

Von Zigarettenrauchern und Rechtshändlern

Eine Aufgabe von Annet Rüdrich

23. April 2003

Wenn

- 90% aller Erwachsenen in ihrem Leben schon mal eine Zigarette geraucht haben,
- 87% schon mal betrunken waren,
- 74% Rechtshänder sind und
- 50% größer als 1.70 m sind -

auf wieviel Prozent aller Erwachsenen treffen dann alle vier Merkmale zu?

Punktezahl = 6

Originallösung der Rätselauthorin

Man bildet fortlaufend die Differenzmenge und subtrahiert diese von den 50% :

$$w = 50\% - (100 - 90)\% - (100 - 87)\% - (100 - 74)\% = 1\% \quad (1)$$

Auf 1% aller Erwachsenen treffen alle vier Merkmale zu.

Lösungsweg von Swen Lünig

Die betrachteten vier möglichen Eigenschaften der Personen einer untersuchten Gruppe werden mit A, B, C und D bezeichnet. Gleichzeitig stehen die Bezeichnungen für den jeweiligen Anteil der Personen der Gruppe, welche die Eigenschaft besitzen: A=90 %, B=87 %, C=74 % und D=50 %. Diese Personen werden mit A-, B-, C- und D-Personen bezeichnet. Bei einer Kombination von Eigenschaften ergibt sich dann z.B. AB- oder BCD-Personen. Die Anteile sollen sich jeweils auf die Gesamtanzahl der Personen und nicht auf die der in der Aufgabe vorher benannten Teilgruppe beziehen. Denn dann ergäbe sich die Antwort sofort als Produkt der vier Anteile. Die Eigenschaften sollen auch unabhängig voneinander sein, so dass die Belegung der Personen mit Eigenschaften rein kombinatorisch erfolgen kann.

Für die Anzahl der Personen, die zwei Eigenschaften gemeinsam haben, können nur Minimal- und Maximalwerte ermittelt werden, da die tatsächliche Belegung nicht bekannt ist. Wenn z.B. 90 % der Personen die Eigenschaft A haben, dann können alle Personen mit der Eigenschaft B auch die Eigenschaft A haben, weil 87 kleiner als 90 ist. Alle 87 % mit der Eigenschaft B können also gleichzeitig die Eigenschaft A haben. Es könnte aber auch sein, dass von diesen 87 % möglichst viele Personen nicht die Eigenschaft A haben. Das können jedoch höchstens 10 % von der Gesamtanzahl sein. Nur der Rest von den 87 % muss dann die Eigenschaft A haben. Es ergibt sich also für die Kombination von A und B ein Anteil zwischen 77 % und 87 %. Die Abb. 1 soll die zwei Möglichkeiten veranschaulichen. Die Strecke G steht

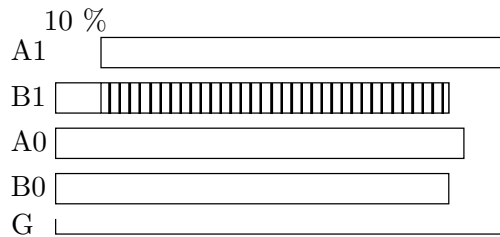


Abbildung 1: Minimaler und maximaler Anteil für die Kombination der Eigenschaften A und B

für die Gruppe der untersuchten Personen. Das Rechteck $B0$ sind die 87 % B-Personen, wenn alle von denen auch die Eigenschaft A haben. In diesem Fall könnte die Belegung der A-Personen durch das Rechteck $A0$ angedeutet sein. Ein Verschieben dieses Rechtecks nach rechts bedeutet, dass einige der B-Personen nicht die Eigenschaft A haben. Die Rechtecke $A1$ und $B1$ stellen dann den Extremfall dar, bei dem sich kleinste mögliche Anteil von AB-Personen ergibt. Dieser minimale AB-Anteil entspricht dem schraffierten Teil des Rechteckes $B1$.

