

ClearAll["Global`*"]

Roof's Käfer (Absorbierende Markow-Ketten)

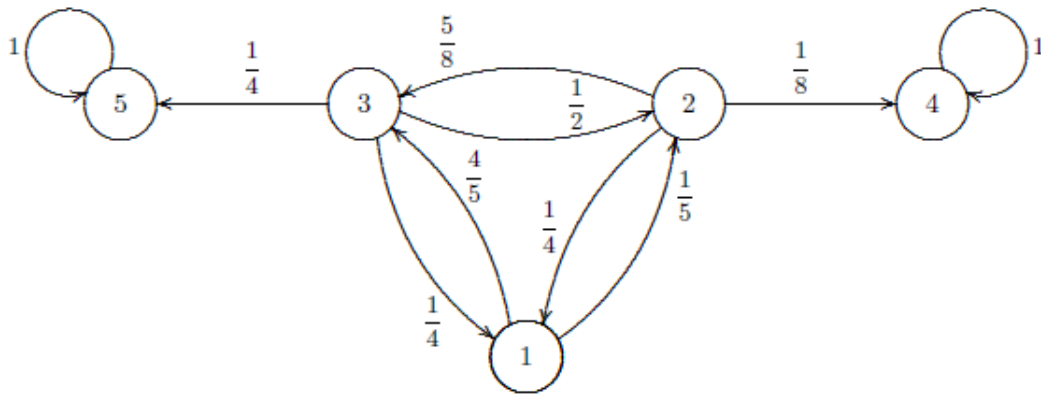
hi 31.12.2017

Ein Käfer krabbelt auf der Figur. Er beginnt im Zustand 1 .

In den Endpunkten 4 und 5 wartet jeweils ein Vogel, der den Käfer verschlucken wird (Die Zustände 4 und 5 heißen absorbierend). In den Punkten (Zuständen) 1, 2 und 3 wählt der Käfer die Richtung zum nächsten mit den Wahrscheinlichkeiten der Uebergangsmatrix M.

I. Mittelwertsregel:

Die Wahrscheinlichkeit eines inneren Zustandes ist gleich dem gewichteten Mittel der Wahrscheinlichkeiten seiner Nachfolger.



Aufgabe a)

Schema von Roof's:

		von				
		1	2	3	4	5
nach	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0
	2	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
	3	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{8}$	0	0	0
	4	0	$\frac{1}{8}$	0	1	0
	5	0	0	$\frac{1}{4}$	0	1

Spalten und Zeilen tauschen, damit **Zeilensumme** 1 wird.

```
In[1]:= M = {{0, 1/5, 4/5, 0, 0}, {1/4, 0, 5/8, 1/8, 0},
             {1/4, 1/2, 0, 0, 1/4}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1}}
```

```
Out[1]:= {{0, 1/5, 4/5, 0, 0}, {1/4, 0, 5/8, 1/8, 0}, {1/4, 1/2, 0, 0, 1/4}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1}}
```

```
In[2]:= proc1 = DiscreteMarkovProcess[{1, 0, 0, 0, 0}, M]
```

```
Out[2]:= DiscreteMarkovProcess[{1, 0, 0, 0, 0},
                               {{0, 1/5, 4/5, 0, 0}, {1/4, 0, 5/8, 1/8, 0}, {1/4, 1/2, 0, 0, 1/4}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1}}]
```

```
In[3]:= PDF[StationaryDistribution[proc1], 4] // N
```

```
Out[3]:= 0.244898
```

```
In[4]:= PDF[StationaryDistribution[proc1], 5] // N
```

```
Out[4]:= 0.755102
```

Die Wahrscheinlichkeit von "Vogel 4" gefressen zu werden beträgt ca. 24.5%.

Die Wahrscheinlichkeit von "Vogel 5" gefressen zu werden beträgt ca. 75.5%.

Aufgabe b)

2. Mittelwertsregel:

Der Erwartungswert der Anzahl Versuche bis zum Erreichen des Randes ist bei einem inneren Zustand gleich dem um 1 vergrößerten gewichteten Mittel der Erwartungswerte seiner Nachfolger.

$$g_{11} = a_1 = 1 + \frac{1}{5} a_2 + \frac{4}{5} a_3$$

$$g_{12} = a_2 = 1 + \frac{1}{4} a_1 + \frac{5}{8} a_3$$

$$g_{13} = a_3 = 1 + \frac{1}{4} a_1 + \frac{1}{2} a_2$$

$$a_1 = 1 + \frac{a_2}{5} + \frac{4 a_3}{5}$$

$$a_2 = 1 + \frac{a_1}{4} + \frac{5 a_3}{8}$$

$$a_3 = 1 + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{2}$$

```
Solve[{g11, g12, g13}, {a1, a2, a3}] // N
```

```
{{a1 -> 7.22449, a2 -> 6.63265, a3 -> 6.12245}}
```

Die mittlere Dauer beträgt $a_1 = 7.2$ (Start in a_1)

Aufgabe c)

```
Clear[p1, p2, p3]
```

$$\begin{aligned}g14 &= p1 == 1/5 * p2 + 4/5 * p3 \\g15 &= p2 == 1/4 * p1 + 5/8 * p3 + 1/8 \\g16 &= p3 == 1/4 * p1 + 1/2 * p2\end{aligned}$$

$$p1 == \frac{p2}{5} + \frac{4 p3}{5}$$

$$p2 == \frac{1}{8} + \frac{p1}{4} + \frac{5 p3}{8}$$

$$p3 == \frac{p1}{4} + \frac{p2}{2}$$

```
Solve[{g14, g15, g16}, {p1, p2, p3}] // N
{{p1 -> 0.244898, p2 -> 0.326531, p3 -> 0.22449}}
```

Weil der Start des Käfers in p1 erfolgt, ist die Wahrscheinlichkeit 24.48 %, vom Vogel in 4 gefressen zu werden.

bequemer mit Mathematica:

```
PDF[StationaryDistribution[proc1], 4] // N
0.244898
```