Die grasende Ziege am Seil

von Ingmar Rubin

4. Oktober 2003

Eine Ziege befindet sich auf einer eingezäunten Weideläche, die von einem Wassergraben durchzogen wird. In den Punkten A und B befindet sich je ein Holzpflog an dem ein nicht dehnbares Seil der Länge $L = 25\,m$ befestigt ist. Die Ziege ist mit einem Ring an das Seil gekettet. Zwischen der Ziege und dem Pflog B liegt das Seil doppelt (siehe auch Abbildung 1).

1. Auf welcher Kurve bewegt sich die Ziege bei straff gespannten Seil?
2. Wie groß ist die Fläche F, welche die Ziege maximal abgrasen kann?
3. Die Ziege soll bei straff gespannten Seil den $8.20\,m$ entfernt liegenden Wassergraben erreichen.
   Ist die Seillänge von $L = 25\,m$ dafür ausreichend ?

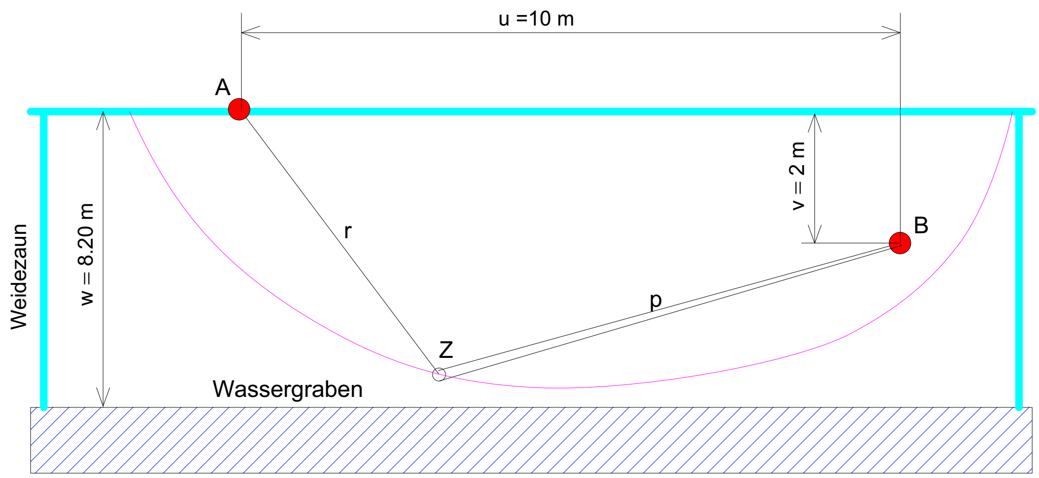

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Bahnkurve der Ziege

Im folgenden wird eine Parameterdarstellung $Z[x(t), y(t)]$ für die Bahnkurve der Ziege abgeleitet. Das Bild zur Aufgabenstellung vervollständigen wir um

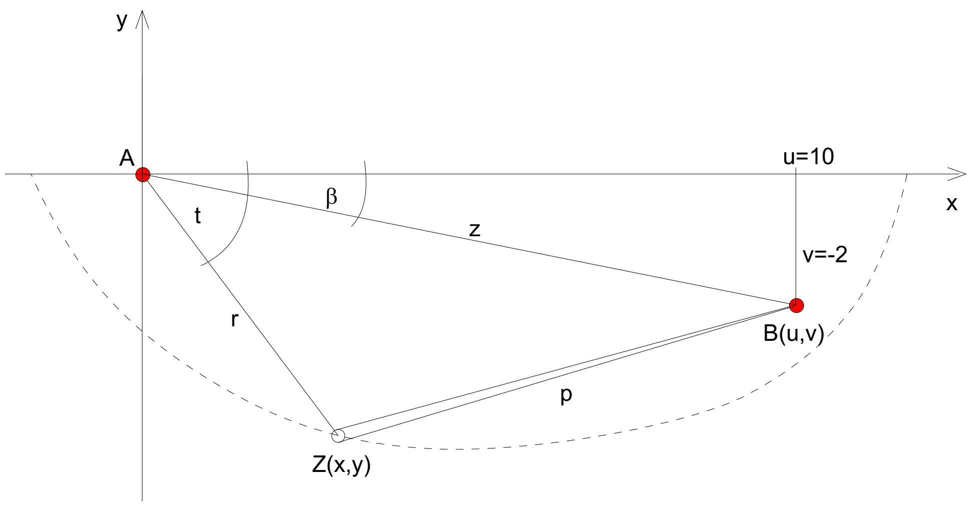

Abbildung 2: Lösungsskizze

einige Strecken, Winkel und Punkte. Den Koordinatenursprung legen wir in den Punkt A. Die Koordinaten von B bezeichnen wir mit u und v, wobei $u = 10$ und $v = -2$ beträgt. Die Strecke $\overline{AB} = z$ berechnet sich aus dem Pythagoras. Der Winkel β bezeichnet das Winkelmaß zwischen x Achse und Strecke z.

