Gewinnchancen bei einem Zufallsspiel

Ein Beitrag über Computerzahlen, Münzwurfprobleme und Markow-Ketten

mit Lösungsvorschlägen von Wolfgang Kirschenhofer, Eugen Willerding und Ingmar Rubin

Die Aufgabe für den Computerfan aus MONOID Heft 120

Ein Automat, der zufällig Nullen und Einsen erzeugt, bietet folgendes Spiel für zwei Gegner an: Die beiden Spieler wählen sich jeweils verschieden dreistellige Muster aus Nullen und Einsen. Daraufhin erzeugt der Automat solange Nullen und Einsen, bis eines der beiden Muster auftritt. Gewonnen hat derjenige Spieler, der dieses Muster gewählt hatte.
Die beiden Geschwister Alice und Bert sind von diesem Spiel fasziniert. Alice wählte die Sequenz 010 und Bert entscheidet sich für 111. Wer gewinnt öfter? Gibt es eine optimale Sequenz?

Anmerkungen zur Aufgabe

Die geschilderte Aufgabenstellung kann mit dem fortlaufenden Werfen eine fairen Münze verglichen werden. Dabei sei Kopf = 0 und Zahl = 1 vereinbart. Beide Spieler werfen nun so lange die Münze bis ihre Kopf-Zahl Folge auftaucht.
In der Literatur /1/ .. /4/ und im Internet /5/ findet man ähnliche Aufgaben unter dem Begriff *Penney Ante Spiel* oder *coin tossing problems*. Die Ausführungen in /5/ (www.plus.maths.org) zeigen verschiedene Lösungsansätze für das Problem. In einer Tabelle werden die Gewinnchancen für alle 28 Kombinationen (2 aus 8) gezeigt. Die Unterschiede in den Gewinnchancen erscheinen zunächst paradox, da man vermutet das jede der 8 möglichen Dreierfolgen die gleiche Wahrscheinlichkeit von $0.5^3 = 0.125$ hätte.
Wir beginnen mit einer Computersimulation und erhalten so einen ersten Überblick zu den Gewinnchancen von Alice und Bert. Der Hauptteil des Artikels zeigt einen Lösungsansatz mittels Markow-Ketten.

Simulation mit Mathematica

von Dr. Eugen Willerding, Bonn

Das CAS Programm Mathematica verfügt über einen leistungsfähigen Befehlsatz zur Erzeugung von Zufallslisten und deren Auswertung. Das folgende Programm wiederholt 1000 mal das Spiel von Alice und Bert und zählt die dabei erziehlten Gewinne. Am Ende wird der Quotient der gewonnenen Spiele durch die Gesamtzahl NP geteilt und man erhält die jeweilge Gewinnchance.

```
NP = 1000;
Do[automat = RandomInteger[1, 100];
game = Table[Take[automat, {k, k + 2}], {k, 1, 98}];
F[j] = {Min[Position[game, {0, 1, 0}]],
        Min[Position[game, {1, 1, 1}]]}, {j, 1, NP}];
Sieger = Table[Flatten[Position[F[j], Min[F[j]]]], {j, 1, NP}];
N[{Count[Sieger,{1}], Count[Sieger,{2}]}/NP,4]
{0.5830, 0.4170}
```

Die folgende Tabelle zeigt die Gewinnchancen für Alice und Bert. Bert hat sich auf '111' festgelegt, während Alice verschiedene Strategien probiert (also nicht nur '010' wie in der Aufgabe).

Alice	Bert	Gewinn A.	Gewinn B.
000	111	0.500	0.500
001	111	0.700	0.300
010	111	0.583	0.417
011	111	0.875	0.125
100	111	0.602	0.398
101	111	0.615	0.385
110	111	0.500	0.500

Die Ergebnisse zeigen, dass '011' gegen '111' die größte Gewinnchance bietet. In /5/ findet man eine Tabelle, die für alle 28 Kombinationen (2 aus 8 = 28) die Gewinnchancen zeigt.

