Sangaku Problem

aus dem Buch *5000 Jahre Geometrie*

11. Februar 2008

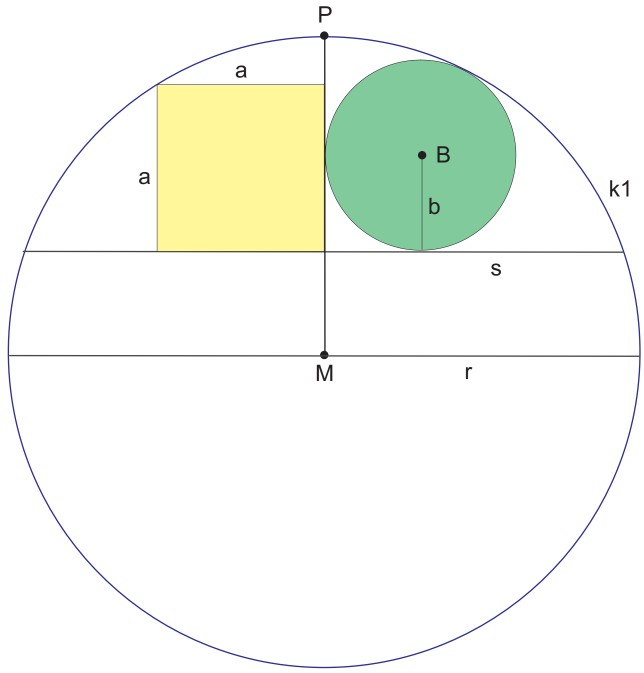

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe

Gegeben sei der Kreis k_1 mit Radius r, Mittelpunkt M und Sehne s. Die Sehne werde von der Strecke $\overline{MP}$ mittig geteilt. Dem rechten Teil zwischen Sehne und Kreisbogen werde der größtmögliche Kreis einbeschrieben. Im linken Teil befinde sich das größtmögliche Quadrat (eine Seite liegt auf der Sehne und die andere Seite auf der Strecke $\overline{PM}$). Bestimme den Radius b vom einbeschriebenen Kreis und die Seitenlänge a vom Quadrat.

Lösungsvorschlag

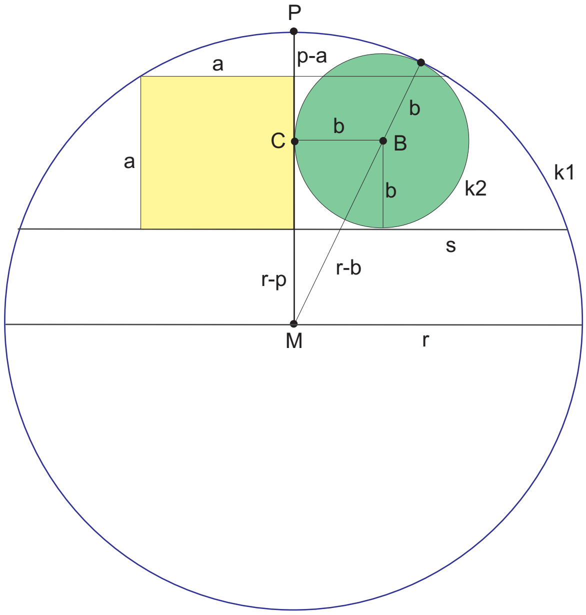

Abbildung 2: Skizze zum Lösungsweg

Die Punkte- und Streckenbezeichner seien nach Abbildung 2 gewählt. Die Strecke $p = \overline{PM}$ bestimmen wir aus dem Sehnensatz im Kreis k_1:

$$k_1 : \qquad p \cdot (2\,r - p) = \frac{s^2}{4} \tag{1}$$

Im rechtwinkligen Dreieck MBC gilt der Satz des Pythagoras:

$$\triangle MBC : \quad (r - b)^2 = b^2 + (b + r - p)^2 \tag{2}$$

Zur Bestimmung der Quadratseite a können wir ebenfalls den Sehnsatz zur Anwendung bringen:

$$k_1 : \qquad a^2 = (p - a) \cdot (2\,r - p + a) \tag{3}$$

Die Gleichungen (1), (2) und (3) werden nach p, a, b mit Hilfe eines CAS Programms aufgelöst:

$$a = \frac{1}{4}\left(-\sqrt{4\,r^2 - s^2} + \sqrt{4\,r^2 + s^2}\right)$$

$$b = -r - \frac{1}{2}\sqrt{4\,r^2 - s^2} + \sqrt{r\left(2\,r + \sqrt{4\,r^2 - s^2}\right)}$$

$$p = r - \frac{1}{2}\sqrt{4\,r^2 - s^2}$$