Ein Kreis im Quadrat

Eine Sangaku Aufgabe

19. März 2017

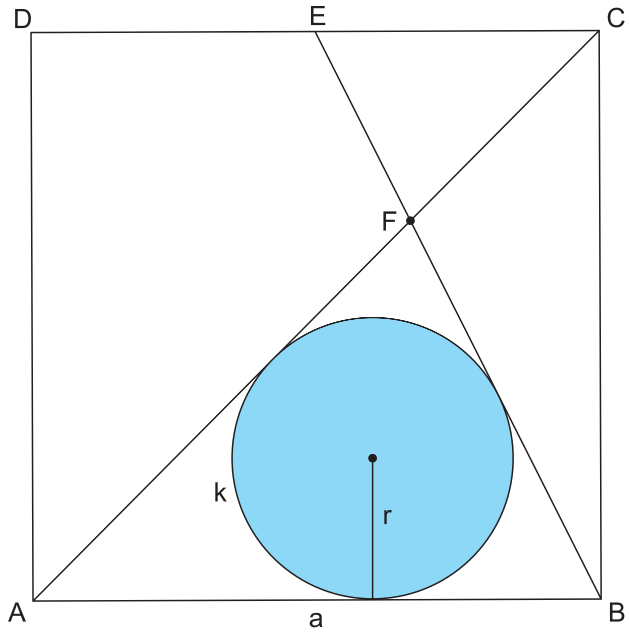

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Gegeben ist das Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a. Dem Quadrat ist die Diagonale AC eingeschrieben. Der Mittelpunkt von Seite CD ist E. Von B läuft eine Transversale zum Punkt E und schneidet die Diagonale AB im Punkt F. Dem Dreieck AFB ist der Inkreis k eingeschrieben. Bestimme den Radius r vom kreis k.

Lösungsvorschlag

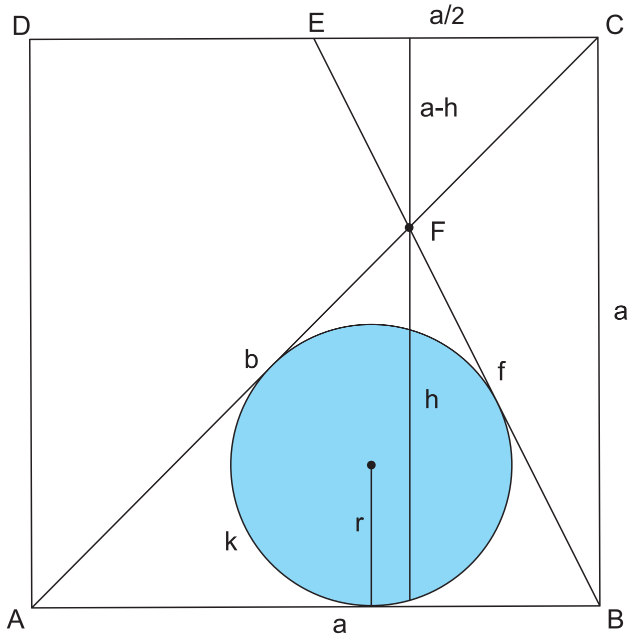

Abbildung 2: Lösungsskizze

Es seien die Punkte- und Streckenbezeichner aus Abbildung 2 gewählt. Zunächst zeigen wir, dass der Punkt F die Strecke AC und BE im Verhältnis $2 \div 3$ teilt. Die Dreieck EFC und AFB sind einander ähnlich und es gilt die Verhältnisgleichung:

$$\frac{a/2}{a-h} = \frac{a}{h} \quad \rightarrow \quad h = \frac{2}{3}\,a \tag{1}$$

Analog dazu werden die Strecken AC und BE im Verhältnis $2 \div 3$ geteilt. Mit den Bezeichnern aus Abbildung 2 erhalten wir für die Seiten des Dreiecks AFB:

$$b = \frac{2}{3} \cdot \overline{AC} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot a}{3} \tag{2}$$

$$f = \frac{2}{3} \cdot \overline{BE} = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\,\sqrt{5}}{3} \tag{3}$$

Der Inkreisradius vom Dreieck AFB errechnet sich aus der Formel

$$r = \frac{\Delta}{s} = \frac{a \cdot h}{a+b+f} = \frac{2\,a^2}{3\,(a + \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot a}{3} + \frac{a\,\sqrt{5}}{3})} \tag{4}$$

$$r = \frac{2a}{3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5}} \approx 0.248001\,a \tag{5}$$