Fünf Kreise und eine Ellipse Teil 2

Gery Huvent

4. Mai 2015

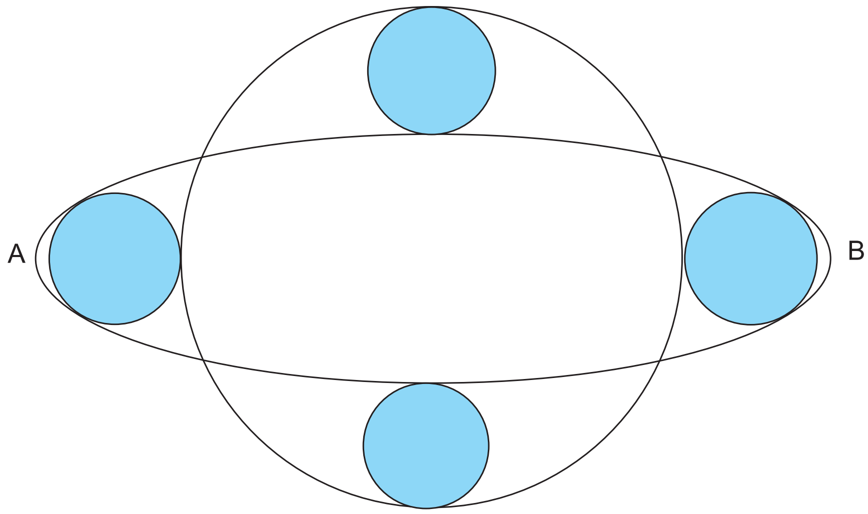

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe

Gegeben ist eine Ellipse mit den Halbachsen a, b. Ein Kreis mit Radius $b < R < a$ liegt mit seinem Mittelpunkt im Zentrum der Ellipse. Weiterhin sind vier gleich große Kreise mit Radius r so zwischen Ellipse und Kreis eingezeichnet, dass diese die Ellipse in je zwei Punkten und den großen Kreis in je einem Punkt berühren. Bestimme das Verhältnis $a \div b$ wenn für die kleine Halbachse gilt $b = 2 \cdot r$.

Lösungsvorschlag

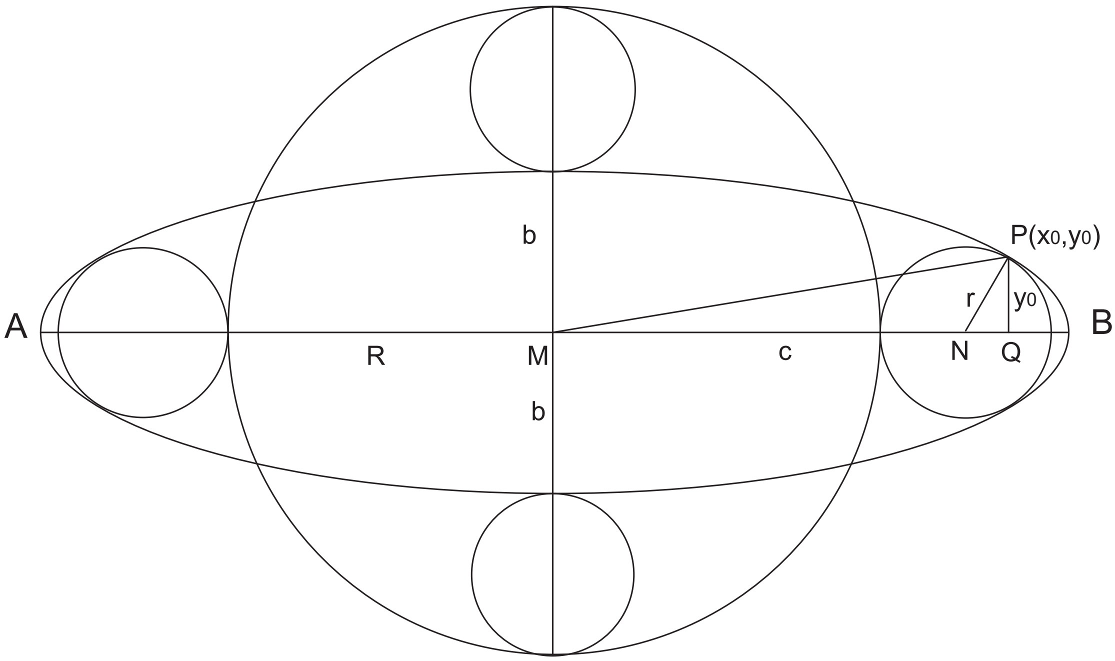

Abbildung 2: Skizze zur Lösung

Es seien die Punkte- und Streckenbezeichner nach Abbildung 2 vereinbart. Im ersten Schritt untersuchen wir die Berührung zwischen dem kleinen Kreis und der Ellipse im Punkt $P(x_0, y_0)$. Uns interessiert der Wert $c = \overline{MN}$. Der Punkt P liegt auf der Ellipse mit den Halbachsen a, b und muß die Ellipsengleichung erfüllen:

$$P(x_0, y_0): \qquad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

Gleichzeitig liegt P auf dem kleinen Kreis mit Radius r und Mittelpunkt in $N(c, 0)$:

$$(x_0 - c)^2 + y_0^2 = r^2 \tag{2}$$

Wir lösen die Gleichungen (1) und (2) mit Hilfe eines CAS nach $x_0, y_0)$ auf. Uns interessiert einzig die Doppellösung beidem der Kreis die Ellipse von Innen tangiert. In diesem Fall muss der folgende Wurzelausdruck zu Null werden:

$$\sqrt{a^2 - b^2} = 0 \quad \rightarrow \quad c = \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{b^2 - r^2}}{b} \tag{3}$$

In der vorliegenden Aufgabenstellung setzt sich die Strecke c aus der Summe vom großen Kreisradius R und dem kleinen Kreisrdaius r zusammen und es ist :

$$c = R + r = \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{b^2 - r^2}}{b} \tag{4}$$

Aus der Berührung auf der kleinen Halbachse der Ellipse folgt:

$$R = b + 2 \cdot r = 2 \cdot r + 2 \cdot r \tag{5}$$

Laut Aufgabenstellung ist $a \div b$ gesucht:

$$c = R + r = 5\,r = \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{b^2 - r^2}}{b} \tag{6}$$

$$5 \cdot r = \frac{\sqrt{a^2 - 4r^2} \cdot \sqrt{4r^2 - r^2}}{2\,r} \tag{7}$$

$$10 \cdot r^2 = \sqrt{a^2 - 4\,r^2} \cdot r\,\sqrt{3} \tag{8}$$

$$10 \cdot r = \sqrt{3\,a^2 - 12\,r^2} \tag{9}$$

$$100 \cdot r^2 = 3\,a^2 - 12\,r^2 \tag{10}$$

$$a = r \cdot \sqrt{\frac{112}{3}} = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{\frac{112}{3}} \tag{11}$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{112}{4}} = \sqrt{28} = 2\ \cdot \sqrt{7} \tag{12}$$