einer Geraden, d. h. der Punkt M liegt auf der Gerade durch die Mittelpunkte U und V der beiden Kreise. Da der Punkt M aber auch auf den beiden Kreisen liegt, berühren sie sich, was zu beweisen war.

Analog beweist man, daß die Inkreise der Dreiecke BCY und BAY einander berühren, und daß die Inkreise der Dreiecke CAZ und CBZ einander berühren.

§17. Ein weiterer Satz

Ein anderer Satz über diese Konfiguration ist wahrscheinlich neu:

Satz: Die Senkrechte zu AB durch A schneide BO in M. Die Senkrechte zu AC durch A schneide CO in N. Dann ist $MN \perp AX$.

Ich kenne nur einen ziemlich langen Beweis dieses Satzes.

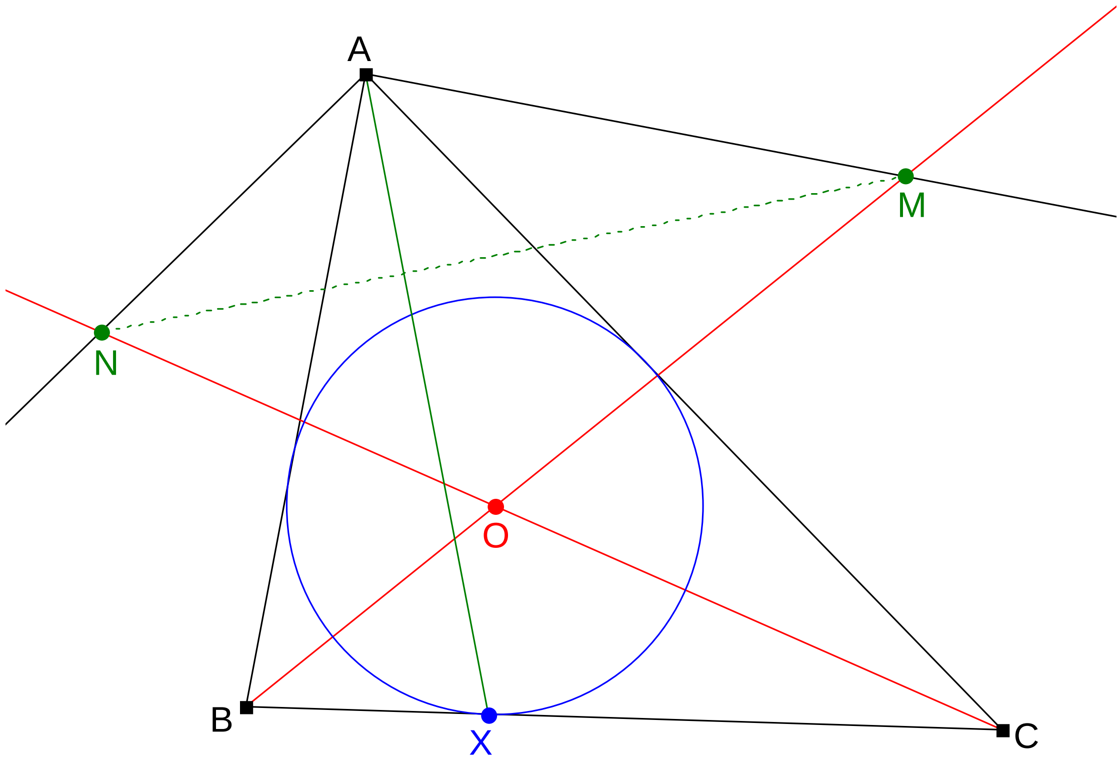

Fig. 17

§18. Über Spiegelbilder von Seitenhalbierenden, Höhen usw.

Merkwürdige Punkte eines Dreiecks sind meist dort, wo sich drei bestimmte Geraden in einem Punkt schneiden. Drei solche Geraden sind die Seitenhalbierenden, drei solche Geraden sind die Winkelhalbierenden, drei solche Geraden sind die Höhen, und drei solche Geraden sind die Mittelsenkrechten. Was passiert eigentlich, wenn man die Seitenhalbierenden an den (entsprechenden) Winkelhalbierenden spiegelt - schneiden sich die drei entstandenen Geraden in einem Punkt oder nicht? Wenn man die Winkelhalbierenden an den Seitenhalbierenden spiegelt? Wenn man die Höhen an den Seitenhalbierenden spiegelt? Man hat $4 \bullet 3 = 12$ Möglichkeiten, ein Geradentripel aus den vier Geradentripeln an einem anderen Geradentripel zu spiegeln, und zu schauen, ob sich die entstandenen Geraden in einem Punkt schneiden.

Mithilfe von dynamischer Geometriesoftware fand ich folgende Ergebnisse:

Wenn man die ...	**an den** ... **spiegelt**, **schneiden sich die Spiegelbilder**	**dann in einem Punkt**?
Seitenhalbierenden	Winkelhalbierenden	*ja*
Seitenhalbierenden	Höhen	*nein*
Seitenhalbierenden	Mittelsenkrechten	*nein*
Winkelhalbierenden	Seitenhalbierenden	*nein*
Winkelhalbierenden	Höhen	*nein*
Winkelhalbierenden	Mittelsenkrechten	*nein*
Höhen	Seitenhalbierenden	*nein*
Höhen	Winkelhalbierenden	*ja*
Höhen	Mittelsenkrechten	*ja*
Mittelsenkrechten	Seitenhalbierenden	*nein*
Mittelsenkrechten	Winkelhalbierenden	*nein*
Mittelsenkrechten	Höhen	*ja*

Bemerkung: Ein "ja" bedeutet, daß sich die Geraden *immer* in einem Punkt schneiden. Ein "nein" bedeutet, daß sich die Geraden *nicht für jedes* Dreieck in einem Punkt schneiden. So schneiden sich die Spiegelbilder der Seitenhalbierenden an den Höhen für ein gleichseitiges Dreieck offensichtlich in einem Punkt; bei einem "allgemeinen" Dreieck tun sie es aber nicht.

Wir sehen also genau vier Fälle, bei denen sich die entstandenen Geraden für jedes Dreieck in einem Punkt schneiden. Wir werden diese Fälle in den folgenden Paragraphen einzeln betrachten.

§19. Der Lemoinepunkt

Betrachten wir die Seitenhalbierenden und die Winkelhalbierenden eines Dreiecks ABC. Jede Seitenhalbierende werde an der entsprechenden Winkelhalbierenden gespiegelt (d. h. die Seitenhalbierende durch A an der Winkelhalbierenden durch A, usw.). Dann schneiden sich die entstandenen Geraden in einem Punkt; dieser Punkt heißt der *Lemoinepunkt* des Dreiecks ABC und wird gewöhnlich mit L bezeichnet (Fig. 18).

Bemerkungen: Das Spiegelbild einer Seitenhalbierenden an der entsprechenden Winkelhalbierenden wird oft als *Symmediane* bezeichnet. Dann ist L der Schnittpunkt der drei Symmedianen; deshalb wird L auch öfters *Symmedianpunkt* oder *Symmedianenpunkt* des Dreiecks ABC genannt.

Der Beweis, daß sich die drei Symmedianen tatsächlich in einem Punkt schneiden, ist einfach, wenn der Satz von Ceva bekannt ist (siehe z. B. [1] und [4]).

An der Zeichnung Fig. 18 könnte man vermuten, daß der Schwerpunkt S, der Inkreismittelpunkt O und der Lemoinepunkt L auf einer Geraden liegen. Eine größere Figur widerlegt dies aber.

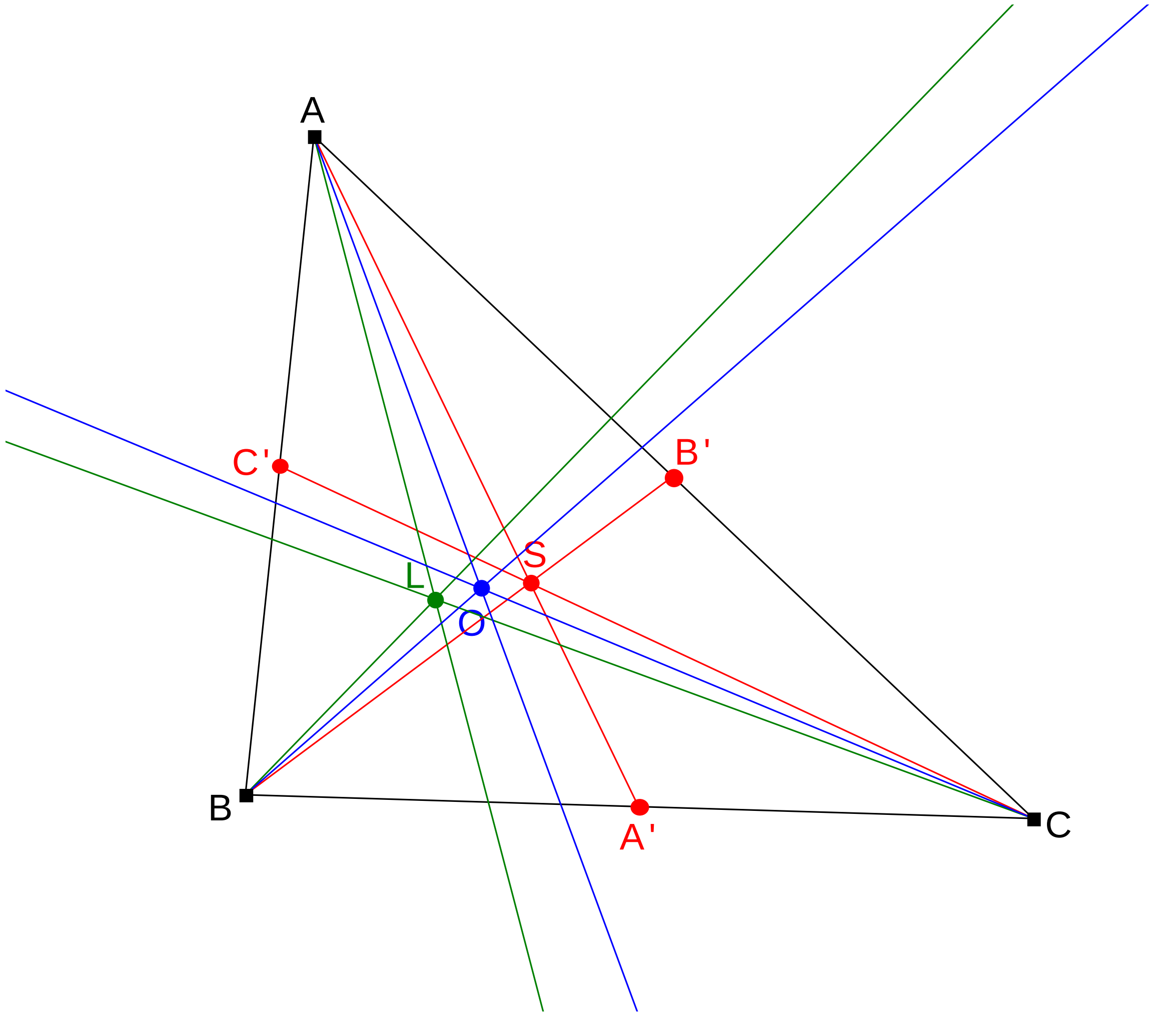

Fig. 18

Der Lemoinepunkt ist ein sehr merkwürdiger Punkt, obwohl er keiner der vier kanonischen Punkte ist, und hat eine Unmenge Eigenschaften (siehe etwa [1] und [4]). Nur zwei davon: Fällt man von dem Lemoinepunkt L aus Lote auf die Dreiecksseiten BC, CA und AB, und bezeichnet die Fußpunkte dieser Lote mit X_L, Y_L und Z_L (in dieser Reihenfolge), dann ist L der Schwerpunkt des Dreiecks $X_L Y_L Z_L$, und es gilt

$$LX_L : LY_L : LZ_L = a : b : c.$$

Bemerkung: Dies ist eine Verhältnisgleichung. Sie bedeutet nicht "LX_L geteilt durch LY_L und dann geteilt durch LZ_L ist gleich a geteilt durch b und dann geteilt durch c", und kann deshalb auch nicht zu $LX_L : (LY_L \bullet LZ_L) = a : (b \bullet c)$ vereinfacht werden, sondern sie ist zu verstehen im Sinne von "$LX_L : LY_L = a : b$ und $LY_L : LZ_L = b : c$". D. h. die Strecken LX_L, LY_L und LZ_L verhalten sich wie a, b und c.