Modellierung mit absobierenden Markow-Ketten

von Wolfgang Kirschenhofer, Herzogenburg

Das Problem läßt sich mit Hilfe von Markow-Ketten modellieren. Als Litera-

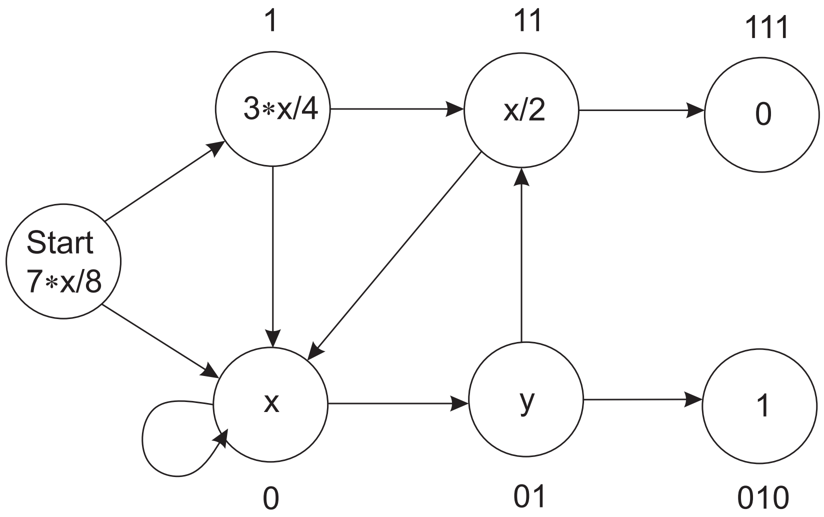

Abbildung 1: Zustandsgraph für das Spiel '010 gegen '111'

turquelle wurde /6/ Arthur Engel: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 2 verwendet. Ergänzend seien /7/, /8/ und die Beiträge von G.Roolfs aus /9/ empfohlen.
Wir verwenden die Begriffe aus dem Kapitel 'Markow-Ketten' und insbesondere die sogenannte '1.Mittelwertregel'. Im gerichteten Graphen (Abb. 1) sind die Zustände 111 und 010 absorbierend. Die Menge $R := 111, 010$ ist der **'Rand'** der Markow-Kette. Die Zustände, die nicht zu R gehören, werden **'innere Zustände'** genannt. Um die Gewinnwahrscheinlichkeit für Alice zu ermitteln betrachten wir die Teilmenge $T := 010$ von R. Für Alice gilt: Wahrscheinlichkeit $p_{010} = 1$ und $p_{111} = 0$. Wir ermitteln die Wahrscheinlichkeit p_i vom inneren Zustand i aus T zu erreichen. Geht i in die beiden ('benachbarten') Zustände j und k über, dann gilt nach der 1.Mittelwertregel:

$$p_i = \frac{1}{2} \cdot (p_j + p_k) \qquad (*) \tag{1}$$

Im Diagramm 1) sind alle Übergangswahrscheinlichkeiten gleich $1 \div 2$. Sie sind daher nicht eingetragen. In jedem Kreis des Diagramms steht die Wahrscheinlichkeit vom betreffenden Zustand aus den Zustand 010 zu erreichen. Wir ermitteln diese mit Hilfe der Regel (*) schrittweise ausgehend von $p_{010} = 1$ und $p_{111} = 0$. Nach (*) ist $p_{11} = x/2$ und weiter

$$p_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{x}{2}\right) = \frac{3\,x}{4} \quad \text{und} \quad p_{Start} = \frac{7\,x}{8} \tag{2}$$

ist dann die Gewinnwahrscheinlichkeit für Alice. x und y ermitteln wir wieder mit Hilfe der Regel (*). Es gelten die Gleichungen

$$x = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \tag{3}$$

und

$$y = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{y}{2}\right) \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt:

$$x = y = \frac{2}{3} \tag{5}$$

Die Gewinnwahrscheinlichkeit für Alice ist daher:

$$p_{Start} = \frac{7}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{12} \tag{6}$$

Die Gewinnwahrscheinlichkeit für Bert ist daher $1 - p_{Start} = 5/12$. Wir behandeln

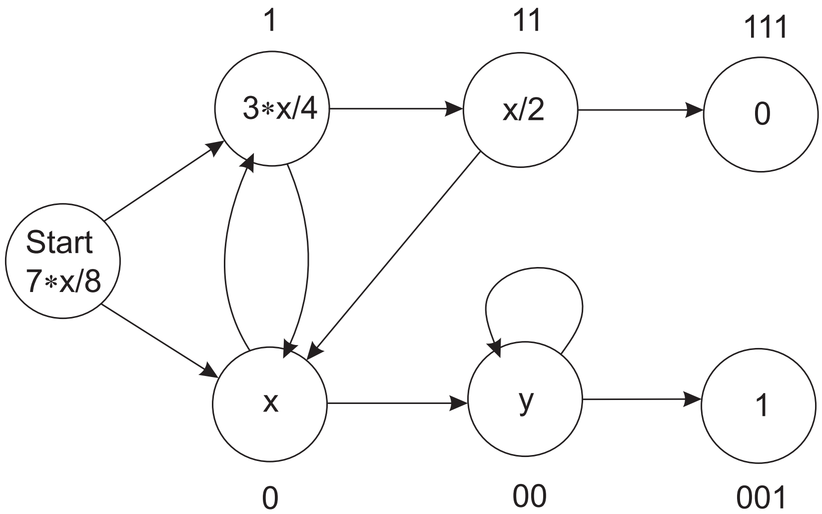

Abbildung 2: Zustandsgraph für das Spiel '001 gegen '111'

nun ergänzend den Fall, daß Bert wieder die Folge 111 wählt, aber Alice jetzt die Folge 001 . Wir haben jetzt den Zustandsgraphen nach Abb. 2. Die Wahrscheinlichkeiten ermitteln wir wieder schrittweise: Es gelten die Gleichungen:

$$x = \frac{3\,x}{8} + \frac{y}{2} \tag{7}$$

und

$$y = \frac{1}{2} \cdot (1 + y) \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt $x = 4/5$ und $y = 1$ Die Gewinnwahrscheinlichkeit für Alice ist daher

$$p_{Start} = \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{10} \tag{9}$$

Die Gewinnwahrscheinlichkeit für Bert ist daher $1 - p_{Start} = 3/10$

Modellierung mit Markow-Ketten und Lösung im CAS Mathematica

von Ingmar Rubin, Berlin

Wir beginnen die Betrachtung zunächst nur für Bert, d.h. es wird solange gewor-

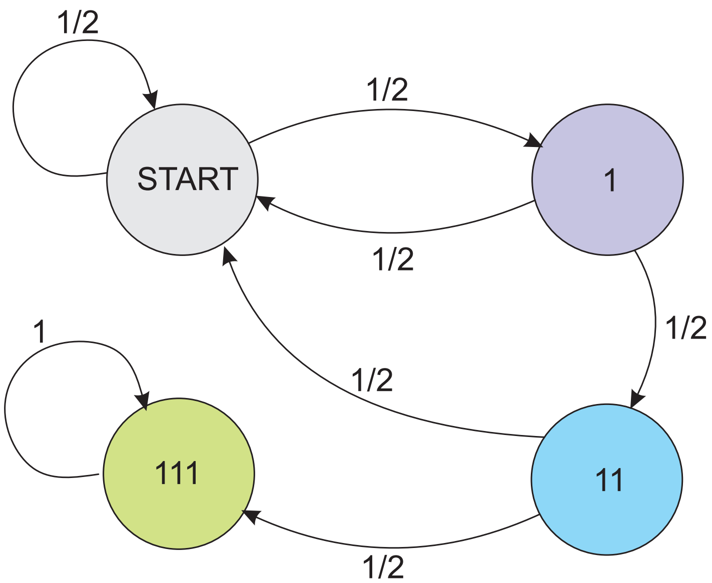

Abbildung 3: Zustandsgraph für das Erreichen von '111'

fen bis die Folge '111' (bzw. bei der Münze 'KKK') erscheint. Im ersten Ansatz würde man vermuten, dass die Chancen für jede beliebige Folge aus 3 Ziffern immer gleich sein müssten. Betrachtet man isoliert das dreimalige Werfen einer Münze, so ist tatsächlich für jede mögliche Dreiersequenz (z.B. 001 oder 110) die Wahrscheinlichkeit immer $1 \div 8$. In unserem Fall muss aber die Sequenz nicht nach dreimaligen Werfen erscheinen. Vielmehr wird eine bestimmte Anzahl an Würfen vergehen bis die gesuchte Folge auftritt. Wir suchen also den Erwartungswert für die Anzahl an Münzwürfen bis '111' erscheint. Ein solcher Vorgang kann mit einer Markow-Kette modelliert werden. Die Beiträge von G.Roolfs /7/ geben eine gute Einführung in die Thematik. Bis zum Erreichen von '111' können folgende Zustände auftreten:

- Start: das Spiel beginnt, es wird das erste Mal geworfen. Ist es Zahl geht es nach 1: ansonsten verbleiben wir bei Start
- 1: Es wurde 1 x Zahl geworfen. Es wird erneut geworfen. Ist es Zahl geht es weiter zu 11: ansonsten zurück nach Start
- 11: Es wurde 2 x Zahl geworfen. Es wird erneut geworfen. Ist es Zahl geht es weiter zu 111: ansonsten zurück nach Start
- 111: Es wurde 3 x Zahl geworfen, das Ziel ist erreicht

Abbildung 3 zeigt den Zustandsgraphen für '111'. Die Pfeile zeigen die Übergänge und deren Übergangswahrscheinlichkeiten an. Aus dem Graphen folgt die Übergangsmatrix M_1:

$$M_{111} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Im CAS Program *Mathematica* gibt es eine Reihe leistungsfähiger Kommandos, um eine Markow-Kette zu analysieren. Wir Interessieren uns für die mittlere Anzahl an Kanten bis wir vom Startzustand nach '111' gelangen. Die Kommandos sehen wie folgt aus (Erklärungen und Beispiele zu den Kommandos finden sich in der Onlinhilfe von Mathematica):

```
M1 = {{1/2,1/2,0,0},{1/2,0,1/2,0},{1/2,0,0,1/2},{0,0,0,1}};
proc1 = DiscreteMarkovProcess[1,M1];
Graph[proc1]
MarkovProcessProperties[proc1]
first1=FirstPassageTimeDistribution[proc1,4];
Mean[first1]
14
```

Die mittlere Kantenzahl vom Start bis nach '111' beträgt 14. Bert wird also durchschnittlich nach 14 mal werfen die gewünschte Folge '111' erhalten.

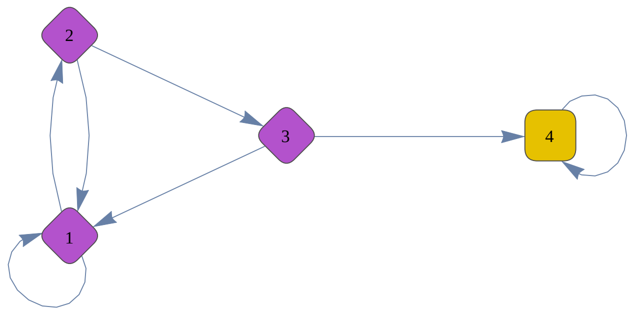

Abbildung 4: Zustandsgraph für '111' in Mathematica

Berechnung für '010'

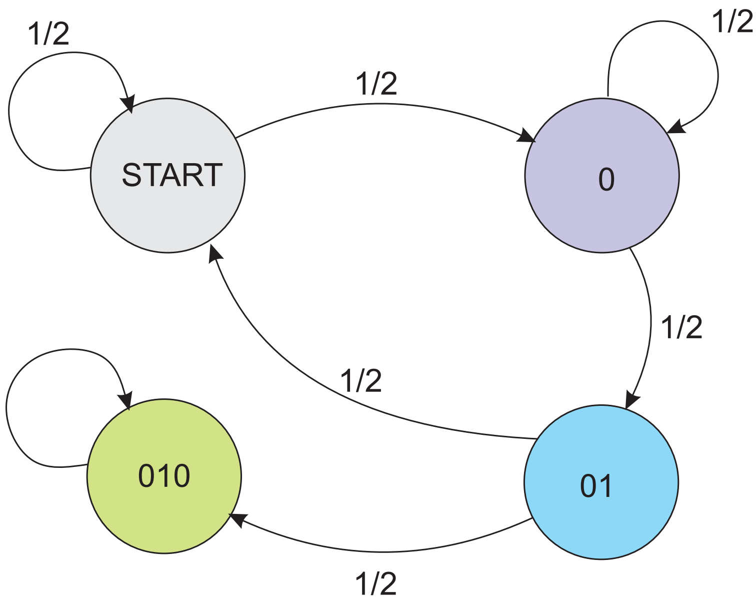

Abbildung 5: Skizze zum Graphen für '010' Aufagbe

Analog wie bei der Ziffernfolge '111' können wir einen Zustandsgraphen für '010' zeichnen. Als wesentlichen Unterschied erkennen wir, dass es vom Zustand '0' keine Verbindung zurück zum Start gibt. Haben wir eine Null und werfen nocheinmal eine Null so verbleiben wir im Zustand '0', da ja die Folge von Alice immer mit '0' beginnt. Wir werden also im Mittel schneller zum Ziel gelangen. Es ergibt sich als Übergangsmatrix:

$$M_{010} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

```
M2 = {{1/2,1/2,0,0},{0,1/2,1/2,0},{1/2,0,0,1/2},{0,0,0,1}};
proc2 = DiscreteMarkovProcess[1,M2];
Graph[proc2]
MarkovProcessProperties[proc2]
first2 = FirstPassageTimeDistribution[proc2,4];
Mean[first2]
10
```

Die mittlere Kantenzahl vom Start bis nach '010' beträgt zehn. Alice wird also duchschnittlich nach zehn mal werfen die gewünschte Folge '010' erhalten.

Berechnung für die Sequenz '001'

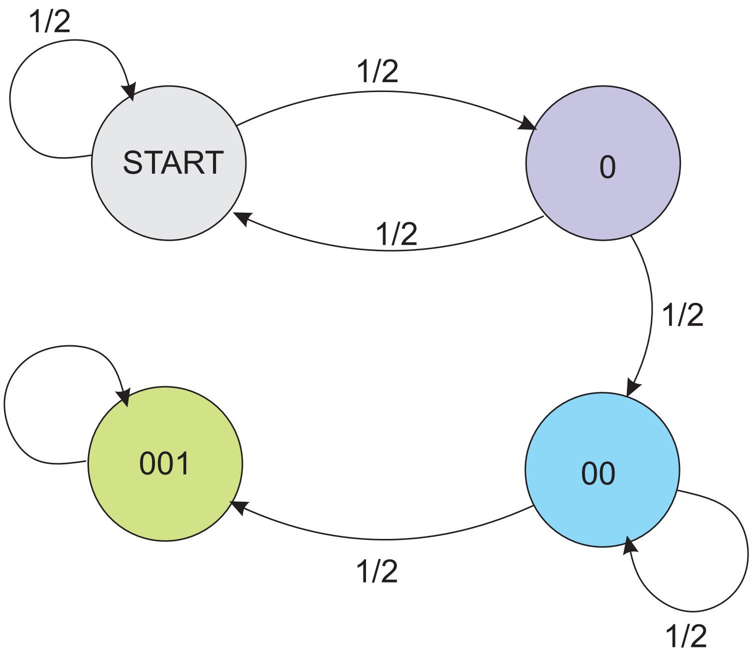

Abbildung 6: Zustandsgraph zum Erreichen der Sequenz '001'

