Sangaku Problem

Kinjiro Takasaka

Isaniwa Shrine in Ehime Prefecture

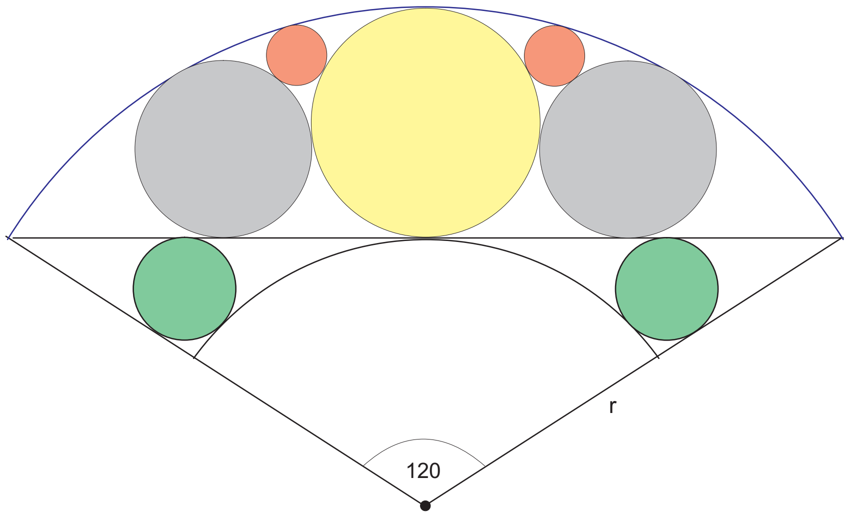

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe

Gegeben sei ein Kreissektor mit einem Öffnungswinkel von 120° und dem Radius r. Dem Kreissektor seien 7 Kreise einbeschrieben, wie es in Abbildung 1 gezeigt ist.
Bestimme die Radien aller Kreise in Abhängigkiet vom Kreissektorradius r.
Sei c der Radius vom roten Kreis und d der Radius vom grünen Kreis. Zeige das dann gilt:

$$c = d \cdot \frac{\sqrt{3072} + 62}{193} \tag{1}$$

Lösungsvorschlag

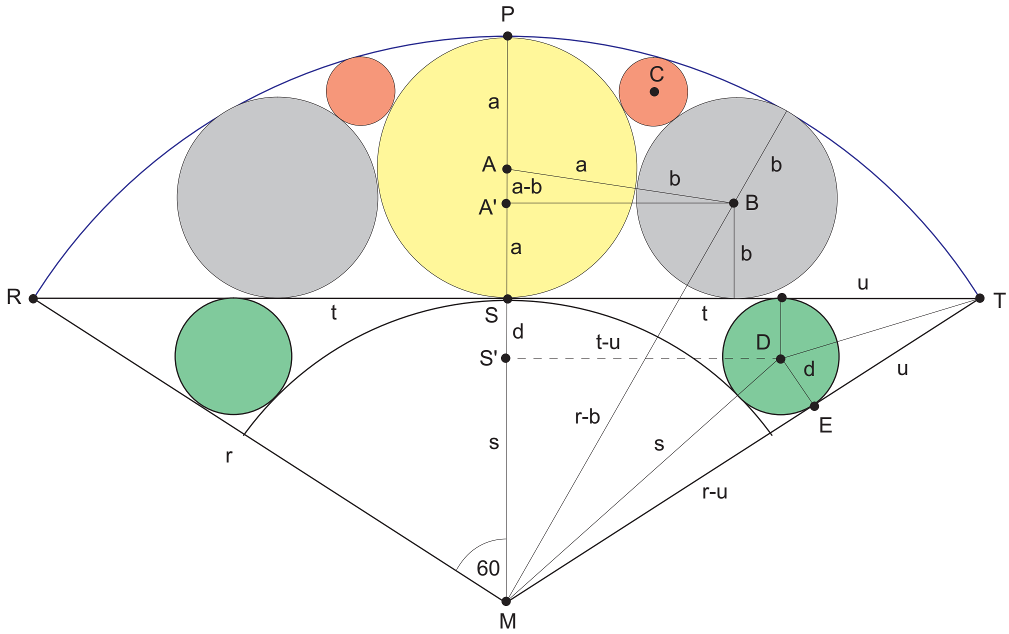

Abbildung 2: Skizze zur Bestimmung von a, b, d

Die Strecken- und Punktebezeichner seien entsprechend Abbildung 2 gewählt. Im rechtwinkligen Dreieck MST mit dem Winkel $\sphericalangle SMT = 60°$ gilt:

$$s = r \cdot \cos 60° = \frac{r}{2}, \quad t = r \cdot \sin 60° = \frac{r\sqrt{3}}{2} \tag{2}$$