In Worten ausgedrückt: Die Abstände des Lemoinepunktes von den Dreiecksseiten verhalten sich wie diese Seiten selber.

Wir werden noch eine weitere Eigenschaft des Lemoinepunktes in §24 finden.

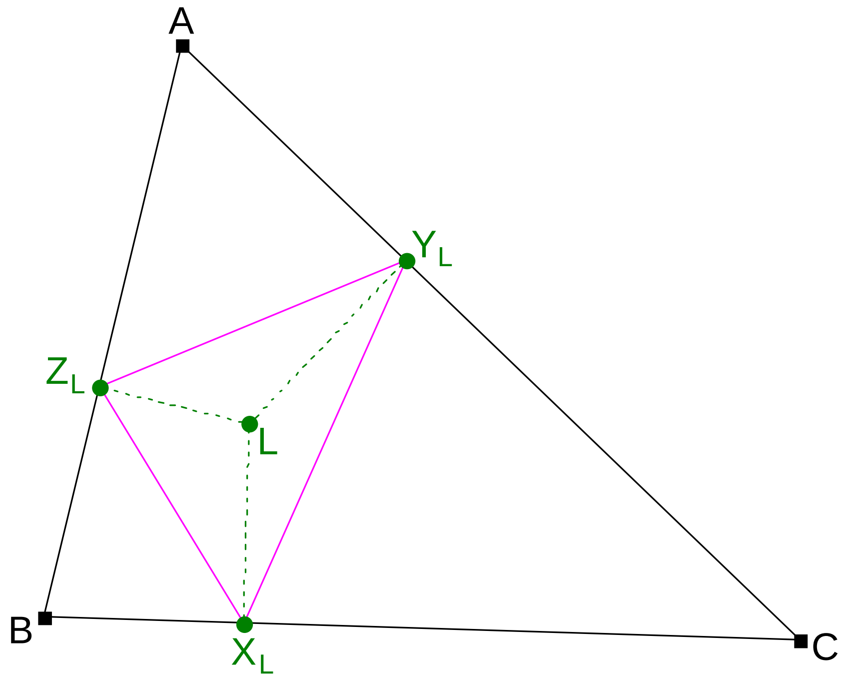

Fig. 19

§20. Die Spiegelbilder der Höhen an den Winkelhalbierenden

Betrachten wir jetzt die Spiegelbilder der Höhen an den entsprechenden Winkelhalbierenden. Wo schneiden sie sich? Schon wieder in einem neuen merkwürdigen Punkt?

Nein, stellen wir fest, sie schneiden sich in dem Umkreismittelpunkt des Dreiecks. Der Beweis ist nicht sehr schwer. Formulieren wir erstmals den Satz mit allen Bezeichnungen:

Satz: Sei ABC ein Dreieck, und seien AH_a, BH_b und CH_c seine Höhen - wobei H_a, H_b und H_c die jeweiligen Fußpunkte sind -, sei H sein Höhenschnittpunkt und U sein Umkreismittelpunkt. Dann schneiden sich die Spiegelbilder der Höhen an den entsprechenden Winkelhalbierenden in U.

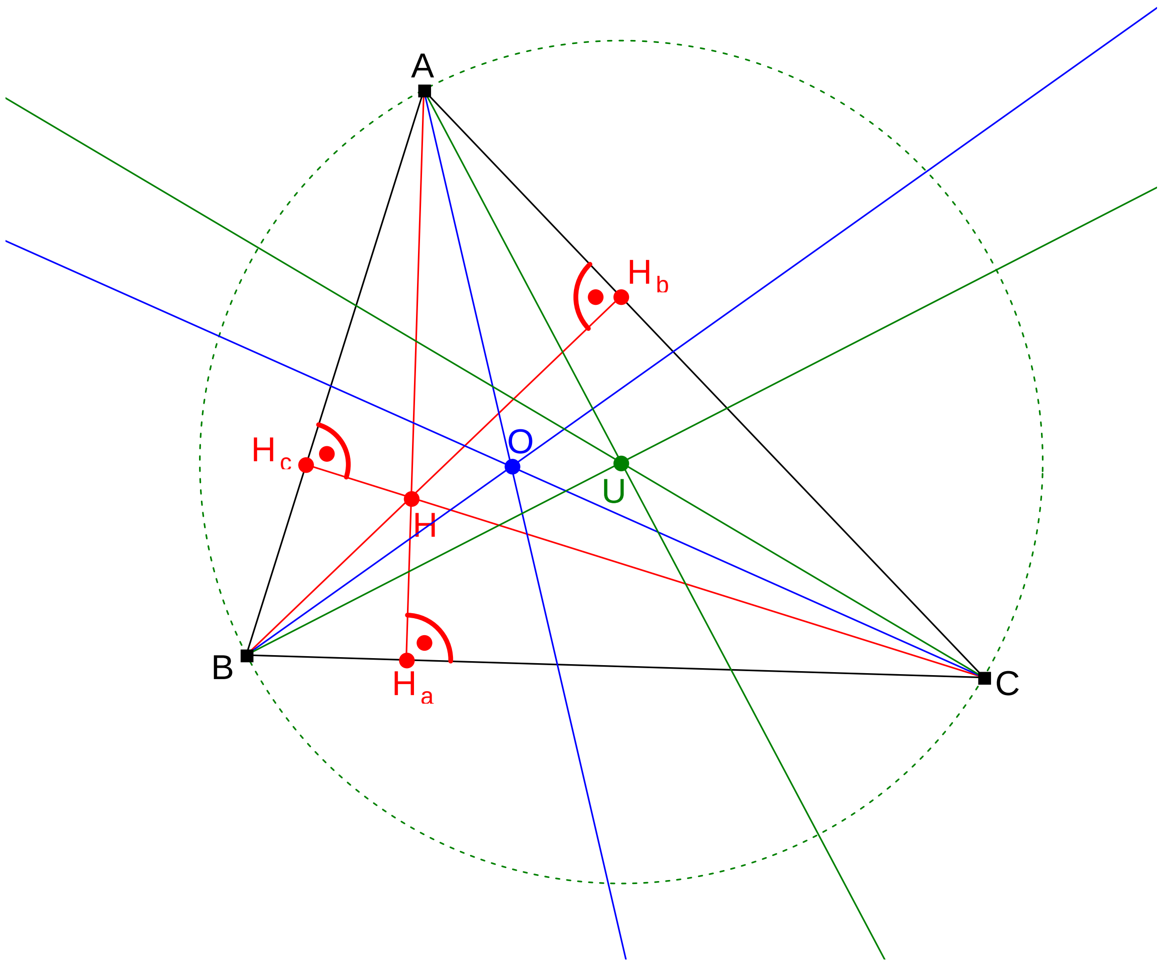

Fig. 20

Beweis: Wir arbeiten für den Fall eines spitzwinkligen Dreiecks ABC; ansonsten geht der Beweis analog, wobei einige Winkel Vorzeichen ändern usw..

Wir wollen zeigen, daß das Spiegelbild der Höhe AH an der Winkelhalbierenden AO durch den Punkt U geht. Dazu müssen wir beweisen, daß $\measuredangle HAO = \measuredangle OAU$ ist, wobei O der Inkreismittelpunkt des ΔABC (und damit der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden) ist.

Nach dem Mittelpunktswinkelsatz ist $\measuredangle CUA = 2 \bullet \measuredangle CBA$ (denn $\measuredangle CUA$ ist der Mittelpunktswinkel der Sehne CA in dem Umkreis, und $\measuredangle CBA$ ist ihr Umfangswinkel). Wir haben also $\measuredangle CUA = 2\beta$. Da (wegen $UC = UA$) das Dreieck CUA gleichschenklig ist, gilt

$$\measuredangle UAC = \frac{180° - \measuredangle CUA}{2} = \frac{180° - 2\beta}{2} = 90° - \beta.$$

Andererseits ist $\measuredangle BAH = \measuredangle BAH_a = 90° - \measuredangle H_aBA = 90° - \beta$. Wir haben damit $\measuredangle BAH = \measuredangle UAC$. Aber es ist $\measuredangle BAO = \measuredangle OAC$ (Winkelhalbierende!). Folglich ist

$$\measuredangle HAO = \measuredangle BAO - \measuredangle BAH = \measuredangle OAC - \measuredangle UAC = \measuredangle OAU.$$

Daher geht das Spiegelbild der Höhe AH an der Winkelhalbierenden AO durch U. Analog gehen die beiden anderen Spiegelbilder jeweils einer Höhe an der entsprechenden Winkelhalbierenden durch U, was zu beweisen war.

§21. Isogonale Punkte

In §19 und §20 haben wir festgestellt, daß (§19) die Spiegelbilder der Seitenhalbierenden an den Winkelhalbierenden sich in einem Punkt schneiden, und daß (§20) die Spiegelbilder der Höhen an den Winkelhalbierenden sich in einem Punkt schneiden. Dies ist kein Zufall, denn es gilt der folgende allgemeine Satz (Fig. 21):

Satz vom isogonalen Punkt: Sei ABC ein Dreieck und P ein beliebiger Punkt (der mit keiner der Dreiecksecken zusammenfällt). Die Geraden AP, BP und CP werden an den entsprechenden Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC gespiegelt. Dann schneiden sich die entstandenen Geraden in einem Punkt.

Dieser Punkt - nennen wir ihn Q - heißt *zu P isogonal konjugiert in bezug auf das Dreieck ABC*. Statt "isogonal konjugiert" sagt man meist kurz "isogonal". Der Punkt Q heißt zu P isogonal; der Punkt P ist dann zu Q isogonal (denn die Spiegelbilder der Geraden AQ, BQ und CQ an den Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC sind wieder die Geraden AP, BP und CP). Man sagt, die Punkte P und Q seien *zueinander isogonal*.