Gibt es an Stelle von '010' eine noch bessere Folge? Die Untersuchung von '001' zeigt es geht noch besser! Abbildung 6 zeigt den Zustandgraphen. Die ersten beiden Zustände verhalten sich wie bei '111'. Der Vorteil von '001' liegt im Zustand 3 (es wurde bis dahin '00' geworfen). Haben wir einmal diesen Zustand erreicht, müssen wir nicht mehr zurück! Das Werfen weiterer Nullen zertstört nicht den notwenigen Beginn von '00'. Beim Werfen der nächsten '1' ist die Folge '001' erreicht. Zum Graphen aus Abbildung 6 ergibt sich die Übergangsmatrix:

$$M_{001} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

```
M3 = {{1/2,1/2,0,0},{1/2,0,1/2,0},{0,0,1/2,1/2},{0,0,0,1}};
proc2 = DiscreteMarkovProcess[1,M3];
Graph[proc3]
MarkovProcessProperties[proc3]
first3 = FirstPassageTimeDistribution[proc3,4];
Mean[first3]
8
```

Die mitteler Kantenzahl vom Start bis nach '001' beträgt 8.

Berechnung für die Sequenz '011'

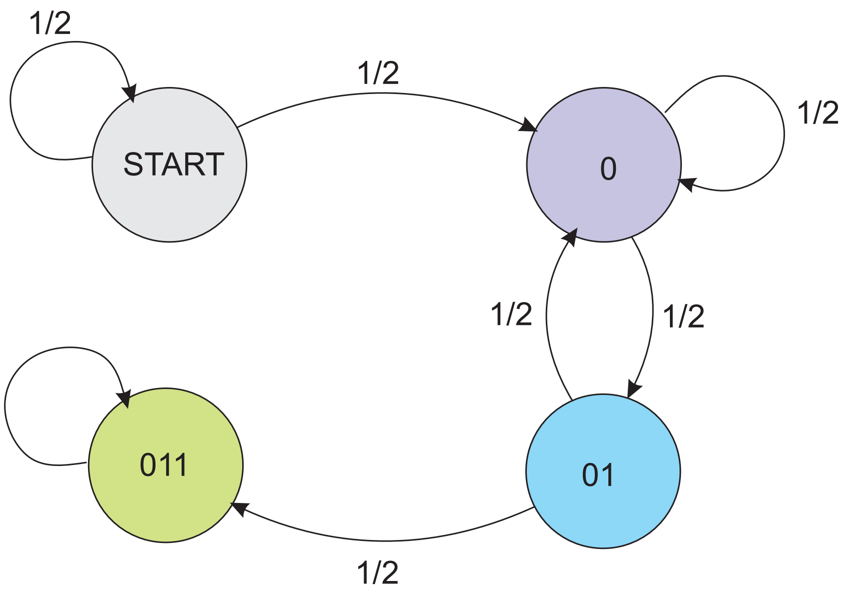

Abbildung 7: Zustandsgraph zum Erreichen der Sequenz '011'

Zum Abschluß sei die Folge '011' betrachtet. Abbildung 7 zeigt den Zustandsgraphen. Wir verbleiben solange in Start bis eine '0' geworfen wurde. Im Zustand '0' warten wir auf die nächste '1'. Von '01' müssen wir zurück nach '0' falls eine Null kommt andernfalls haben wir das Ziel erreicht. Zum Graphen aus Abbildung 7 ergibt sich die Übergangsmatrix:

$$M_{001} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

```
M4 = {{1/2,1/2,0,0},{0,1/2,1/2,0},{0,1/2,0,1/2},{0,0,0,1}};
proc2 = DiscreteMarkovProcess[1,M4];
```

```
Graph[proc3]
MarkovProcessProperties[proc3]
first4 = FirstPassageTimeDistribution[proc4,4];
Mean[first4]
8
```

Die mitteler Kantenzahl vom Start bis nach ’011’ beträgt 8.