$$z = \sqrt{u^2 + v^2}, \qquad \beta = \arctan \frac{v}{u} \tag{1}$$

Das Seil besitzt die konstante Länge L (nicht dehnbar !) als Summe der Strecken r und $2 \cdot p$:

$$L = r + 2 \cdot p = const. \tag{2}$$

Ziel der folgenden Rechnung ist eine Funktion $r = r(t)$ - die Polarkoordinatendarstellung der Bahnkurve. Mit $r(t)$ lassen sich alle Fragen aus der Aufgabenstellung beantworten. Kosinussatz im Dreieck $\triangle ABZ$

$$p^2 = r^2 + z^2 - 2rz\cos[t - \beta] \tag{3}$$

Strecke p kann durch r ersetzt werden:

$$p = \frac{L - r}{2} \qquad \to \qquad \left(\frac{L - r}{2}\right)^2 = r^2 + z^2 - 2rz\cos[t - \beta] \tag{4}$$

Die quadratische Gleichung wird nach r aufgelöst. Wir erhalten zwei Lösungen in Mathematica:

$$r_1 = \frac{1}{6}\left(-2L + 8z\cos[t - \beta] - \sqrt{-12(-L^2 + 4z^2) + (2L - 8z\cos[t - \beta])^2}\right) \tag{5}$$

$$r_2 = \frac{1}{6}\left(-2L + 8z\cos[t-\beta] + \sqrt{-12(-L^2+4z^2)+(2L-8z\cos[t-\beta])^2}\right) \quad (6)$$

Wir wählen die Lösung $r_2(t)$, welche im Intervall $0 \leq t \leq 2\pi$ stets positive Werte liefert. Die **Parameterdarstellung** für die Koordinaten von Z lauten:

$$x(t) = r_2(t) \cdot \cos(t), \qquad y(t) = r_2(t) \cdot \sin(t) \quad (7)$$

Mit dem Befehl `ParametricPlot[{x, y},{t, 0, 2 Pi}]` erhält man in Mathematica das folgende Bild von der Bahnkurve. Für die Aufgabenstellung ist nur die untere Hälfte von Bedeutung ist. Vor dem Plotbefehl müssen die Werte für L, z und β gesetzt werden (siehe Gleichung (1)!

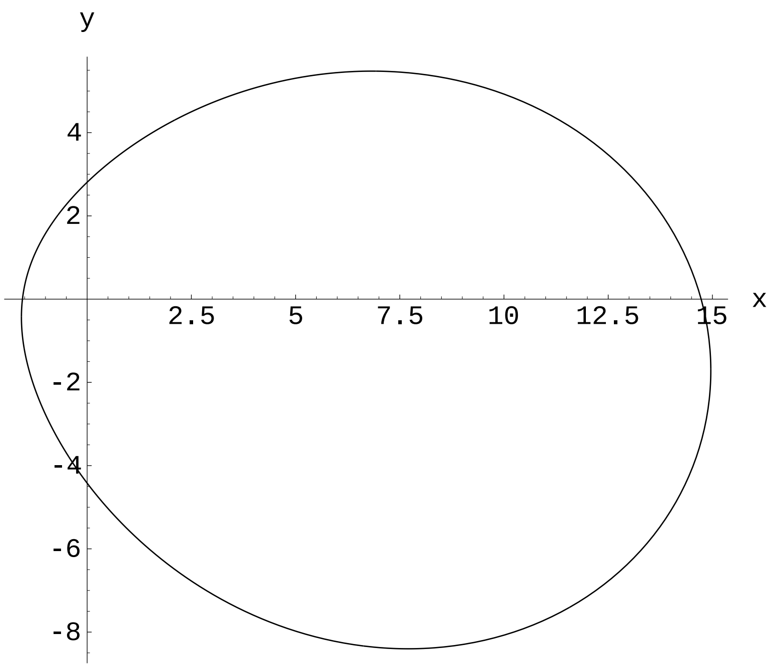

Abbildung 3: Bahnkurve der Ziege

Die Bahnkurve ist Teil einer verzerrten Ellipse, die um den Winkel β gedreht ist.

Flächenberechnung

Mit Hilfe der Polardarstellung $r = r(t)$ kann die eingeschlossene Fläche zwischen Kurve und x-Achse in der unteren Bildhälfte berechnet werden.