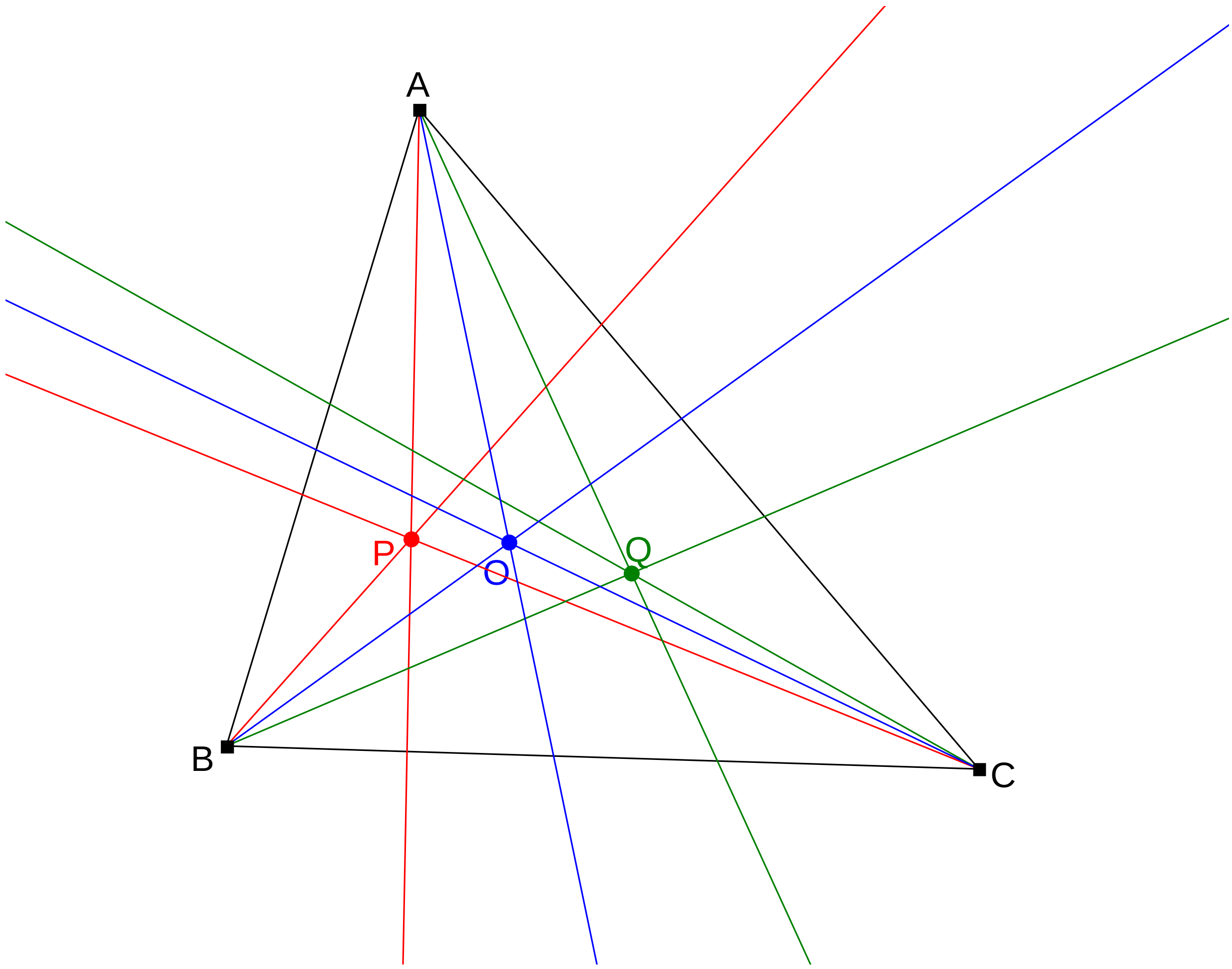

Fig. 21

Ist P der Schwerpunkt des ΔABC, dann sind AP, BP und CP die Seitenhalbierenden, und Q ist der Lemoinepunkt. Also sind der Schwerpunkt und der Lemoinepunkt zueinander isogonal.

Ist P der Höhenschnittpunkt des ΔABC, dann sind AP, BP und CP die Höhen, und Q ist (wie wir in §20 gesehen haben) der Umkreismittelpunkt. Also sind der Höhenschnittpunkt und der Umkreismittelpunkt zueinander isogonal.

Ist P der Inkreismittelpunkt des ΔABC, dann sind AP, BP und CP die Winkelhalbierenden, und sie werden an sich selbst gespiegelt, und Q ist dann auch der Inkreismittelpunkt. Das heißt: Der Inkreismittelpunkt ist zu sich selbst isogonal.

Der Satz vom isogonalen Punkt wurde in [4] und [8] bewiesen.

§22. **Spiegelbilder bei Höhen und Mittelsenkrechten**

Jetzt kommen wir zu den restlichen zwei Fällen, wo sich Spiegelbilder in einem Punkt schneiden. Es geht um die Spiegelbilder der Höhen an den Mittelsenkrechten und um die Spiegelbilder der Mittelsenkrechten an den Höhen.

Fig. 22 zeigt die Spiegelbilder der Höhen an den entsprechenden Mittelsenkrechten. Diese Spiegelbilder schneiden sich in einem Punkt, und zwar ist dieser Punkt selber das Spiegelbild des

Höhenschnittpunktes am Mittelsenkrechten-Schnittpunkt (d. h. am Umkreismittelpunkt).

[Dies ist nicht offensichtlich! Die Spiegelbilder der Höhen an den Winkelhalbierenden schneiden sich in einem Punkt, aber dieser Punkt (der Umkreismittelpunkt, wie wir in §20 gesehen haben) ist nicht das Spiegelbild des Höhenschnittpunktes am Winkelhalbierenden-Schnittpunkt.]

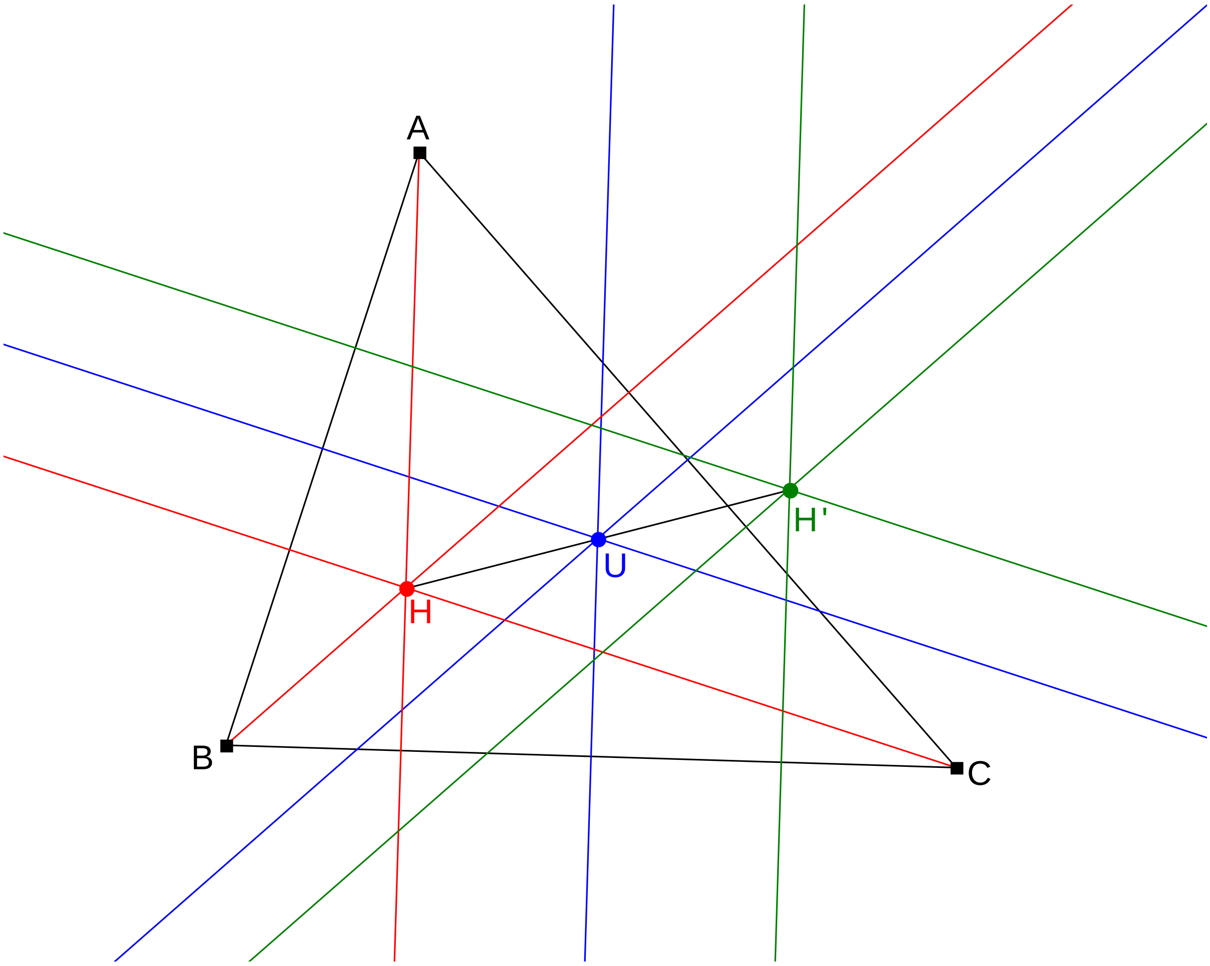

Fig. 22

Fig. 23 zeigt die Spiegelbilder der Mittelsenkrechten an den entsprechenden Höhen. Sie schneiden sich auch in einem Punkt, und zwar im Spiegelbild des Mittelsenkrechten-Schnittpunktes (d. h. des Umkreismittelpunktes) am Höhenschnittpunkt.