Modellierung für das Spiel ’111’ gegen ’010’

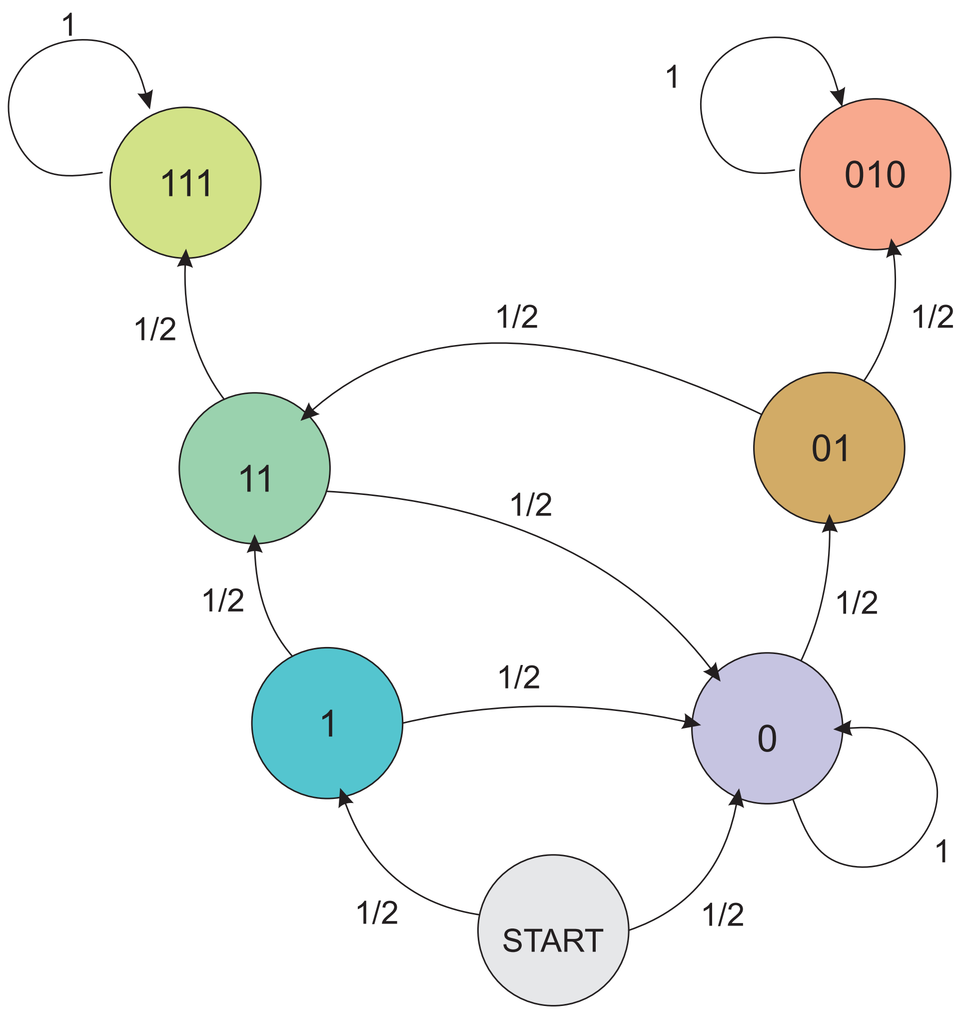

Abbildung 8: Zustandsgraph zum Erreichen von ’111’ oder ’010’

Die oben dargestellten Berechnungen gelten falls Alice und Bert vollkommen getrennt agieren, d.h. jeder wirft für sich eine Münze und wartet nur auf seine Sequenz. Laut Aufgabenstellung gibt es aber nur eine Maschine und gewonnen hat der, dessen Dreierfolge zuerst erscheint. Abbildung 8 zeigt den Zustandgraph.

Wir erkennen links den Zweig für Bert (Endzustand '111') und rechts den für Alice (Endzustand '010'). Zwischen den beiden Zweigen gibt es Übergänge.

- Start: das Spiel beginnt, die Maschine zeigt die erste Zahl. Ist es Null gehen wir zum Zustand '0' sonst zum Zustand '1'
- '1': die Maschine zeigt die nächste Zahl. Ist es 1 gehen wir nach '11' sonst nach '0'
- '11': die Maschine zeigt die nächste Zahl. Ist es 1 gehen wir nach '111'. Ist es Null gehen wir nach '0'
- '111': Bert hat gewonnen
- '0': die Maschine zeigt die nächste Zahl. Ist es 1 gehen wir nach '01', ist es 0 verbleiben wir im Zustand '0'
- '01': die Maschine zeigt die nächste Zahl. Ist es 1 gehen wir nach '11', ist es 0 gehen wir nach '010'
- '010': Alice hat gewonnen

Alle Übergänge - mit Ausnahme der beiden Endzustände - haben die Übergangswahrscheinlichkeit von 0.5. Die Übergangsmatrix lautet:

$$M_{111-010} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

und dazughörige:

