Das Weihnachtsplätzchenwürfelspiel

Christian Schröder

Matheon Adventskalender, 10. Dezember 2016

Drei Weihnachtswichtel fragen den Weihnachtsmann nach seinen berühmten, leckeren Weihnachtsplätzchen. Ihnen tropft bereits der Zahn, wenn sie nur daran denken. Sie möchten gern wieder welche naschen. Der Weihnachtsmann willigt ein, aber nur nach seinen Regeln eines Würfelspiels. Das Spiel beginnt mit sechs leeren Tellern, durchnummeriert von eins bis sechs. Die Wichtel wechseln sich reihum dabei ab, mit einem fairen, traditionellen Würfel zu würfeln. Die gewürfelte Zahl, z. B. eine fünf , gehört genau zu dem Teller mit der Nummer, die gewürfelt wurde, im Beispiel die Fünf. Auf diesem Teller liegt zu Beginn kein Plätzchen. Der Weihnachtsmann legt ein Plätzchen auf diesen Teller. Der nächste Wichtel ist mit dem Würfeln an der Reihe. Würfelt er eine Zahl, zu der ein Teller mit Plätzchen gehört, dann darf er dieses Plätzchen essen, anderenfalls legt der Weihnachtsmann wieder ein Plätzchen auf den Teller und der nächste Wichtel ist an der Reihe. Das Spiel wird, solange es leere Teller gibt, wie beschrieben fortgesetzt. Gibt es also noch leere Teller, dann wird weitergewürfelt. Sollten mit dem neuen Plätzchen hingegen alle sechs Teller besetzt sein, so darf der letzte Würfler alle sechs Plätzchen essen und das ganze Spiel ist beendet. Wie viele Plätzchen werden bei diesem Spiel durchschnittlich insgesamt gegessen?

Antwortmöglichkeiten:

1. 6
2. 6,3
3. 12
4. 27,2
5. 31,4
6. 42
7. 44,6
8. 47
9. 83,2
10. unendlich viele

Anmerkungen zum Aufgabentyp

Die Aufgabe ist eine Kombination aus dem Sammlerproblem und einem Irrläuferproblem. Beim Sammlerproblem geht es darum eine vollständige Serie zu erhalten, d.h. nach wie vielen Würfen liegt auf jedem Teller mindestens ein Keks, ohne das zwischendurch Kekse weggenommen werden. Bei 6 Tellern wären es 14.6 Würfe im Durchschnitt. Beim Irrläuferproblem startet man in einem Startpunkt und bewegt sich vor bzw. zurück in einer Kette. Die Frage ist nach wie vielen Würfen erreicht man einen n-Schritte entfernt liegenden Punkt in der Kette. Beide Probleme lassen sich mit Hilfe von Markovketten modellieren.

Lösungsvorschlag 1: Simulation

Bei komplizierten Problemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung bleibt oft nur die Simulation als Lösungsweg. Im CAS Mathematica sieht der Programmablauf wie folgt aus. Die 6 Teller unserer Wichtel werden je einer Position in einer Liste mit 6 Einträgen (`list1[]`) zugeordnet. Im Grundzustand initialisieren wir alle Plätze mit einer 0 (`list1 = Table[0, {i, 1, 6}]`). Ein Null bedeutet kein Keks auf dem Teller. Eine 1 bedeutet ein Keks liegt auf dem Teller.
Im nächsten Schritt wird per Zufallsgenerator eine Zahl von 1 .. 6 gewürfelt (`w = RandomInteger[{1, 6}]`). Es wird nun geprüft, ob auf dieser Position in der Liste eine 0 steht. Wenn ja so wird die Position mit einer 1 überschrieben. Befindet sich eine 1 auf der Position wird dort eine 0 eingetragen und der Keksezähler s um eins erhöht. Das Ganze wird so lange wiederholt, bis alle Elemente der Liste auf 1 stehen (`While[Count[list1, 1] < 6`). Dann wird der Keksezähler noch einmal um 6 erhöht, da ja der letzte Würfler alle Kekse essen darf. In einer äußeren Schleife wird der Prozess 100000 mal wiederholt. Dabei wird der Keksezähler auf der Variablen m aufsummiert. Ein weiterer Zähler u bzw. l registrieren wie oft im Durchschnitt gewürfelt wurde. Anschließend wird der Durchschnittswert des Keksezählers ermittelt.

```
n = 100000; m = 0; l = 0;
For[k = 1, k < n, k++, s = 0; u = 0;
  list1 = Table[0, {i, 1, 6}];
    While[Count[list1, 1] < 6,
     w = RandomInteger[{1, 6}];
     If[list1[[w]] == 0, list1[[w]] = 1, list1[[w]] = 0; ++s];
     ++u];
    m += (s + 6);
  l += u ];
  N[m/n] = 44.71
  N[l/n] = 83.42
```

Wir erhalten als Durchschnittswerte $s = 44.71$ und $u = 83.4$. Es werden demnach durchschnittlich 44.7 Kekse verputzt und es muss ca 83 mal gewürfelt werden.

Lösungsvorschlag 2: Markovketten

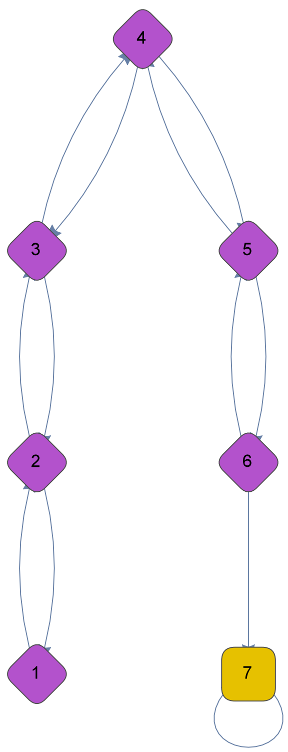

Abbildung 1: Die sieben Zustände der Markovkette

Bei geänderter Fragestellung könnte man das Problem auch mittels einer Markovkette lösen. Wie viele male müssen die Wichtel im Durchschnitt würfeln bis das Spiel beendet ist? Wir denken uns 7 Zustände, wobei Zustand 1 bedeutet alle Teller sind leer und Zustand 7 bedeutet auf allen Tellern liegt ein Keks. Wir können dann eine Matrix mit den Übergangswahrscheinlichkeiten für diese 7 Zustände aufstellen.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Gesucht ist die mittlere Schrittzahl um vom Startzustand 1 zum Endzustand 7 zu gelangen. In Mathematica sieht die Auswertung der Markovkette wie folgt aus:

```
proc1 = DiscreteMarkovProcess[{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, M1];
gr1 = Graph[proc1]
MarkovProcessProperties[proc1]
first1 = FirstPassageTimeDistribution[proc1, 7];
Mean[first1] // N
83.2
```

Je Spiel wird im Durchschnitt 83 mal gewürfelt.

Lösungsvorschlag 3: Erwartungswert

Jutta Gut, Wien

Sei E+ der Erwartungswert für die Anzahl der Würfe, bei denen ein Keks dazukommt (Schritte vorwärts), und E- für die Würfe bei denen ein Keks weggenommen wird (Schritte rückwärts). Um von 0 nach 6 zu kommen, muss man um 6 Schritte mehr vorwärts als rückwärts gehen:

$$(E+) - (E-) = 6 \tag{2}$$

$$(E+) + (E-) = 83.2 \quad \rightarrow \quad E+ = 44.6 \tag{3}$$