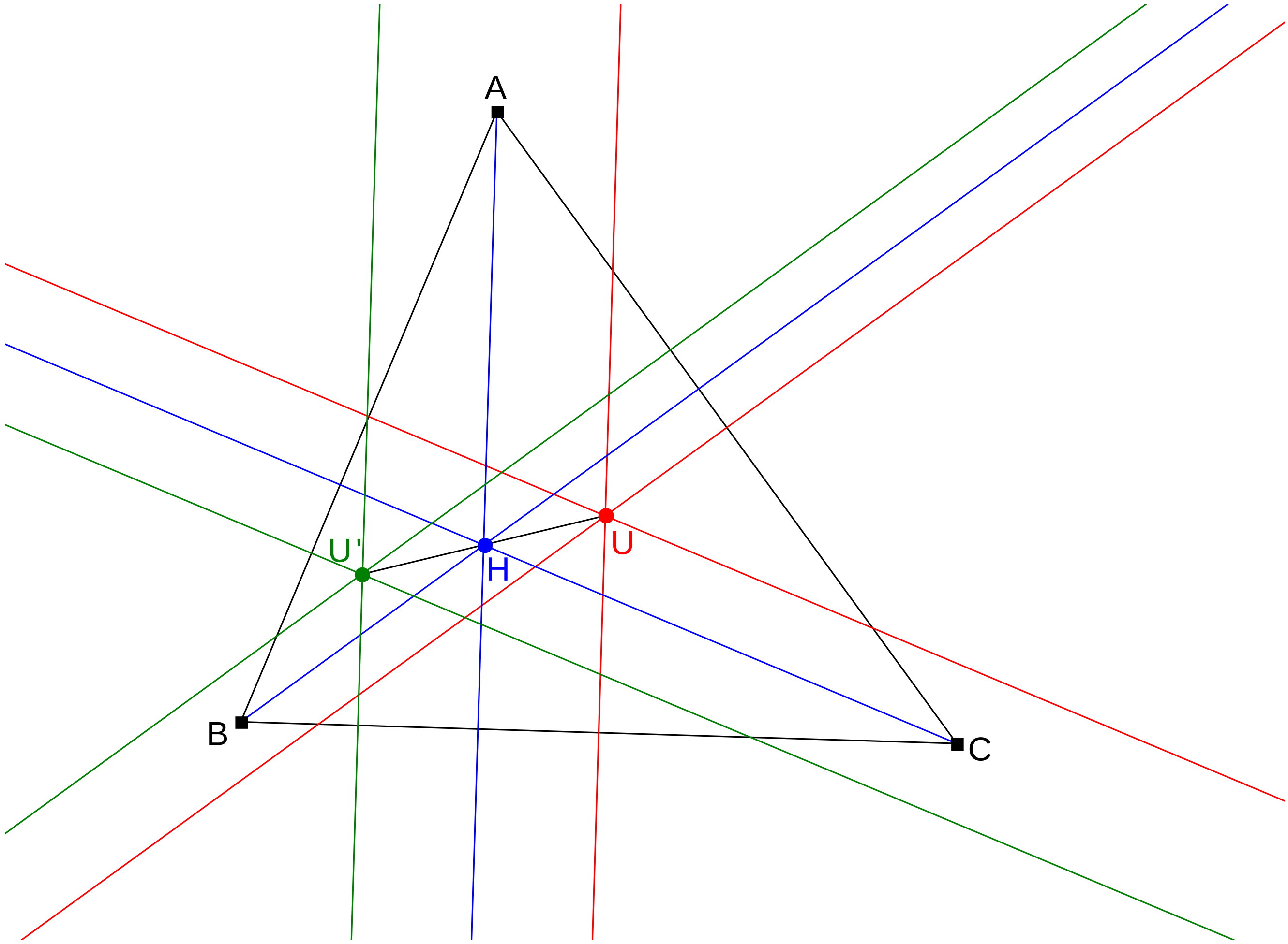

Fig. 23

Diese beiden Eigenschaften können sehr einfach erklärt werden. Nämlich sind je eine Mittelsenkrechte und die entsprechende Höhe parallel (denn beide sind orthogonal zu einer Dreiecksseite). Spiegelt man nun drei Geraden, die sich in einem Punkt *P* schneiden, an drei jeweils zu ihnen parallelen Geraden, die sich in einem anderen Punkt *Q* schneiden, dann schneiden sich die Spiegelbilder in dem Spiegelbild von *P* an *Q*.

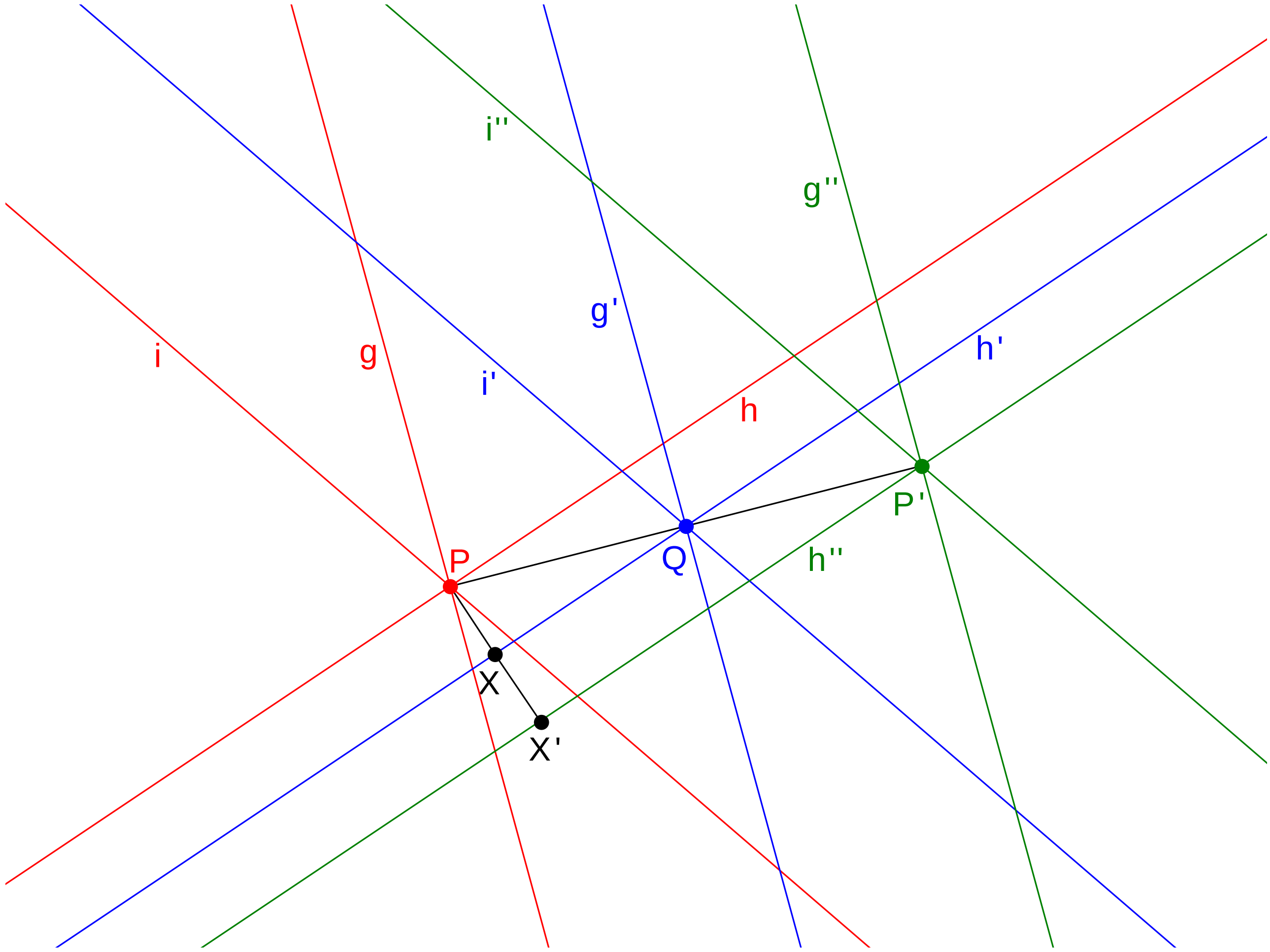

Fig. 24

Beweis (Fig. 24): Seien g, h und i die drei Geraden durch P, seien g', h' und i' die jeweils zu ihnen parallelen Geraden durch Q, und seien g'', h'' und i'' die Spiegelbilder von g an g', von h an h' und von i an i'.

Sei P' das Spiegelbild von P an Q. Wir wollen zeigen, daß die Geraden g'', h'' und i'' sich in P' schneiden. Ist X' das Spiegelbild von P an h', und X der Fußpunkt des Lotes von P auf h', dann liegt X' auf der Geraden PX, und $PX' = 2 \bullet PX$, also $PX' : PX = 2$. Da P auf h liegt, liegt das Spiegelbild von P an h' auf dem Spiegelbild von h an h', d. h. der Punkt X' liegt auf der Geraden h''. Da P' das Spiegelbild von P an Q ist, hat man $PP' = 2 \bullet PQ$, also $PP' : PQ = 2$. Zusammen mit $PX' : PX = 2$ folgt aus dem Strahlensatz $P'X' \parallel QX$. Da aber QX die Gerade h' ist, ist $P'X' \parallel h'$. Da aber X' auf der Geraden h'' liegt, und da diese Gerade h'' parallel zu h' ist (das Spiegelbild einer Gerade an einer zu ihr parallelen Gerade ist eine weitere zu ihr parallele Gerade), liegt P' auf der Geraden h''. Analog zeigt man, daß P' auf den Geraden g'' und i'' liegt, was zu beweisen war.

(Ich suche nach einem einfacheren Beweis, wahrscheinlich durch elementare Abbildungsgeometrie.)

§23. Das Antimedialdreieck und das Tangentendreieck

Ein Dreieck kann auf drei verschiedene Weisen ”zum Parallelogramm ergänzt” werden. Man braucht nur die Parallele zu einer Seite durch die gegenüberliegende Ecke und die Parallele zu einer anderen Seite durch die gegenüberliegende Ecke miteinander zu schneiden; der Schnittpunkt ist dann die vierte Ecke des gewünschten Parallelogramms.

Wir bezeichnen mit X den Schnittpunkt der Parallele zu CA durch B und der Parallele zu AB durch C. Analog sei Y der Schnittpunkt der Parallele zu AB durch C und der Parallele zu BC durch A, und sei Z der Schnittpunkt der Parallele zu BC durch A und der Parallele zu CA durch B.

Das so entstandene Dreieck XYZ heißt dann das **Antimedialdreieck** des Dreiecks ABC. Wir haben drei Parallelogramme vorliegen, nämlich die Parallelogramme $ABXC$, $BCYA$ und $CAZB$. Aus diesen Parallelogrammen folgt unter anderem $AB = CX$ und $AB = CY$; also ist $CX = CY$, und C ist der Mittelpunkt der Strecke XY. Entsprechend zeigt man, daß A der Mittelpunkt der Strecke YZ und B der Mittelpunkt der Strecke ZX ist. Die Ecken des Dreiecks ABC sind also die Mittelpunkte der Seiten seines Antimedialdreiecks.

Aus dem Parallelogramm $BCYA$ folgt aber auch, daß sich die Strecken CA und BY gegenseitig halbieren. Das heißt: Die Strecke BY geht durch den Mittelpunkt von CA; also fällt die Gerade BY zusammen mit der von B ausgehenden Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC. Analog ist die Gerade AX die von A ausgehende Seitenhalbierende des Dreiecks ABC, und die Gerade CZ die von C ausgehende Seitenhalbierende des Dreiecks ABC.

Dies waren alles mehr oder weniger bekannte und teils triviale Eigenschaften des Antimedialdreiecks. Seinen Namen hat dieses Dreieck übrigens daher, daß das Dreieck ABC das Mittendreieck des Antimedialdreiecks ist (denn A, B und C sind die Mittelpunkte der Strecken YZ, ZX und XY), und ”Medialdreieck” ist ein Synonym für ”Mittendreieck”.

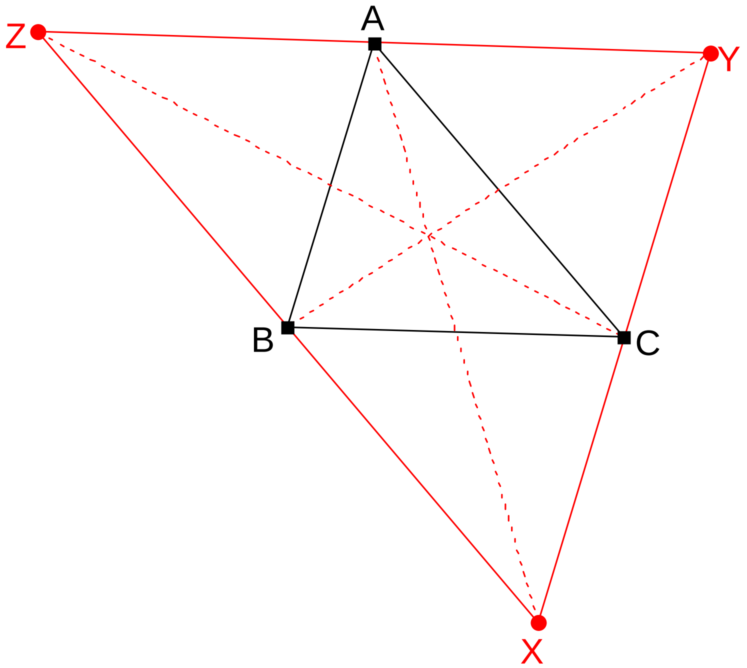

Fig. 25

Diesem Antimedialdreieck stellen wir ein anderes Dreieck gegenüber. Und zwar betrachten wir den Umkreis des Dreiecks ABC und die Tangenten an diesen Umkreis in den Ecken A, B und C. Die Tangenten in B und in C schneiden sich in X'; die Tangenten in C und in A schneiden sich in Y'; die Tangenten in A und in B schneiden sich in Z'.

