Inkreise im gleichschenkligen Dreieck

San-Gaku Rätsel No. 1.2.7, Nagano Prefekur

24. August 2014

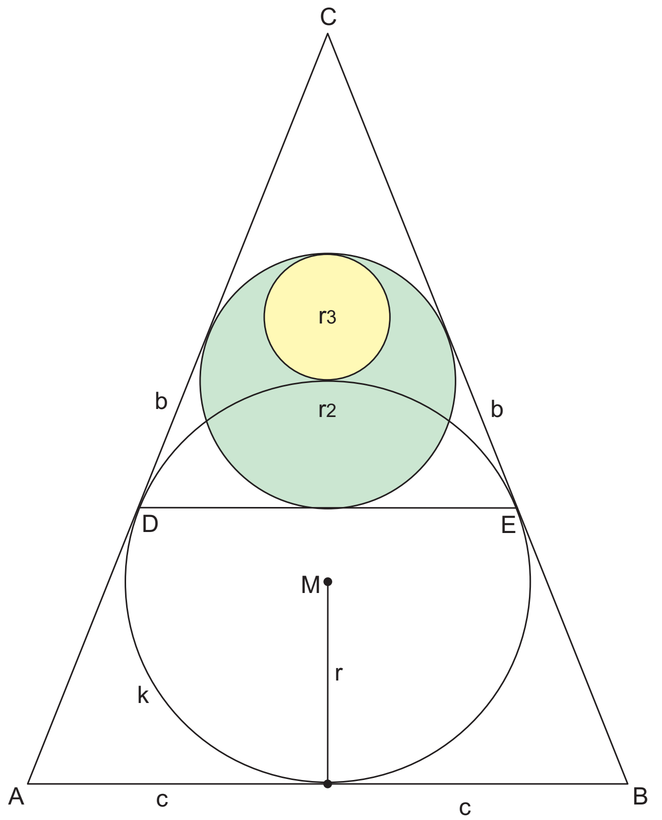

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe

Gegeben sei das gleichschenklige Dreieck A, B, C mit den Seitenlängen $b = AC = BC$ und $2\,c = AB$. Dem Dreick ist der Inkreis k mit Radius r einbeschriben. Der Inkreis berührt die Dreieckseiten AC, BC in den Punkten D, E. Dem Dreieck D, E, C ist ebenfalls der Inkreis mit Radius r_2 einbeschrieben (Abb. 1). Ein Kreis mit Radius r_3 berührt den Inkreis von A, B, C und D, E, F. Bestimme das Verhältnis der Radien $r_2 \div r_3$

Lösungsvorschlag

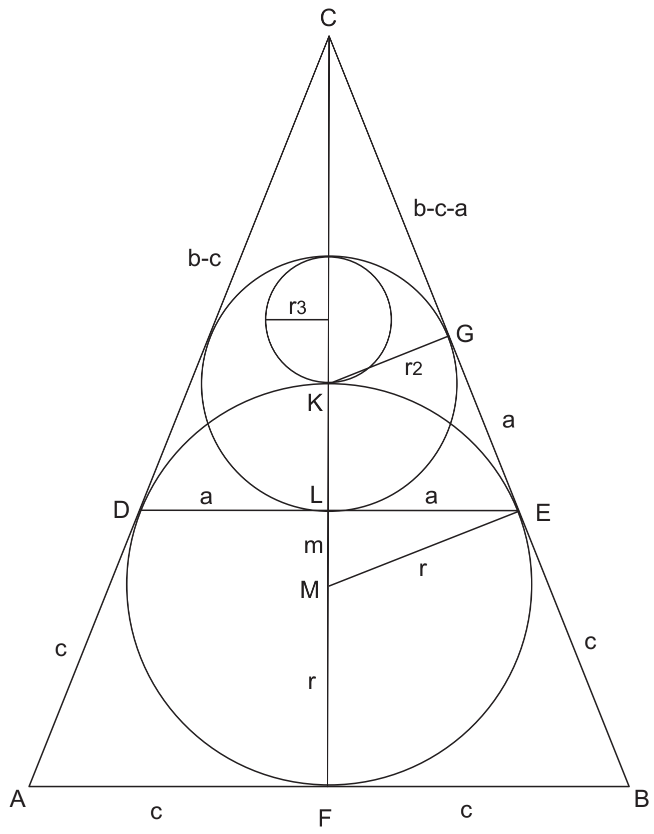

Abbildung 2: Skizze zur Lösung

Die Punkte- und Streckenbezeichner seien nach Abbildung 2 gewählt. Vom Punkt B sind die Tangentenabschnitte an den Inkreis k gleich lang:

$$c = BD = BE \tag{1}$$

ebenso die Tangentenabschnitte vom Punkt E and den Inkreis von Dreieck DEC:

$$a = EL = EG \tag{2}$$

und vom Punkt C an den Inkreis k:

$$b - c = CD = CE \tag{3}$$

Alle in Zeichnung 2 erkennbaren rechtwinkligen Dreicke sind einander ähnlich. Wir können folgende Verhältnisse aufstellen:

$$\frac{b-c}{a} = \frac{b}{c} \quad \rightarrow \quad a = \frac{(b-c)\cdot c}{b} \tag{4}$$

und

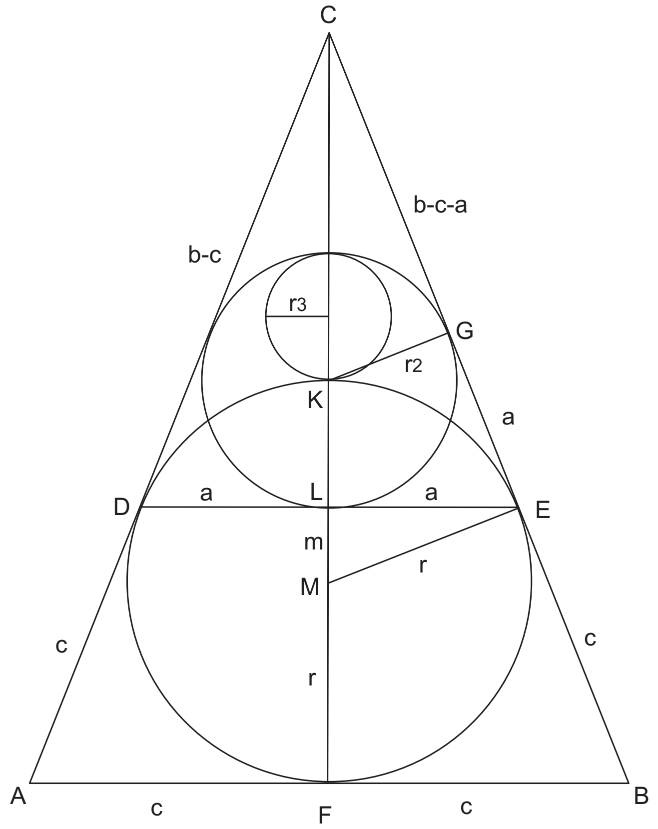

Abbildung 3: Skizze zur Lösung

$$\frac{b-c-a}{r_2} = \frac{b-c}{r} \quad \rightarrow \quad r_2 = \frac{(b-c-a)\cdot r}{b-c} \tag{5}$$

Wir erstezen a mit dem Ergebnis aus (4) und erhalten:

$$r_2 = \frac{(b-c-\frac{(b-c)\cdot c}{b})\cdot r}{b-c} = r - \frac{r\cdot c}{b} \tag{6}$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CFB und ELM folgt:

$$\frac{m}{r} = \frac{c}{b} \quad \rightarrow \quad m = \frac{r\cdot c}{b} \tag{7}$$

Wir addieren jetzt $m + r_2$ und erhalten:

$$m + r_2 = \frac{r\cdot c}{b} + r - \frac{r\cdot c}{b} = r \tag{8}$$

Damit ist gezeigt, dass die Strecke MK genau dem Radius r entspricht. Es muss demnach $r_2 = 2\cdot r_3$ gelten.