Die 77 % bis 87 % der AB-Personen können nun willkürlich mit der Eigenschaft C belegt werden. Als Maximalwert ergibt sich das Minimum aus 74 % und 87 % also aus den Maxima beider zu kombinierenden Anteile. Der Anteil der ABC-Personen ist somit höchstens 74 %. Zur Minimumbestimmung des ABC-Anteils wird der Minimalwert des AB-Anteiles genommen und der Anteil des Restes der C-Personen abgezogen. Es ergibt sich ein ABC-Anteil von mindestens 77 % - (100 % - 74 %) also 51 %.

Das gleiche Verfahren wird zur Ermittlung des ABCD-Anteiles benutzt. Dessen Maximalwert ist 50 %. Der Minimalwert ergibt sich zu 51 % - (100 % - 50 %) also 1 %. Damit treffen auf mindestens 1 % und höchstens 50 % aller Personen der Gruppe alle 4 Eigenschaften zu.

Lösungsweg von Reinhold Moebis

Diese Aufgabe kann man mehrdeutig sehen:

Wenn man einen ursächlichen Zusammenhang zwischen Größe \Rightarrow Rechtshänder \Rightarrow Trinker \Rightarrow Raucher annimmt, so gehören 50 % aller Erwachsenen dieser 'Problemgruppe' an.

Nimmt man an, dass die 'Ereignisse' unabhängig voneinander auftreten, so teilen sich die 50 % der längeren Hälfte der Erwachsenen Welt wie folgt auf (die kürzere Hälfte übrigens genauso):

Gruppe	Prozent
Raucher, Trinker, Rechtshändler,	28.971
Nichtraucher, Trinker, Rechtshändler	3.219
Raucher, Nichttrinker, Rechtshändler	4.329
Nichtraucher, Nichttrinker, Rechtshändler	0.481
Raucher, Trinker, Linkshändler,	10.179
Nichtraucher, Trinker, Linkshändler	1.131

Das Problem liegt in der Fragestellung. Die korrekte Frage zu der von der Autorin angegebenen Antwort lautet:

'... auf mindestens wieviel Prozent der Erwachsenen treffen dann alle vier Merkmale zu?'

also eine Aufgabe, in der nicht die Unabhängigkeit der Ereignisse gefordert ist, sondern deren maximaler Ausschluss. Hier das Ganze mal bildhaft für zwei Kriterien:

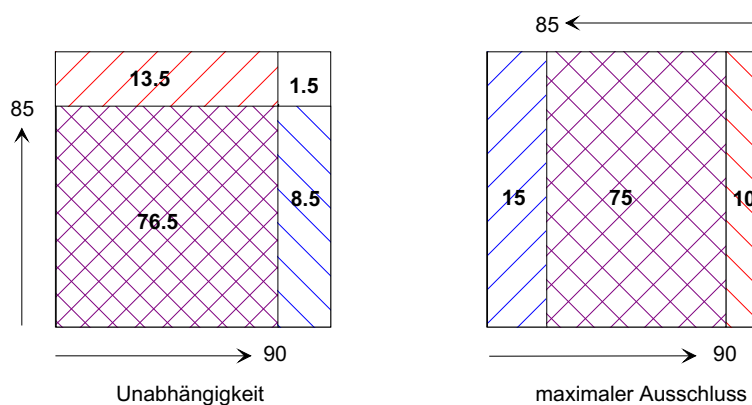


Abbildung 2: Unterschied zwischen Unabhängigkeit und maximaler Ausschluss

Bei dem Lösungsweg der Autorin verstehe ich die verlangte *Differenzmethode* nicht. Ich hatte mich einfach hingesetzt und Wahrscheinlichkeiten berechnet:

Raucher = 0.9

Trinker = 0.87

also

Raucher und Trinker = $0.9 * 0.87$

Raucher und Nicht Trinker = $0.9 * (1-0.87)$

Nichtraucher und Trinker = $(1-0.9) * 0.87$

Beides nicht = $(1-0.9)*(1-0.87)$

So erhält man für alle 4 Kriterien :

$$w = 0.9 \cdot 0.87 \cdot 0.74 \cdot 0.5 = 28.97\% \quad (2)$$

Nach der gleichen Methode rechnet man im Marketing Gesamt-Reichweiten von Werbebotschaften über verschiedene Sender und Medien und die Häufigkeitsverteilung der Botschaft innerhalb der Zielgruppe. Da kann doch nichts falsch sein, oder doch ?