Das somit erhaltene Dreieck $X'Y'Z'$ heißt **Tangentendreieck** des Dreiecks ABC. Eine Eigenschaft, die wir sofort sehen, ist, daß der Umkreis des Dreiecks ABC der Inkreis des Tangentendreiecks $X'Y'Z'$ ist; es ist aber Vorsicht angeraten, denn dies gilt nur für spitzwinklige Dreiecke ABC. Für rechtwinklige Dreiecke ABC existiert das Tangentendreieck ”nicht ganz” (zwei Tangenten sind parallel), und für stumpfwinklige Dreiecke ABC ist der Umkreis des ΔABC ein Ankreis des Tangentendreiecks.

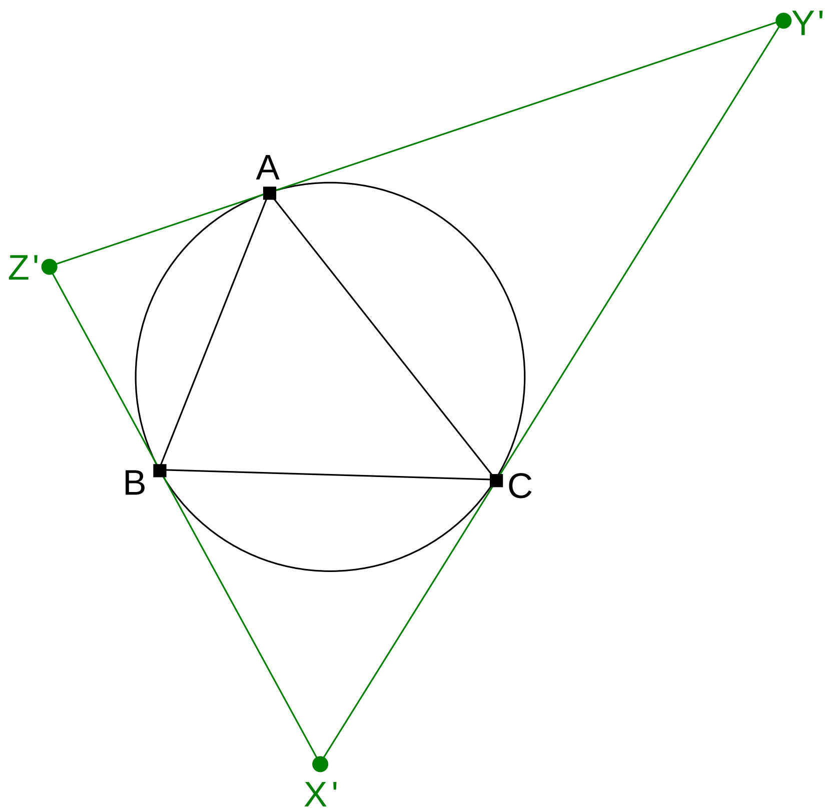

Fig. 26

Schneiden sich die Geraden AX', BY' und CZ' in einem Punkt?

Ist das Dreieck ABC spitzwinklig, dann ist der Umkreis des ΔABC der Inkreis des $\Delta X'Y'Z'$. Wenden wir das Ergebnis von §15 auf das Dreieck $X'Y'Z'$ an, dann erhalten wir, daß sich die Geraden AX', BY' und CZ' in dem Gergonnepunkt des Dreiecks $X'Y'Z'$ schneiden. Wir können damit schreiben:

Satz: Ist $\Delta X'Y'Z'$ das Tangentendreieck eines spitzwinkligen Dreiecks ABC, dann schneiden sich die Geraden AX', BY' und CZ' in einem Punkt, und zwar im Gergonnepunkt des Dreiecks $X'Y'Z'$.

Ist das Dreieck ABC stumpfwinklig, dann muß der Beweis an einigen Orten geändert werden. Es wird dann ein zu dem Gergonnepunkt analoger Punkt für einen Ankreis gebraucht. Jedesmal ergibt sich, daß sich die Geraden AX', BY' und CZ' in einem Punkt schneiden (Fig. 27).

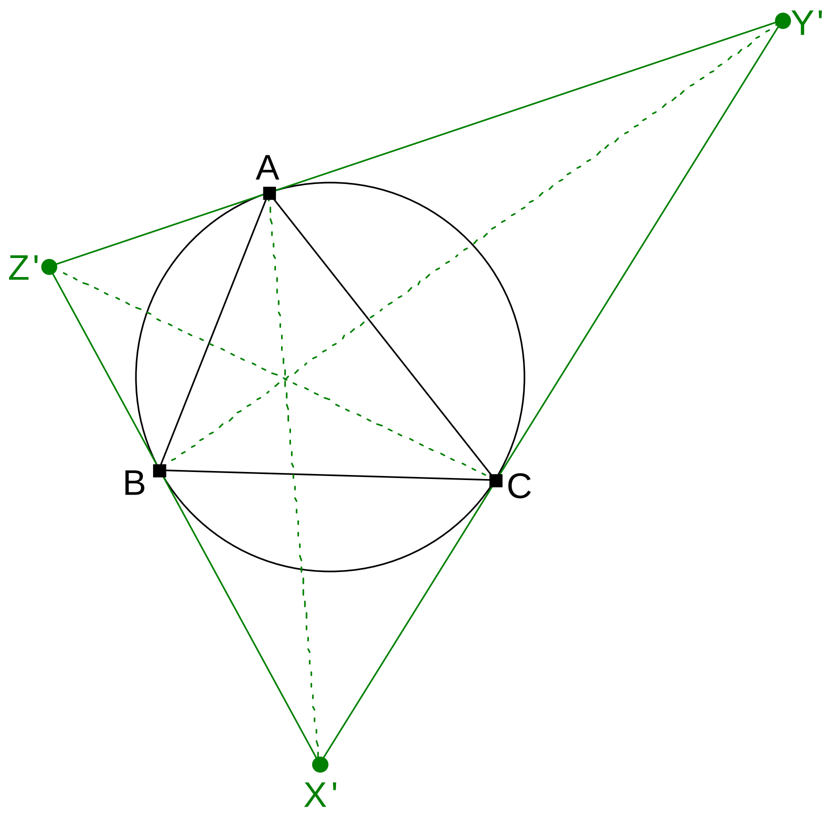

Fig. 27

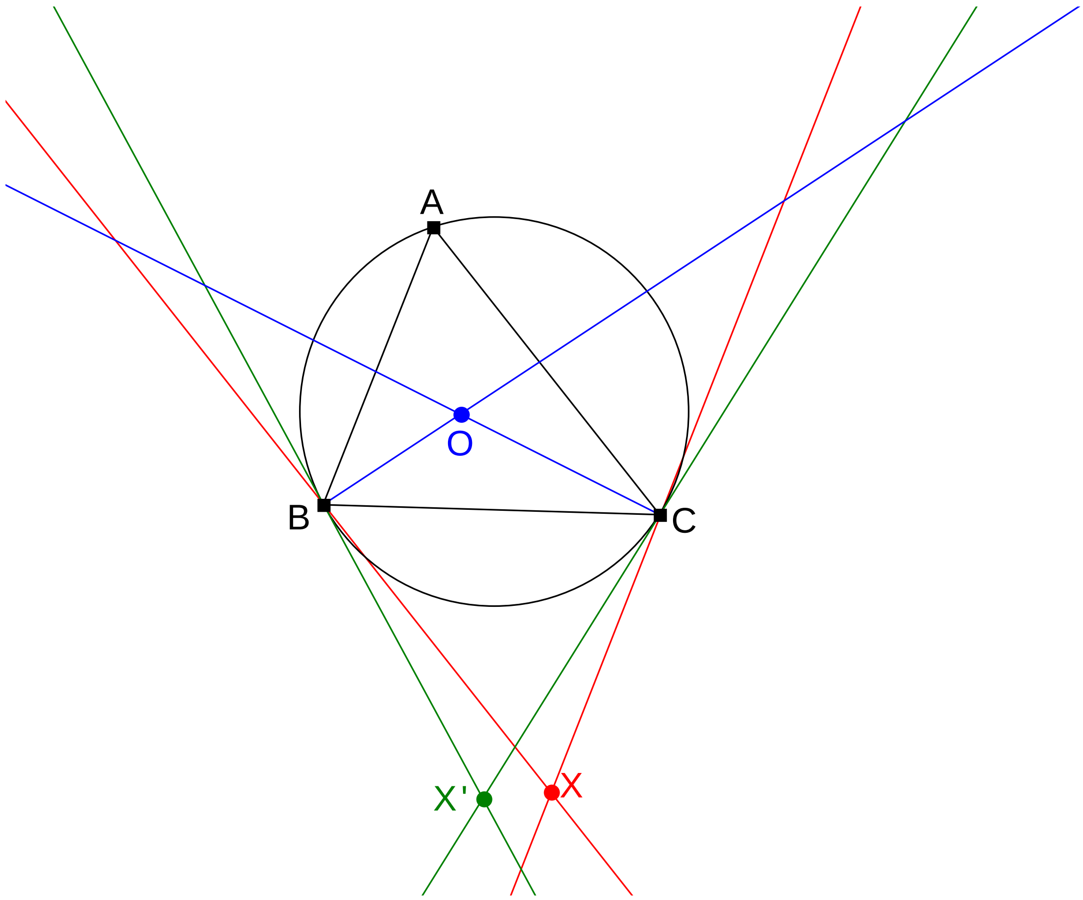

Fig. 28

Jetzt betrachten wir eine Ecke des Antimedialdreiecks - beispielsweise *X* - und die entsprechende Ecke des Tangentendreiecks - also X'.

Uns interessieren außerdem die von B und von C ausgehenden Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC; sie schneiden sich (bekanntlich) in dem Inkreismittelpunkt O des ΔABC. Wir betrachten jetzt den Fall eines spitzwinkligen Dreiecks ABC (Fig. 28).

Als Winkel an Parallelen (Wechselwinkel) gilt $\measuredangle CBX = \measuredangle ACB$, also $\measuredangle CBX = \gamma$. Andererseits ist der Winkel $\measuredangle CBX'$ als Sehnentangentenwinkel gleich $\measuredangle CAB$, d. h. $\measuredangle CBX' = \alpha$. Damit haben wir

$$\begin{aligned}\measuredangle XBO + \measuredangle X'BO &= (\measuredangle CBX + \measuredangle CBO) + (\measuredangle CBX' + \measuredangle CBO)\\ &= \measuredangle CBX + \measuredangle CBX' + 2 \bullet \measuredangle CBO\\ &= \gamma + \alpha + 2 \bullet \measuredangle CBO\\ &= \gamma + \alpha + 2 \bullet \frac{\beta}{2} \qquad \text{(Winkelhalbierende!)}\\ &= \gamma + \alpha + \beta = 180^\circ.\end{aligned}$$

Wir haben damit die Beziehung $\measuredangle XBO + \measuredangle X'BO = 180^\circ$ nachgewiesen. Doch man erkennt leicht, daß diese Beziehung äquivalent ist dazu, daß die Geraden BX und BX' zueinander symmetrisch bezüglich der Geraden BO liegen. Das heißt: Die Gerade BX' ist das Spiegelbild der Geraden BX an der von B ausgehenden Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC. Analog erhält man: Die Gerade CX' ist das Spiegelbild der Geraden CX an der von C ausgehenden Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC.

