San-Gaku Problem

Peter G.Nischke

22. März 2017

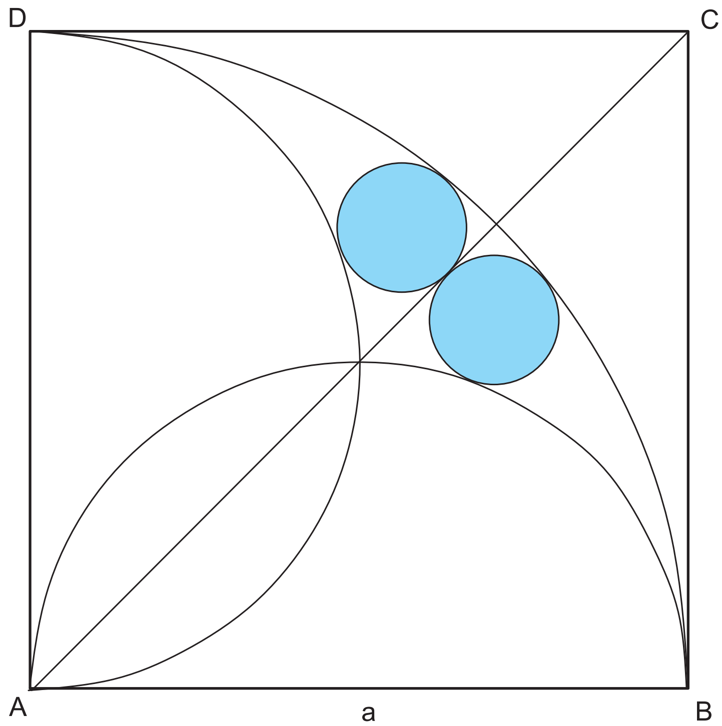

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe

Gegeben ist das Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a und der Diagonalen AC. Über den Seiten AB und AD ist je ein Halbkreisbogen eingezeichnet. Von B nach D läuft ein Viertelkreisbogen mit Radius $a = AB$. Bestimme den Radius r der beiden blauen Kreise, welche die Diagonale, die Halbkreisbögen und den Viertelkreisbogen berühren.

Lösungsvorschlag

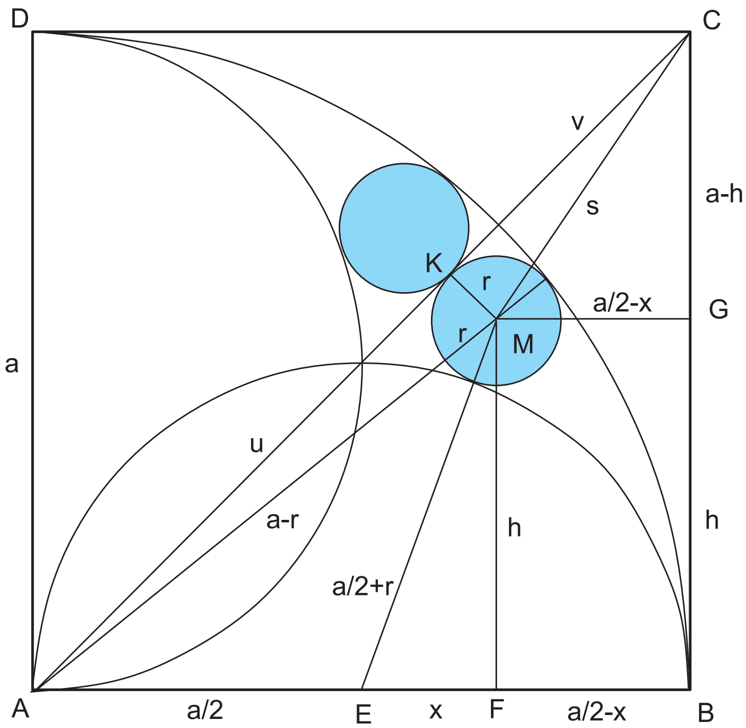

Abbildung 2: Skizze zur Lösung

Es seien die Punkte- und Streckenbezeichner nach Abbildung 2 vereinbart. Mit Hilfe des Pythagoras lassen sich folgenden Beziehungen aufstellen:

$$\triangle EMF: \quad x^2 + h^2 = \left(\frac{a}{2} + r\right)^2 \tag{1}$$

$$\triangle AMF: \quad \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + h^2 = (a - r)^2 \tag{2}$$

Die Diagonale $a = AC$ setzt sich aus den Abschnitten $u = AK$ und $v = KC$ zusammen.

$$\triangle AMK: \quad u^2 = (a - r)^2 - r^2 \quad \rightarrow \quad u = \sqrt{a^2 - 2\,a\,r} \tag{3}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{2}\,a = u + v \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2}\,a - \sqrt{a^2 - 2\,a\,r} \tag{4}$$

$$\triangle CKM + \triangle CMG: \quad s^2 = (a - h)^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = v^2 + r^2 \tag{5}$$

$$(a - h)^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\sqrt{2}\,a - \sqrt{a^2 - 2\,a\,r}\right)^2 + r^2 \tag{6}$$

Die Gleichungen (1), (2) und (6) werden nach den Unbekannten r, h, x mit Hilfe eines CAS Programms aufgelöst: