Acht schwebende Kreise

ein Sangaku Problem aus dem Buch *5000 Jahre Geometrie*

8. Februar 2008

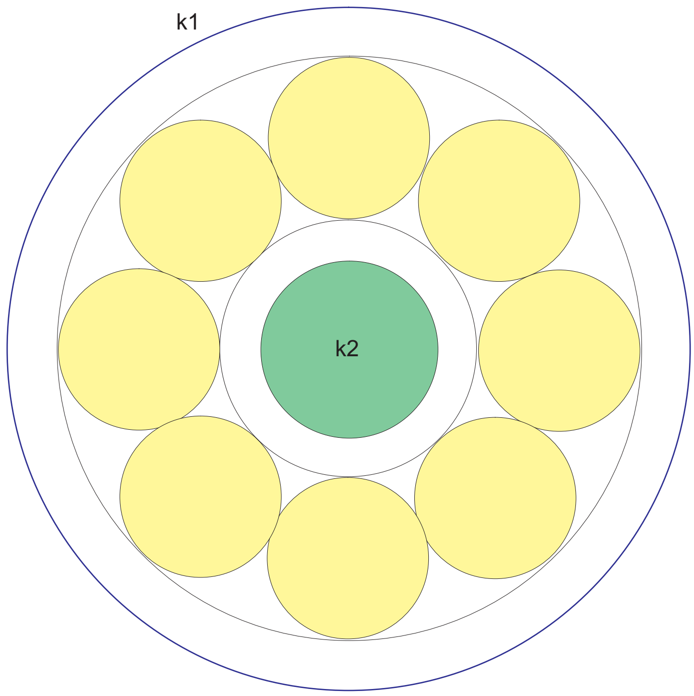

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe

Gegeben sei der Kreis k_1 mit einem Durchmesser von drei Fuss. Dem Kreis k_1 ist mittig der Kreis k_2 einbeschrieben. Weiterhin befinden sich acht gleich große Kreise so zwischen k_1 und k_2 platziert, dass ihr Abstand zu beiden Kreisen jeweils 0.2 Fuss beträgt und sich je zwei dieser Kreise untereinander berühren (siehe Abbildung 1).
Berechne den Radius von k_2 und den Radius der anderen 8 Kreise.

Lösungsvorschlag

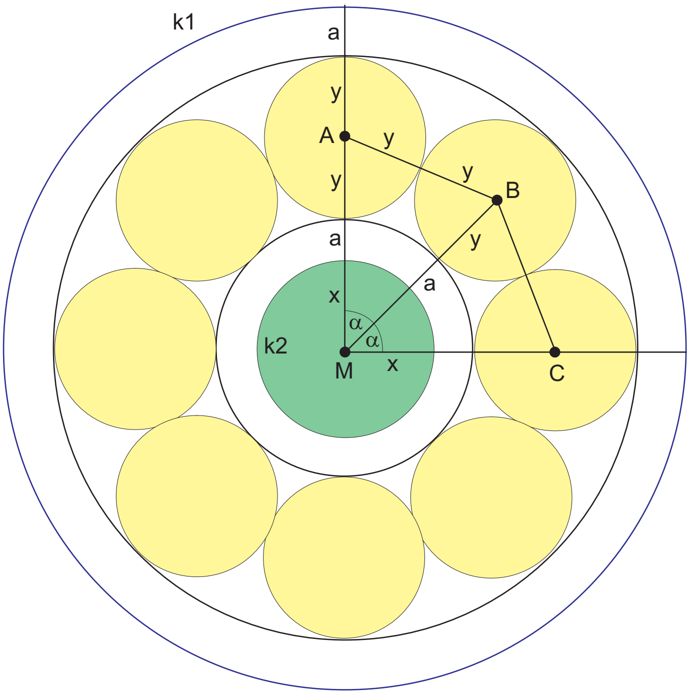

Abbildung 2: Skizze zur Lösung

Die Strecken- und Punktebezeichner seien entsprechend Abbildung 2 gewählt. Für den Fall das sich die acht Kreise exakt in je einem Punkt berühren gilt für den Radius r von k_1 die Gleichung:

$$r = x + 2\,a + 2\,y \tag{1}$$

Der Winkel $\alpha = \sphericalangle AMB$ beträgt $2\,\pi/8 = 45°$. Im Dreieck AMD können wir den Cosinussatz anwenden:

$$\triangle AMB: \quad (y+y)^2 = 2\cdot(x+a+y)^2\cdot(1-\cos\alpha) \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) werden mit Hilfe eines CAS Programms nach x, y aufgelöst. Für $r = 3/2$ und $a = 1/5$ erhalten wir:

$$x_1 = \frac{1}{10}\left(89 - 52\sqrt{2} - 26\sqrt{20-14\sqrt{2}}\right) \approx 0.380401 \tag{3}$$

$$y_1 = \frac{13}{10}\left(-3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{20-14\sqrt{2}}\right) \approx 0.359799 \tag{4}$$

Die vollständige Lösung für beliebiges a, r repräsentiert sich wie folgt:

$$x_1 = 4\left(-2+\sqrt{2}\right)a - 2\sqrt{2}\sqrt{-\left(-10+7\sqrt{2}\right)(a-r)^2} + \left(7-4\sqrt{2}\right)r$$

$$y_1 = \left(3-2\sqrt{2}\right)a + \sqrt{2}\sqrt{-\left(-10+7\sqrt{2}\right)(a-r)^2} + \left(-3+2\sqrt{2}\right)r$$

$$x_2 = 4\left(-2+\sqrt{2}\right)a + 2\sqrt{2}\sqrt{-\left(-10+7\sqrt{2}\right)(a-r)^2} + \left(7-4\sqrt{2}\right)r$$

$$y_2 = \left(3-2\sqrt{2}\right)a - \sqrt{2}\sqrt{-\left(-10+7\sqrt{2}\right)(a-r)^2} + \left(-3+2\sqrt{2}\right)r$$

Nach einsetzen der numerischen Werte für $a = 1/5$, $r = 3/2$ erhält man:

$$x_1 = \frac{1}{10}\left(89-52\sqrt{2}-26\sqrt{20-14\sqrt{2}}\right) \approx 0.380401$$
$$y_1 = \frac{13}{10}\left(-3+2\sqrt{2}+\sqrt{20-14\sqrt{2}}\right) \approx 0.359799$$
$$x_2 = \frac{1}{10}\left(89-52\sqrt{2}+26\sqrt{20-14\sqrt{2}}\right) \approx 2.71178$$
$$y_2 = -\frac{13}{10}\left(3-2\sqrt{2}+\sqrt{20-14\sqrt{2}}\right) \approx -0.805889$$

d.h. das zweite Lösungspaar besitzt für die Aufgabe keine Gültigkeit, da $y > 0$ sein muß.