Nach dem Satz vom isogonalen Punkt (§21) schneiden sich die Spiegelbilder der Geraden AX, BX und CX an den entsprechenden Winkelhalbierenden des ΔABC in dem zu X isogonalen Punkt (in bezug auf das Dreieck ABC). Daraus folgen zwei Resultate:

Hilfsresultat 1: Der Punkt X' ist der zu X isogonale Punkt (in bezug auf das Dreieck ABC).

Hilfsresultat 2: Der Punkt X' liegt auf dem Spiegelbild der Geraden AX an der von A ausgehenden Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC.

Analog zu Hilfsresultat 1 können wir zeigen, daß der Punkt Y' zu Y isogonal ist, und daß der Punkt Z' zu Z isogonal ist. Damit ist gezeigt:

Satz von der Antimedial-Tangentendreieck-Isogonalität: Sind ΔXYZ das Antimedialdreieck und $\Delta X'Y'Z'$ das Tangentendreieck eines beliebigen Dreiecks ABC, dann sind die Punkte X', Y' und Z' jeweils zu den Punkten X, Y und Z isogonal in bezug auf das Dreieck ABC.

In Worten: Je eine Ecke des Tangentendreiecks ist isogonal zu der entsprechenden Ecke des Antimedialdreiecks.

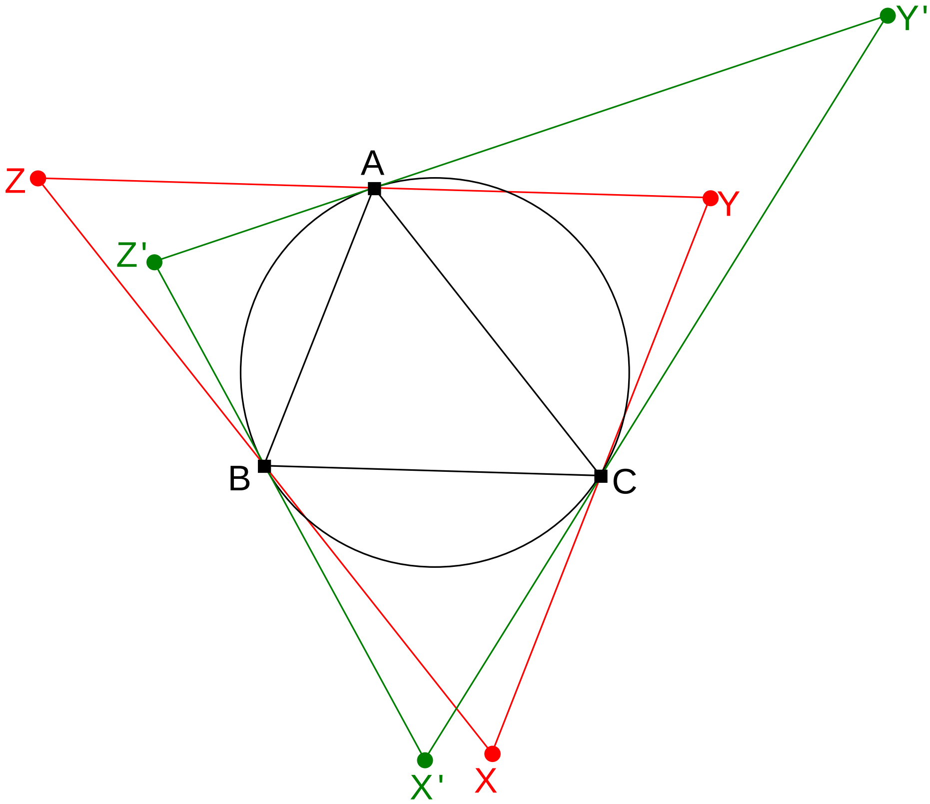

Fig. 29

§24. Eine Eigenschaft des Tangentendreiecks

In dem Hilfsresultat 2 von §23 haben wir gezeigt, daß der Punkt X' auf dem Spiegelbild der Geraden AX an der von A ausgehenden Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC liegt. Aber die Gerade AX ist die von A ausgehende Seitenhalbierende des Dreiecks ABC (wie wir in §23 gefunden haben), und das Spiegelbild einer Seitenhalbierende an der entsprechenden Winkelhalbierenden heißt Symmediane (siehe §20). Also liegt X' auf der von A ausgehenden Symmediane des Dreiecks ABC. Entsprechend kann man einsehen, daß Y' auf der von B ausgehenden Symmediane und Z' auf der von C ausgehenden Symmediane liegt.

Also sind die Geraden AX', BY' und CZ' die Symmedianen des Dreiecks ABC, und schneiden sich folglich in dem Lemoinepunkt des Dreiecks ABC. Aber aus §23 wissen wir, daß sich die Geraden AX', BY' und CZ' in dem Gergonnepunkt des Dreiecks $X'Y'Z'$ schneiden. Folglich stimmt der Gergonnepunkt des $\Delta X'Y'Z'$ überein mit dem Lemoinepunkt des ΔABC. Wir fassen zusammen:

Satz von dem Tangentendreieck und dem Lemoinepunkt: Ist $\Delta X'Y'Z'$ das Tangentendreieck eines Dreiecks ABC, dann sind die Geraden AX', BY' und CZ' die Symmedianen des Dreiecks ABC. Sie schneiden sich in dem Lemoinepunkt L des Dreiecks ABC, welcher gleichzeitig der Gergonnepunkt des $\Delta X'Y'Z'$ ist.

Kurzgefasst: Der Lemoinepunkt eines Dreiecks ist gleichzeitig der Gergonnepunkt des Tangentendreiecks.

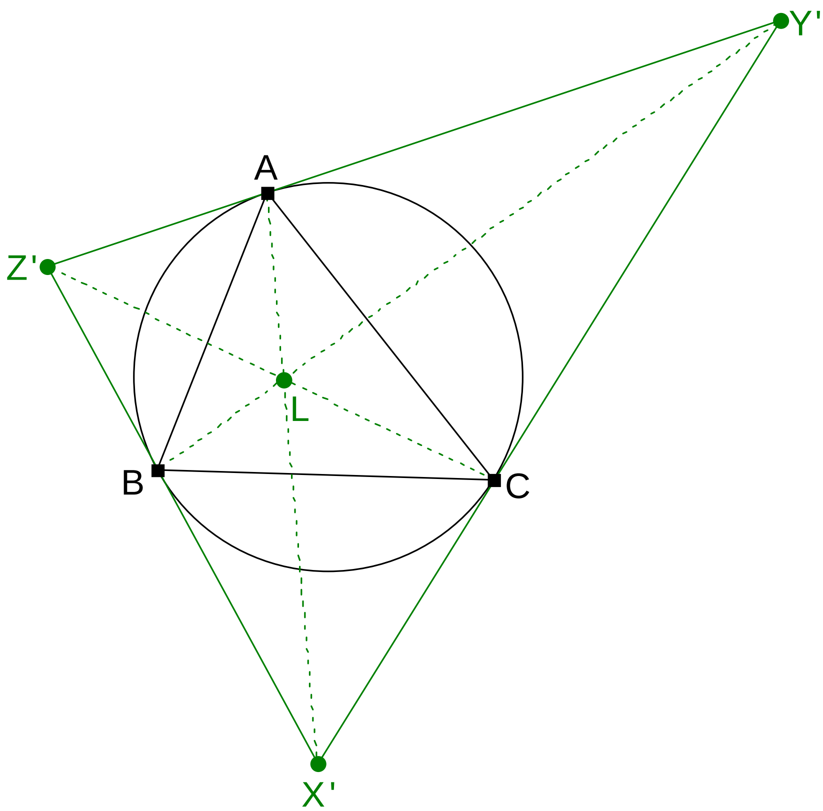

Fig. 30

§25. Das Höhenfußpunktdreieck

Kommen wir zurück zu den Höhen des Dreiecks ABC und ihren Fußpunkten H_a, H_b und H_c. Das Dreieck $H_aH_bH_c$ heißt *Höhenfußpunktdreieck* des Dreiecks ABC.

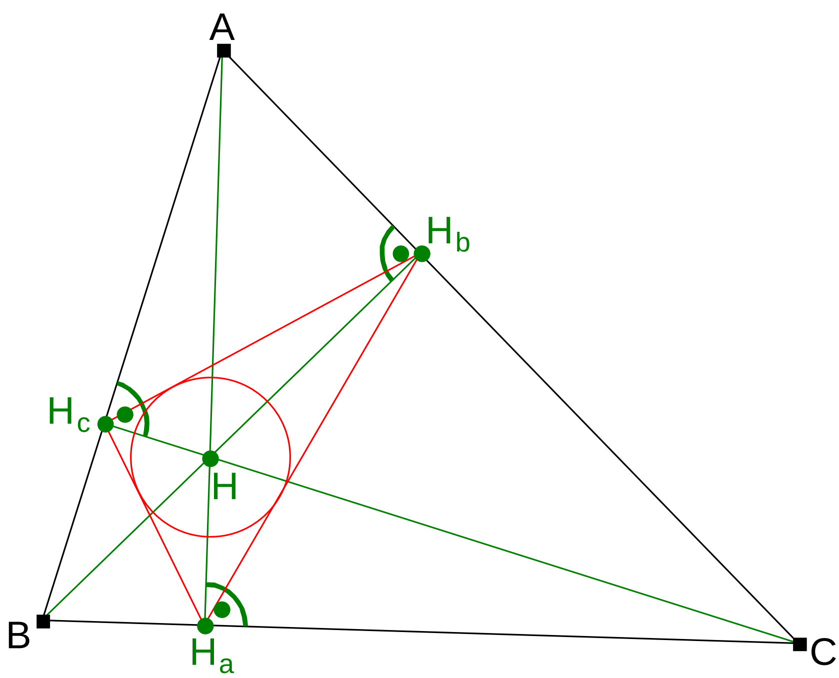

Fig. 31

Recht geläufig ist die folgende Eigenschaft:

Satz: Ist das Dreieck ABC spitzwinklig, dann ist der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC der Inkreismittelpunkt des Höhenfußpunktdreiecks $H_aH_bH_c$, und die Ecken A, B und C des Dreiecks ABC sind die Ankreismittelpunkte des Höhenfußpunktdreiecks $H_aH_bH_c$.

Beweis: Wegen $\measuredangle BH_bC = 90°$ und $\measuredangle BH_cC = 90°$ liegen die Punkte H_b und H_c auf dem

Thaleskreis über der Strecke BC, und das Viereck BH_cH_bC ist ein Sehnenviereck. Nach dem Sehnenviereckssatz gilt also $\measuredangle BCH_b = 180° - \measuredangle BH_cH_b$. Doch $\measuredangle BCH_b = \measuredangle BCA = \gamma$ und $180° - \measuredangle BH_cH_b = \measuredangle AH_cH_b$, sodaß wir $\gamma = \measuredangle AH_cH_b$ erhalten. Genauso finden wir $\gamma = \measuredangle BH_cH_a$. Damit ist $\measuredangle AH_cH_b = \measuredangle BH_cH_a$. Also ist die Gerade AB die Außenwinkelhalbierende des Winkels $H_bH_cH_a$. Nun gilt $\measuredangle HH_cH_b = 90° - \measuredangle AH_cH_b = 90° - \measuredangle BH_cH_a = \measuredangle HH_cH_a$. Die Gerade CH ist damit die Innenwinkelhalbierende des Winkels $H_bH_cH_a$. Aus demselben Grund sind die Geraden BC und CA die Außenwinkelhalbierenden der Winkel $H_cH_aH_b$ und $H_aH_bH_c$, und die Geraden AH und BH die entsprechenden Innenwinkelhalbierenden.