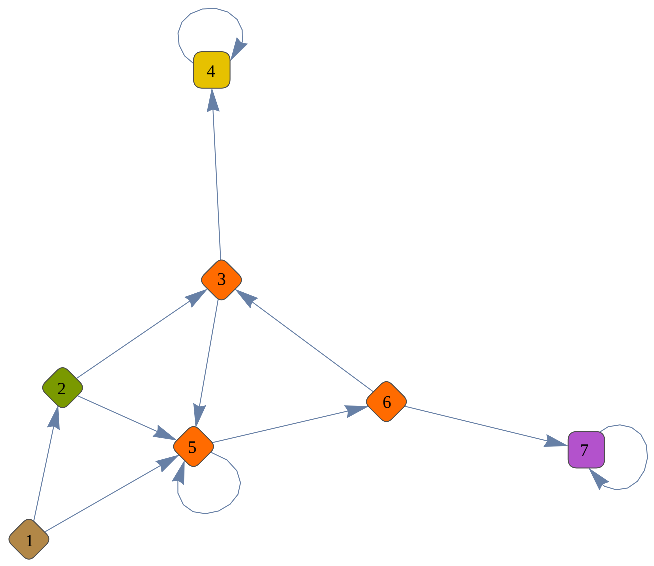

Abbildung 9: Zustandsgraph für das Spiel '111' gegen '010'

Die Eingaben in Mathematica sehen wie folgt aus:

```
M1 = {{0, 1/2, 0, 0, 1/2, 0, 0}, {0, 0, 1/2, 0, 1/2, 0, 0}, {0, 0, 0,
   1/2, 1/2, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1/2, 1/2,
   0}, {0, 0, 1/2, 0, 0, 0, 1/2}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}} ;
proc1 = DiscreteMarkovProcess[1,M1];
Graph[proc1]
MarkovProcessProperties[proc1]
PDF[proc1[\[Infinity]], 4] = 5/12
PDF[proc1[\[Infinity]], 7] = 7/12
```

Für Bert ergibt sich eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 5/12 und für Alice von 7/12.

Modellierung für '111' und '001'

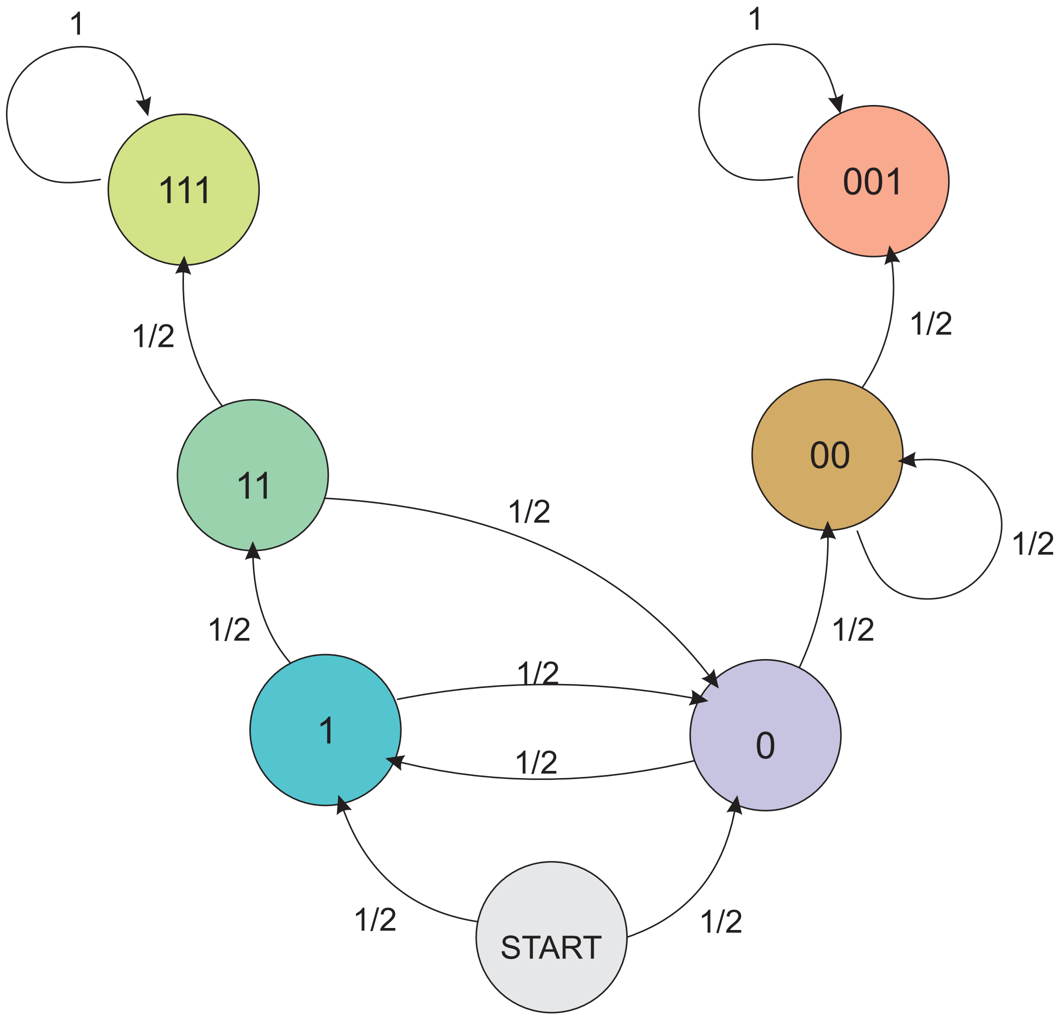

Abbildung 10: Zustandsgraph zum Erreichen von '111' oder '001'

