Zwei Kreise im Quadrat

Eine Sangaku Aufgabe

22. März 2017

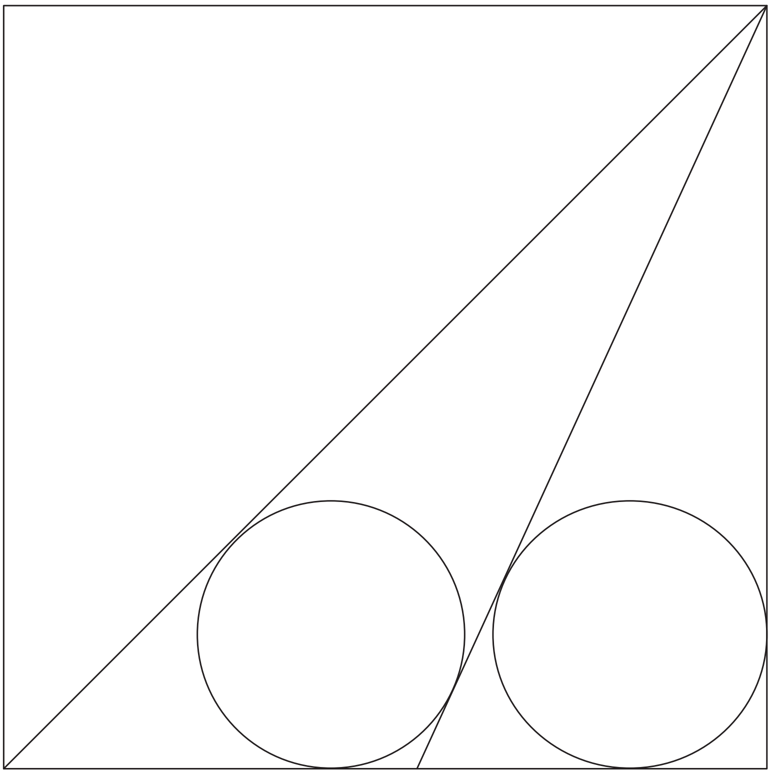

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Gegeben ist das Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a. Dem Quadrat ist die Diagonale AC und die Transversale CE eingeschrieben. Der Kreis k_1 berührt die Seiten AB, BC und CE. Ein gleich großer Kreis k_2 berührt die Seiten AB, AC und CE, d.h die Seite CE ist eine gemeinsame Tangente der Kreis k_1 und k_2. Bestimme der Radius r der beiden Kreis in Abhängigkeit von a.

Lösungsvorschlag

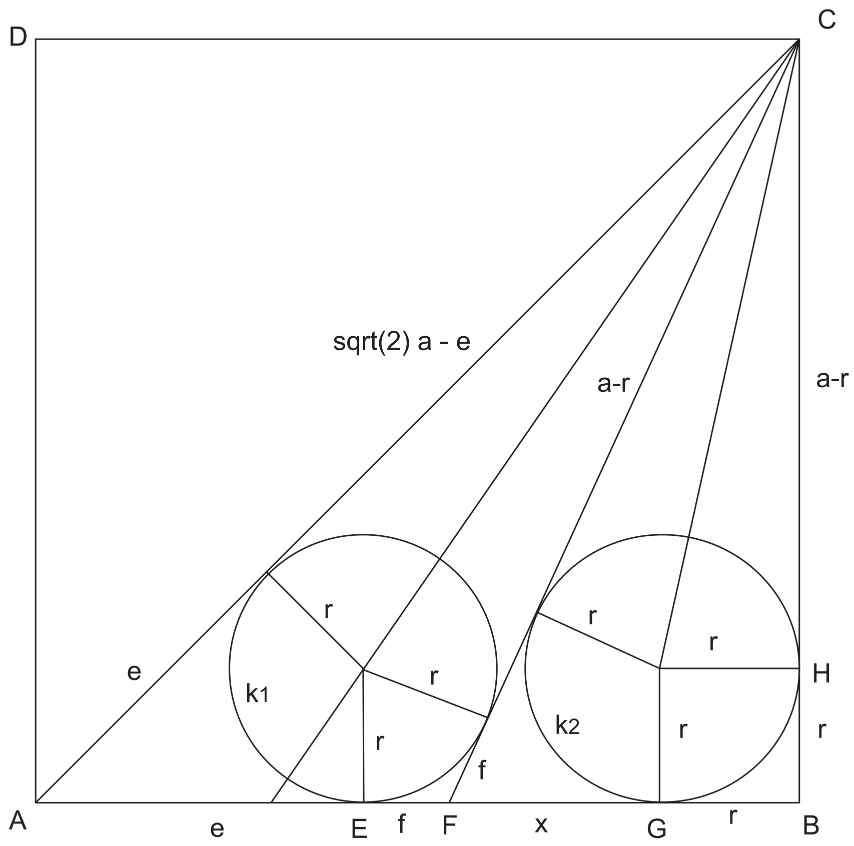

Abbildung 2: Lösungsskizze

Es seien die Punkte- und Streckenbezeichner aus Abbildung 2 gewählt. Die Summe der Streckenabschnitte auf Seite AB müssen a ergeben

$$\overline{AF}: \quad a = e + x + f + r \tag{1}$$

Die Tangentenabschnitte vom Punkt C an k_1 bzw. an k_2 sind jeweils gleich lang. Ebenso die Tangentenabschnitte x bzw. f vom Punkt F an den Kreis k_1 bzw. k_2. Damit erhalten wir die Gleichung:

$$a\sqrt{2} - e = a - r + x - f \tag{2}$$

Der Radius r vom Inkreis k_1 des Dreiecks BCF folgt aus dem Quotienten Fläche durch halben Umfang s_1

$$A_1 = \frac{a}{2}(x + r), \quad s_1 = \frac{a + x + r + a - r + x}{2}, \quad r = \frac{a\,(x + r)}{2\,(a + x)} \tag{3}$$

Analog erhalten wir für den Inkreis k_2 vom Dreieck AFC:

$$A_2 = \frac{a}{2}\,(e+f), \quad s_2 = \frac{a\sqrt{2}+a-r+x+e+f}{2}, \tag{4}$$

$$r = \frac{a\,(e+f)}{e+f+a\sqrt{2}+a-r+x} \tag{5}$$

Die Auflösung der Gleichungen (1) bis (5) im CAS Mathematica ergibt:

$$x = \frac{a}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}+\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}-1\right), \tag{6}$$

$$e = \frac{a}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right), \tag{7}$$

$$f = \frac{a}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}+1\right), \tag{8}$$

$$r = \frac{a}{2}\left(1-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right) \tag{9}$$