Die Punkte H, A, B und C sind die Schnittpunkte dieser Winkelhalbierenden, also der Inkreismittelpunkt und die Ankreismittelpunkte des Dreiecks $H_aH_bH_c$. Damit ist der Satz bewiesen.

Ist das Dreieck ABC stumpfwinklig, dann sind die Punkte H, A, B und C wieder der Inkreismittelpunkt und die Ankreismittelpunkte des Dreiecks $H_aH_bH_c$, aber in anderer Reihenfolge (H ist ein Ankreismittelpunkt, usw.).

Ein weiteres bemerkenswertes Ergebnis ist (Fig. 32):

Satz: Ist U der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC, dann ist $AU \perp H_bH_c$, $BU \perp H_cH_a$ und $CU \perp H_aH_b$.

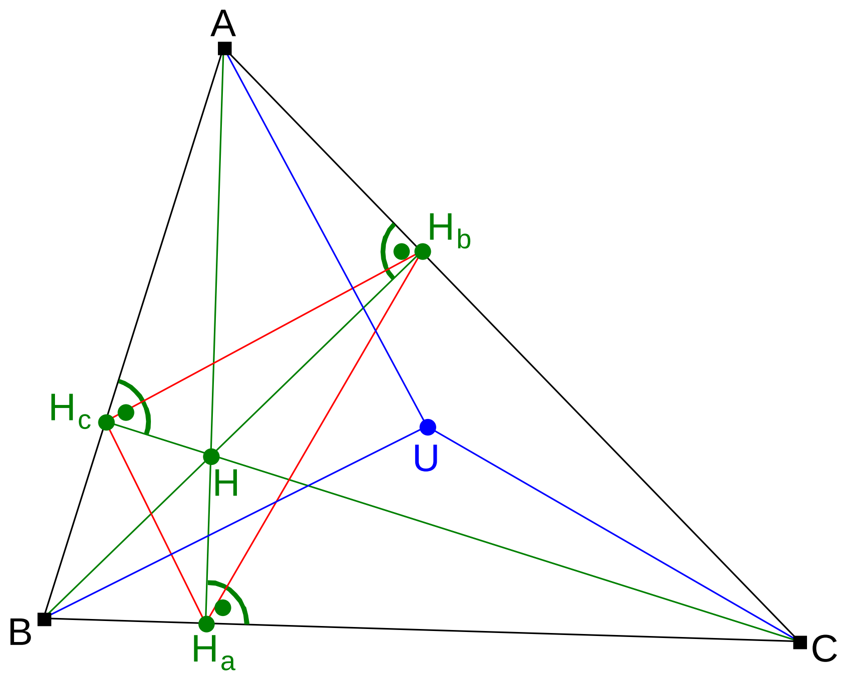

Fig. 32

Der *Beweis* (den wir wieder nur für spitzwinklige ΔABC führen) ist diesmal ganz einfach (Fig. 33): Laut §20 ist $\measuredangle UAC = 90° - \beta$, also $\measuredangle XAH_b = 90° - \beta$, wobei X der Schnittpunkt der Geraden AU und H_bH_c ist. Andererseits ist $\measuredangle AH_bH_c = \beta$ (der Beweis ist analog zu dem von $\measuredangle AH_cH_b = \gamma$), also $\measuredangle AH_bX = \beta$. Damit ist $\measuredangle AXH_b = 180° - \measuredangle XAH_b - \measuredangle AH_bX = 180° - (90° - \beta) - \beta = 180° - 90° = 90°$, und $AU \perp H_bH_c$. Analog zeigt man $BU \perp H_cH_a$ und $CU \perp H_aH_b$, was zu beweisen war.

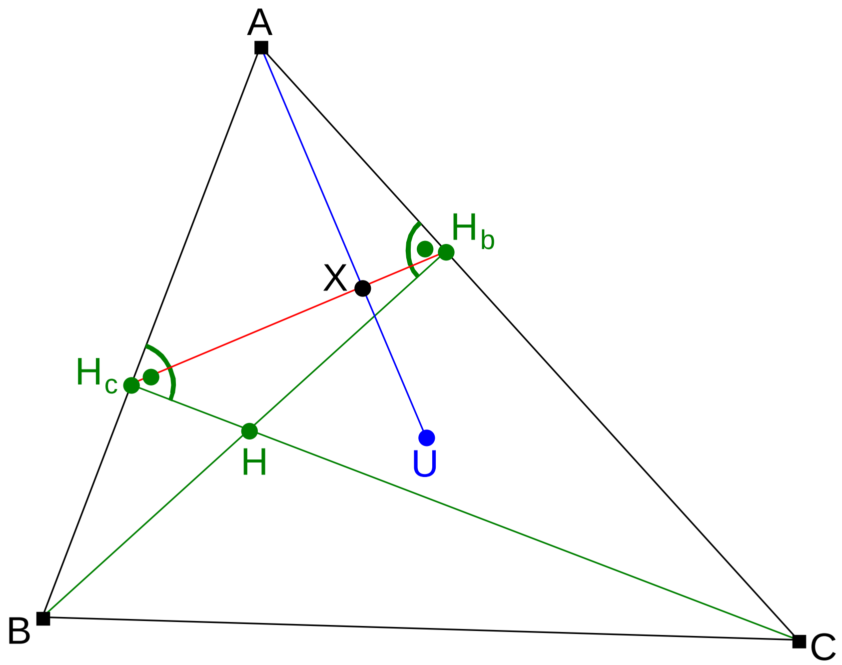

Fig. 33

§26. Der Taylorkreis

Wir untersuchen weiter die Höhenfußpunkte des Dreiecks *ABC*. Fällen wir von jedem Höhenfußpunkt die Lote auf die beiden Nachbarseiten - diese Lote heißen die *Nebenhöhen* des Dreiecks, es gibt insgesamt sechs davon -, dann erhalten wir sechs Fußpunkte. Diese Fußpunkte liegen auf einem Kreis, und dieser Kreis heißt *Taylorkreis* des Dreiecks *ABC*. (Siehe Fig. 34.)

Es gibt eine Meinung, daß dieses Ergebnis schwer zu beweisen ist; von dieser Meinung ließ ich mich sogar einmal dazu verleiten, Trigonometrie und halbvergessene Hilfssätze zum Beweis heranzuholen ([9]). Später stellte sich heraus, daß der Satz ziemlich unkompliziert mit Hilfe von Winkeln ("Winkeljagd") gezeigt werden kann.

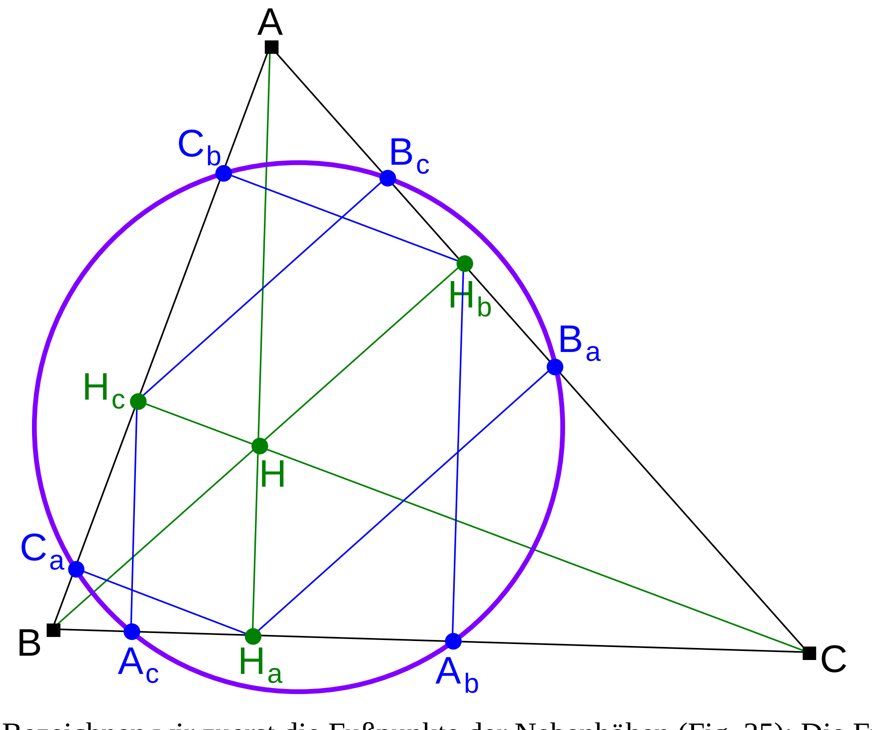

Fig. 34

Bezeichnen wir zuerst die Fußpunkte der Nebenhöhen (Fig. 35): Die Fußpunkte der Lote von H_a auf die Seiten *CA* und *AB* seien B_a bzw. C_a; die Fußpunkte der Lote von H_b auf die Seiten *AB* und *BC* seien C_b bzw. A_b; die Fußpunkte der Lote von H_c auf die Seiten *BC* und *CA* seien A_c bzw.

B_c.

Wir haben nachzuweisen, daß die Punkte $B_a,\ C_a,\ C_b,\ A_b,\ A_c$ und B_c auf einem Kreis liegen.

Im rechtwinkligen Dreieck AB_aH_a ist $\measuredangle AH_aB_a = 90° - \measuredangle H_aAB_a = 90° - \measuredangle H_aAC$, und im rechtwinkligen Dreieck AH_aC ist $\measuredangle ACH_a = 90° - \measuredangle H_aAC$. Daher ist $\measuredangle AH_aB_a = \measuredangle ACH_a$, also $\measuredangle AH_aB_a = \gamma$.

Wegen $\measuredangle AB_aH_a = 90°$ und $\measuredangle AC_aH_a = 90°$ liegen die Punkte B_a und C_a auf dem Thaleskreis über der Strecke AH_a. Also ist $AC_aH_aB_a$ ein Sehnenviereck, und der Umfangswinkelsatz ergibt $\measuredangle AC_aB_a = \measuredangle AH_aB_a$, also $\measuredangle AC_aB_a = \gamma$.

In §25 haben wir festgestellt, daß $\gamma = \measuredangle AH_cH_b$ ist; genauso finden wir $\alpha = \measuredangle BH_aH_c$. Wegen $\measuredangle H_cC_aH_a = 90°$ und $\measuredangle H_cA_cH_a = 90°$ liegen die Punkte C_a und A_c auf dem Thaleskreis über der Strecke H_cH_a; also ist $H_cC_aA_cH_a$ ein Sehnenviereck, und es folgt $\measuredangle A_cC_aH_c = 180° - \measuredangle A_cH_aH_c = 180° - \measuredangle BH_aH_c = 180° - \alpha$. Also ist

$$\measuredangle A_cC_aB_a = \measuredangle A_cC_aH_c - \measuredangle AC_aB_a = (180° - \alpha) - \gamma = \beta.$$

Doch genauso, wie wir $\measuredangle A_cC_aH_c = 180° - \alpha$ errechnet haben, können wir $\measuredangle B_aA_bH_a = 180° - \beta$ finden; d. h., wir haben $\measuredangle B_aA_bA_c = 180° - \beta$. Damit ist

$$\measuredangle A_cC_aB_a + \measuredangle B_aA_bA_c = \beta + (180° - \beta) = 180°.$$

Also ist $A_cC_aB_aA_b$ ein Sehnenviereck, und die Punkte $A_b,\ A_c,\ B_a$ und C_a liegen auf einem Kreis.

Analog liegen die Punkte $B_c,\ B_a,\ C_b$ und A_b auf einem Kreis.