Analog wie im vorangehenden Beispiel zeichnen wir den Zustandsgraphen. Diesmal verbleiben wir im Zustand '00' falls eine weitere Null folgt. Vom Zustand '00' gibt es keinen Übergang auf die linke Seite.

$$M_{111-001} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

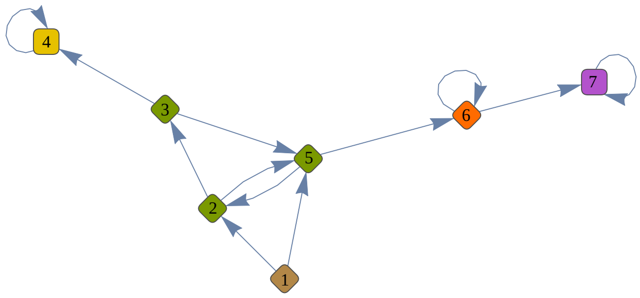

Abbildung 11: Zustandsgraph für das Spiel '111' gegen '001'

Würde Alice sich die Folge '001' wählen, hätte sie gegenüber Bert noch bessere Gewinnchancen.

```
M2 = {{0, 1/2, 0, 0, 1/2, 0, 0}, {0, 0, 1/2, 0, 1/2, 0, 0}, {0, 0, 0, 1/2,
  1/2, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}, {0, 1/2, 0, 0, 0, 1/2, 0}, {0,
  0, 0, 0, 0, 1/2, 1/2}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}} ;
proc2 = DiscreteMarkovProcess[1,M2];
Graph[proc2]
MarkovProcessProperties[proc2]
PDF[proc2[\[Infinity]], 4] = 3/10
PDF[proc2[\[Infinity]], 7] = 7/10
```

Modellierung für '111' gegen '011'

Die weitere Unersuchung zeigt, dass die Folge '011' die besten Chanchen gegen '111' hat. Alice würde das Spiel dann mit $7 \div 8$ und Bert nur mit $1 \div 8$ gewinnen.

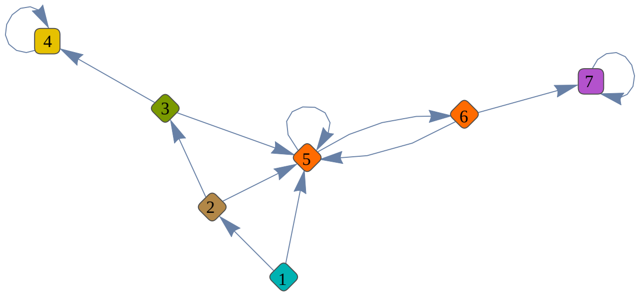

Abbildung 12: Zustandsgraph für das Spiel '111' gegen '011'

$$M_{111-011} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

```
M2 = {{0, 1/2, 0, 0, 1/2, 0, 0}, {0, 0, 1/2, 0, 1/2, 0, 0}, {0, 0, 0, 1/2,
  1/2, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}, {0, 1/2, 0, 0, 0, 1/2, 0}, {0,
  0, 0, 0, 1/2, 0, 1/2}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}} ;
proc2 = DiscreteMarkovProcess[1,M2];
Graph[proc2]
MarkovProcessProperties[proc2]
PDF[proc2[\[Infinity]], 4] = 1/8
PDF[proc2[\[Infinity]], 7] = 7/8
```

Literatur

[1] Walter Penney: Journal of Recreational Mathematics, 1969, p. 241.

[2] Martin Gardner: Mathematical Games, Scientific American, 1974, 231(4), 120-125.

[3] Martin Gardner: Time Travel and Other Mathematical Bewilderments, W. H. Freeman, 1988, 55-69

[4] Stanley Collings: Coin Sequence Probabilities and Paradoxes, Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications, 18, 1982, 227-232.

[5] Yutaka Nishiyama and Steve Humble: Winning Odds, https://plus.maths.org/content/os/issue55/features/nishiyama/index

[6] Arthur Engel: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 2, Klett Schulbuchverlag 1.Aufl. 1976

[7] A. Büchter, H.-W. Henn, Elementare Stochastik: Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls (Mathematik für das Lehramt), Springer Verlag; 2. erw. Aufl. 2009, ISBN-13: 978-3540453819

[8] Lambacher Schweizer. Gesamtband Stochastik, Klett Schulbuchverlag 1.Aufl. 2003, ISBN-13: 978-3127324303

[9] G.Roolfs, Arbeitsblätter Mathematik, http://nibis.ni.schule.de/ lbs-gym/