Aus der Strecke $r = \overline{MP}$ können wir den Radius a bestimmen:

$$r = s + 2\,a \quad \rightarrow \quad a = \frac{r-s}{2} = \frac{r}{4} \tag{3}$$

Im Berührungsdreieck $MA'B$ gilt:

$$\triangle MA'B: \quad (r-b)^2 = (s+a)^2 + 4\,a\,b \quad \rightarrow \quad b = \frac{3\,r}{16} \tag{4}$$

Der *Satz des Pythagoras* liefert für:

$$\triangle MS'D: \quad (s+d)^2 = (s-d)^2 + (t-u)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{r\sqrt{3}}{2} - u = \sqrt{2\,r\,d} \tag{5}$$

und

$$\triangle MDE: \quad (s+d)^2 = d^2 + (r-u)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{r^2}{4} + r\,d = (r-u)^2 \tag{6}$$

Aus den Gleichungen (5) und (6) erhalten wir für d, u:

$$d = \frac{3\,(2-\sqrt{3})\,r}{2\,(2+\sqrt{3})}, \qquad u = \frac{3\,r}{2\,(2+\sqrt{3})} \tag{7}$$

Bestimmung von Radius c

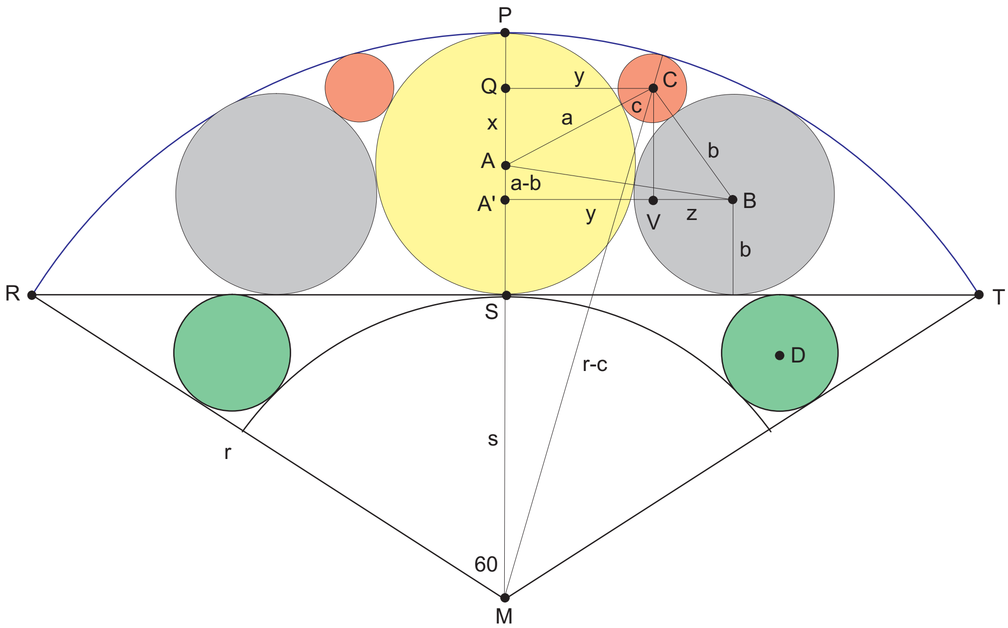

Abbildung 3: Skizze zur Bestimmung von Radius c

Es ergeben sich mit dem *Satz des Pythagoras* die folgende Gleichungen:

$$\triangle MQC: \quad (r-c)^2 = (s+a+x) + y^2 \tag{8}$$

$$\triangle ABA': \quad y + z = 2\sqrt{a\,b} \tag{9}$$

$$\triangle CVB: \quad (c+b)^2 = z^2 + (x+a-b)^2 \tag{10}$$

$$\triangle AQC: \quad x^2 + y^2 = (a+c)^2 \tag{11}$$

Nach Auflösung erhalten wir:

$$c = \frac{3}{193}\left(25 - 12\sqrt{3}\right) r, \qquad x = \frac{1}{772}\left(-307 + 240\sqrt{3}\right) r,$$

$$y = \frac{2}{193}\left(3 + 14\sqrt{3}\right) r, \qquad z = \frac{3}{772}\left(-8 + 27\sqrt{3}\right) r$$

und schließlich:

$$\frac{c}{d} = \frac{2\,(2+\sqrt{3})}{193\,(2-\sqrt{3})}\left(25 - 12\sqrt{3}\right) = \frac{62 + 32\,\sqrt{3})}{193} = \frac{62 + \sqrt{3 \cdot 1024})}{193} \tag{12}$$