Wir müssen jetzt zeigen, daß auch die Punkte $A_b,\ A_c,\ B_c$ und B_a auf einem Kreis liegen. (Das geht nicht mehr analog!) Haben wir das erst einmal gezeigt, dann müssen unsere drei Kreise zusamenfallen, und alle sechs Punkte $B_a,\ C_a,\ C_b,\ A_b,\ A_c$ und B_c liegen auf einem Kreis.

Es bleibt uns also der Beweis, daß die Punkte $A_b,\ A_c,\ B_c$ und B_a auf einem Kreis liegen.

Genauso, wie wir $\measuredangle AC_aB_a = \gamma$ gezeigt haben, bekommen wir $\measuredangle CB_cA_c = \beta$, also $\measuredangle B_aB_cA_c = \beta$. Andererseits ist $\measuredangle B_aA_bA_c = 180° - \beta$, wie wir vorhin eingesehen haben. Also ist

$$\measuredangle B_aB_cA_c + \measuredangle B_aA_bA_c = \beta + (180° - \beta) = 180°,$$

und $A_bA_cB_cB_a$ ist ein Sehnenviereck, d. h. die Punkte $A_b,\ A_c,\ B_c$ und B_a liegen auf einem Kreis, was zu beweisen war.

[Bemerken wir übrigens, daß $B_cC_b \parallel BC,\ C_aA_c \parallel CA$ und $A_bB_a \parallel AB$ ist. In der Tat ist $\measuredangle A_cC_aH_c = 180° - \alpha$, oder $\measuredangle A_cC_aA = 180° - \measuredangle C_aAC$, woraus $C_aA_c \parallel CA$ folgt, und analog ergibt sich $B_cC_b \parallel BC$ und $A_bB_a \parallel AB$.]

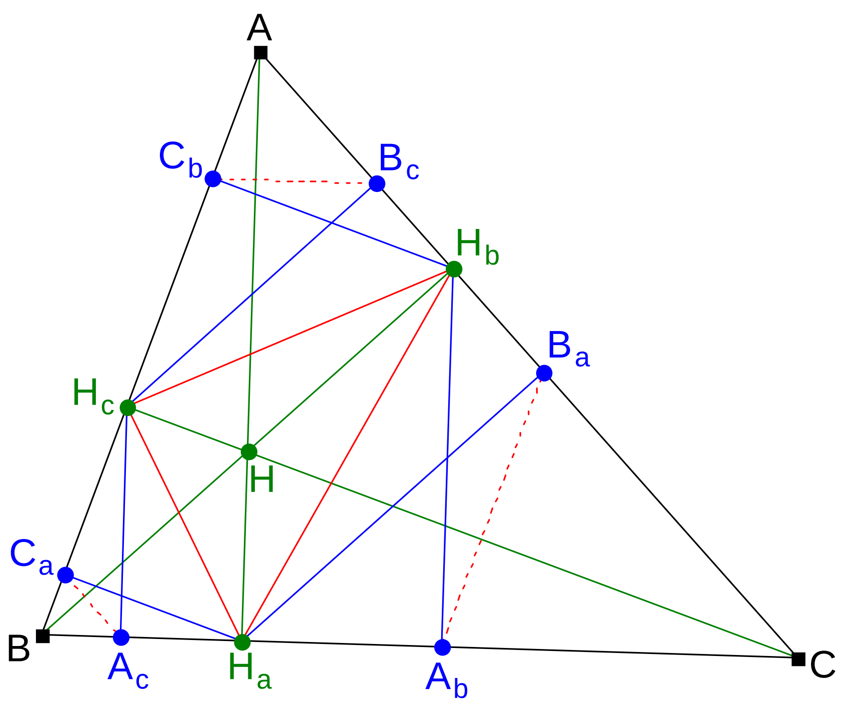

Fig. 35

§27. Eine Aufgabe von Fred Lang

Wir haben gerade die elementaren Eigenschaften von Höhenfußpunktdreiecken besprochen. Damit ist aber nicht einmal der Kreis jener Sätze erschöpft, die mit minimalem Aufwand (Winkeljagd, Umfangswinkel, ähnliche Dreiecke) bestätigt werden können. So wurde die folgende Aufgabe erst 2000 von Fred Lang gestellt (Fig. 36):

Gegeben sei ein Dreieck ABC. Die Mittelsenkrechte der Seite BC schneide CA in Y_a und AB in Z_a. Die Mittelsenkrechte der Seite CA schneide BC in X_b und AB in Z_b. Man beweise, daß die Punkte Y_a, Z_a, X_b und Z_b auf einem Kreis liegen.

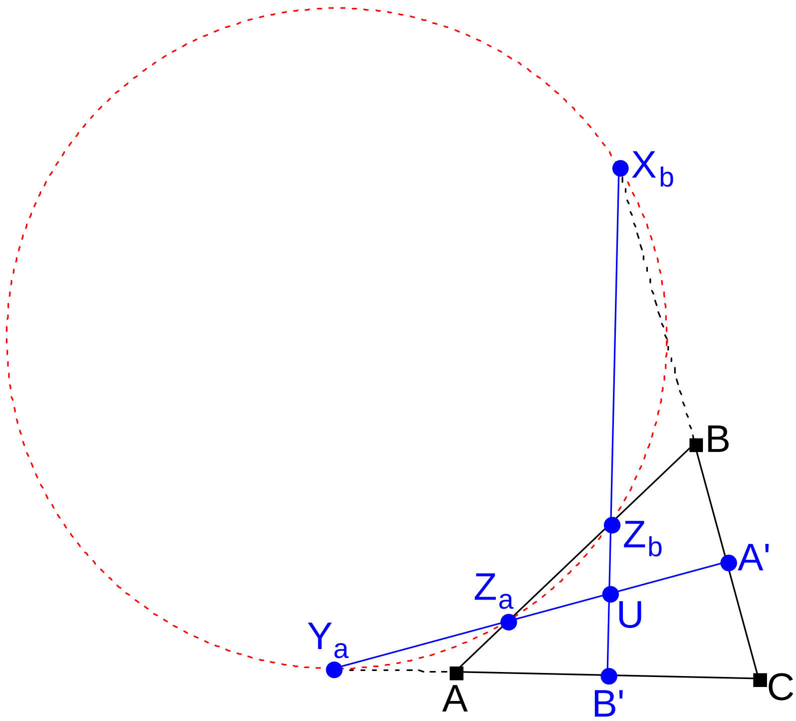

Fig. 36

Die Lösung ist wieder einfach (Fig. 37). Seien A' und B' die Mittelpunkte der Seiten BC bzw. CA und U der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten, d. h. der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Wir haben dann $\measuredangle UZ_aZ_b = \measuredangle A'Z_aB = 90° - \measuredangle Z_aBA' = 90° - \measuredangle ABC = 90° - \beta$.

Andererseits gilt $\measuredangle Y_aA'X_b = 90°$ und $\measuredangle Y_aB'Z_b = 90°$; folglich liegen die Punkte A' und B' auf dem Thaleskreis über der Strecke Y_aX_b, und das Viereck $Y_aB'A'X_b$ ist ein Sehnenviereck. Nach dem Umfangswinkelsatz gilt also $\measuredangle B'X_bY_a = \measuredangle B'A'Y_a = 90° - \measuredangle B'A'C$. Wegen $A'B' \parallel AB$ ist $\measuredangle B'A'C = \measuredangle ABC = \beta$, also $\measuredangle B'X_bY_a = 90° - \beta$.

Nun haben wir

$$\begin{aligned}\measuredangle Z_bZ_aY_a + \measuredangle Z_bX_bY_a &= (180° - \measuredangle UZ_aZ_b) + \measuredangle B'X_bY_a \\ &= (180° - (90° - \beta)) + (90° - \beta) = 180°.\end{aligned}$$

Also ist $Z_aY_aX_bZ_b$ ein Sehnenviereck, und die Punkte Y_a, Z_a, X_b und Z_b liegen auf einem Kreis.

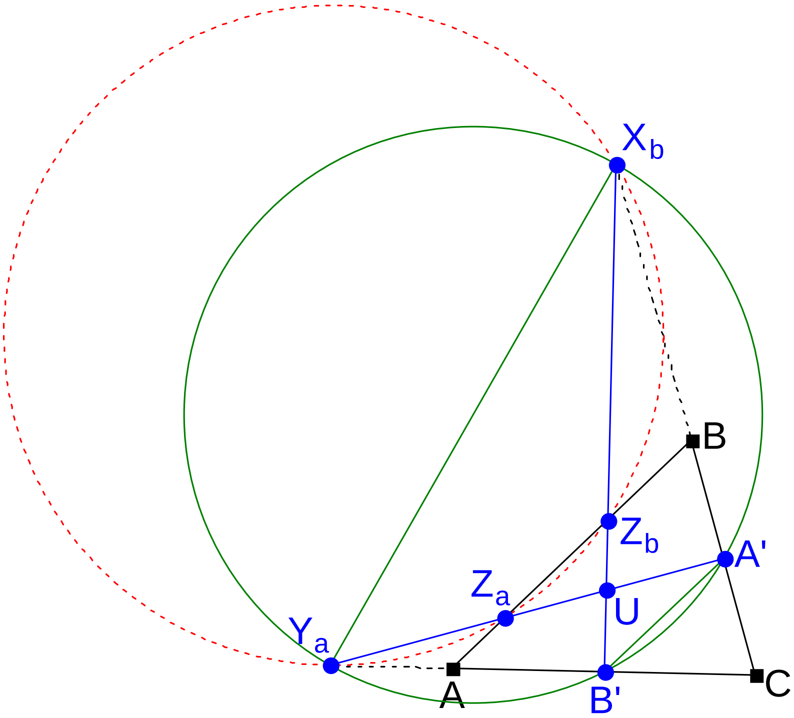

Fig. 37

§28. Schlußbemerkung

Die Sätze, die wir hier besprochen haben, sind nur ein kleiner Teil der Dreiecksgeometrie. Vieles ist in älteren Fachbüchern vergraben, aber auch im Internet findet man Dreiecksgeometrie. Man gebe z. B. in einer Suchmaschine die Begriffe ”Gergonne point”, ”Nagel point”, ”Emile Michel Hyacinthe Lemoine”, ”Clark Kimberling”, ”Triangle Centers” oder ”Triangle Geometry” ein. Nicht selten findet man Aufgaben aus der Dreiecksgeometrie in dem Bundeswettbewerb Mathematik Deutschland. Ich erwähne natürlich auch die bekanntesten elementaren Bücher über Dreiecksgeometrie ([1] - [4]).

Literaturhinweise

[1] Emil Donath: *Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks*, Berlin 1976.

[2] Harold S. M. Coxeter, Samuel L. Greitzer: *Zeitlose Geometrie*, Stuttgart 1983.

[3] Peter Baptist: *Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie*, Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich 1992.

[4] Ross Honsberger: *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, USA 1995.

[5] Jennifer Heß: *Untersuchungen zum Satz von Ceva*, jugend forscht. `http://www.uni-duisburg.de/SCHULEN/STG/Wettbewerbe/jugendforscht.htm`

[6] Clark Kimberling: *Encyclopedia of Triangle Centers* (*and more*). `http://faculty.evansville.edu/ck6/`

[7] Harold S. M. Coxeter: *Unvergängliche Geometrie*, Basel-Stuttgart 1963.

[8] Darij Grinberg: *Einige Sätze über isogonale Punkte*. `http://www.dynageo.de/discus/messages/5/112.html`

[9] Darij Grinberg: *Nebenhöhen im Dreieck,* $\sqrt{\text{WURZEL}}$ 11/2001, S. 252-254.