Leibnizsche Sektorenformel

$$F = \frac{1}{2} \cdot \int_{t=-\pi}^{t=0} r_2(t)^2 \cdot dt \tag{8}$$

$$F = \frac{1}{72} \int_{t=-\pi}^{t=0} \left(-2L + 8z\cos[t-\beta] + \sqrt{-12(-L^2+4z^2) + (2L - 8z\cos[t-\beta])^2} \right)^2 dt \tag{9}$$

Die unbestimmte Integration über t liefert in Mathematica kein Resultat. Das Integral besitzt keine geschlossene Lösung. Für die Bestimmung des Flächeninhalts verbleibt damit nur die numerische Integration. Vorher müssen die Werte für z und β aus $u = 10$ und $v = -2$ bestimmt werden. Die Seillänge beträgt $L = 25\,m$.

$$z = \sqrt{u^2 + v^2} = 10.198, \qquad \beta = \arctan\frac{v}{u} = -11.31 \tag{10}$$

```
dF = 1/2 * r2^2
 F = NIntegrate[dF,{t, -Pi, 0}]
 F = 110.689
```

Die Ziege kann bei einer Seillänge von $L = 25\,m$ maximal eine Fläche von $F = 110.7\,m^2$ abgrasen. Berechnet man die Fläche oberhalb der x-Achse erhält man ein kleineres Ergebniss. Das ist aus Abbildung 2 auch deutlich zu erkennen.

```
dF = 1/2 * r2^2
 F = NIntegrate[dF,{t, 0, Pi}]
 F = 66.7557
```

Tiefster Punkt der Bahnkurve

Im letzten Teil der Aufgabenstellung müssen wir das Minimum der Bahnkurve berechnen. Für $L = 25$ muß $y_{min} \leq 8.20$ betragen, damit die Ziege bei straff gespannten Seil den Wassergraben erreichen kann.
Die Parameterdarstellung $y(t)$ ist Ausgangspunkt für die Lösung:

$$y(t) = \frac{1}{3}\left(-L + 4z\cos[t-\beta] + \sqrt{3(L^2 - 4z^2) + (L - 4z\cos[t-\beta])^2}\right) \cdot \sin[t] \tag{11}$$

Im tiefsten Punkt der Bahn liegt die Tangente waagerecht, d.h. $dy(t)/dt = 0$

$$y'(t) = \frac{1}{3}\cos[t]\left(-L + 4z\cos[t-\beta] + \sqrt{3(L^2 - 4z^2) + (L - 4z\cos[t-\beta])^2}\right) + \frac{1}{3}\sin[t]\left(-4z\sin[t-\beta] + \frac{4z(L - 4z\cos[t-\beta])\sin[t-\beta]}{\sqrt{3(L^2 - 4z^2) + (L - 4z\cos[t-\beta])^2}}\right)$$

Der Befehl `Solve[y1==0,t]` liefert in Mathematica keine Lösung. Die Gleichung der 1.Ableitung enthält zahlreiche transzendente Terme, so daß eine algebraische Auflösung nach t nicht möglich ist. Für die numerische Lösung verschaffen wir uns einen Startwert aus der folgenden Graphik:

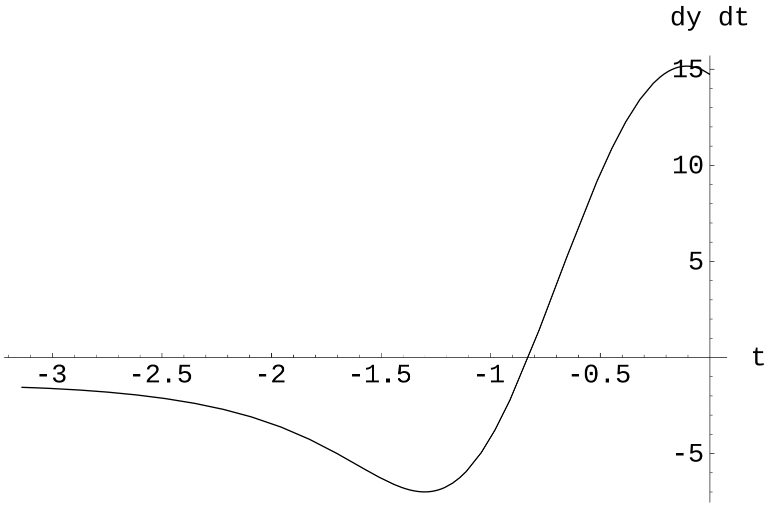

Abbildung 4: Funktion $y'(t)$ im Intervall $0 \leq t \leq -\pi$

Als Startwert für die numerische Nullstellensuche setzen wir $t = -0.8$

```
FindRoot[y1==0,{t,-0.8}]   ->   t = - 0.828797
```

Das Minimum der Funktion liegt bei $t_0 = -0.828797 = -47.4866°$.

Die x, y Koordinaten des Minimums ergeben sich aus:

$$x(t_0) = 7.70198, \qquad y_{min} = y(t_0) = -8.40128 \tag{12}$$

Die Ziege erreicht bei $Z_{min}(7.7, -8.4)$ das Minimum ihrer Bahn. Damit ist die Seillänge von $L = 25m$ aussreichend, um an den Wassergraben zu gelangen.