

# Der zersägte Würfel

Preisrätsel aus Bild der Wissenschaft

Heft Dezember 2001

VOR EIN PAAR WOCHEN fand ich beim Aufräumen des Dachbodens einen großen Holzwürfel. Er war weiß lackiert und hatte einige Jahre in unserem Wohnzimmer als Blumenhocker gedient. An manchen Stellen sah man noch an dunklen Ringen, wo die Blumentöpfe gestanden hatten. Ich wollte den Würfel zuerst wegwerfen, aber dann überlegte ich mir, dass sich daraus ganz gut Bauklötze für meine kleine Tochter Sarah machen ließen. Also bat ich meinen Nachbarn Alfred, der eine Kreissäge besitzt, den Blumenhocker in 64 gleich große Würfel zu zerschneiden. Leider hatte ich vergessen, vorher die Farbe von dem Würfel zu schleifen, denn nun hatten manche der Bauklötze einige weiße Seitenflächen. Zuerst ärgerte ich mich darüber und nahm mir vor, den Lack nachträglich zu entfernen, aber als ich merkte, dass Sarah die Bauklötze gar nicht beachtete und nur mit ihren Puppen spielte, ließ ich es bleiben. Am letzten Mittwoch sah ich mir nach dem Abendbrot die Nachrichten im Fernsehen an. Sarah und Thomas lagen schon im Bett, und Christina spielte gedankenverloren mit einem von Sarahs Holzwürfeln, als meine Frau aus der Küche rief: 'Kann mir jemand von euch beiden beim Abwasch helfen?' 'Du oder ich?', fragte ich meine Tochter. 'Du!', entschied sie. 'Ich habe den ganzen Nachmittag über Hausaufgaben gemacht und bin müde.' 'Mir gehts nicht anders. Ich habe auch den ganzen Tag gearbeitet', erwiderte ich. 'Dann schlage ich vor, wir würfeln es aus. Das ist am gerechtesten', meinte Christina. Sie stellte den Beutel mit den 64 Holzwürfeln vor mir auf den Tisch und sagte: 'Du nimmst jetzt, ohne in den Beutel zu sehen, einen Würfel heraus und gibst ihn mir. Ich werde dann damit würfeln. Ist anschließend die oben liegende Fläche des Würfels weiß, so wasche ich ab, sonst gehst du in die Küche. Einverstanden?' Ich hielt dies für einen fairen Vorschlag. Wir spielten das Spiel - und ich verlor. Beim Abtrocknen kamen mir dann Zweifel. Aus Erfahrung wusste ich, dass mich meine Tochter für geistig etwas unterbelichtet hielt und nicht die geringsten Hemmungen hatte, mich mit solchen Spielchen über den Tisch zu ziehen. Hatte ich nun wirklich die gleichen Chancen gehabt wie Christina? Wissen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei diesem Spiel eine weiße Fläche gewürfelt wird?

**Lösungsweg**

Zunächst überlegen wir uns die Anzahl an Würfeln mit drei, zwei, einer und mit gar keiner weißen Fläche.

- 8 Eckwürfel mit 3 weißen Flächen,
- 24 Kantenwürfel mit 2 weißen Flächen,
- 24 Flächenwürfel mit einer weißen Fläche,
- 8 innere Würfel mit keiner weißen Fläche.

Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Würfel mit einer, mit zwei oder mit drei weißen Flächen, beim Würfeln eine weiße Fläche zu erhalten beträgt:

$$W_1 = \frac{1}{6}, \quad W_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad W_3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Die Wahrscheinlichkeit einen der 8 Eckwürfel zu ziehen **und** mit ihm eine weiße Fläche zu würfeln beträgt:

$$E_3 = \frac{8}{64} \cdot W_3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \quad (2)$$

Analog dazu berechnen wir die Erwartungswerte für die Kantenwürfel und für die Flächenwürfel:

$$E_2 = \frac{24}{64} \cdot W_2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{8} \quad (3)$$

$$E_1 = \frac{24}{64} \cdot W_1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{16} \quad (4)$$

Die Wahrscheinlichkeit insgesamt eine weiße Fläche oben zu haben ergibt sich aus der Summe der Erwartungswerte :

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \quad (5)$$

Damit kommt nur in einem Viertel aller Fälle die weiße Fläche nach oben, weshalb Christina dreimal höher Chancen gehabt hat.