Sehnenkurven

Eine Aufgabe von Ingmar Rubin

19. Juli 2001

Aufgabe 1: Kreissehne

In einem Kreis k_1 vom Radius r sei eine Sehne eingezeichnet, die durch einen Punkt P in zwei Teilstrecken der Länge a und b geteilt wird. Wenn die Sehne einmal im Kreis herumwandert, beschreibt der Teilungspunkt P einen weiteren (inneren) Kreis k_2 als Ortslinie.

Welchen Flächeninhalt besitzt der Kreisring zwischen k_1 und k_2 ?

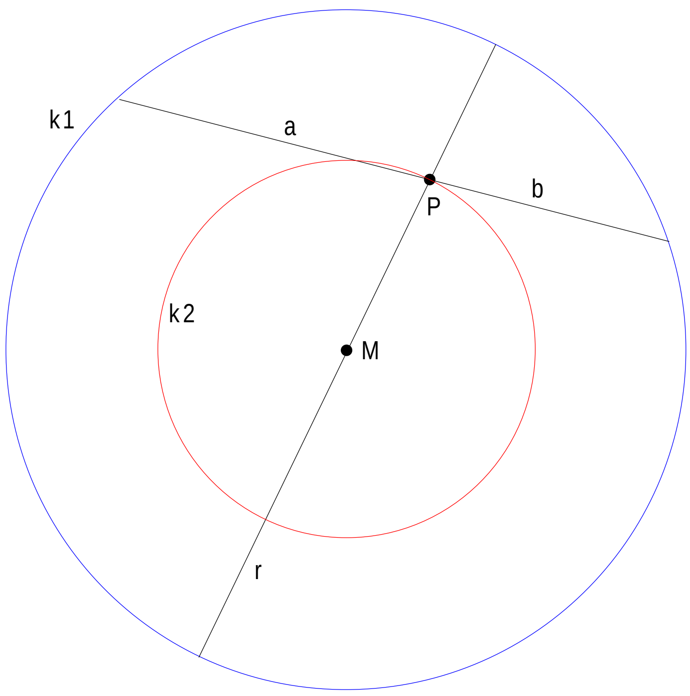

Abbildung 1: Kreis k_1 mit der Sehne $a + b$ und dem Teilungspunkt P

Punktezahl=4

Aufgabe 2: Ellipsensehne

Gegeben sei die Ellipse mit Halbachsen u, v. Im inneren der Ellipse wandert die Sehne mit der Länge

$$a + b = \frac{u + v}{2} \tag{1}$$

einmal herum.

1. Welche Ortslinie beschreibt der Mittelpunkt $P(x, y)$ der Sehne, d.h. $a = b$?
2. Geben Sie eine Parameterdarstellung $x = x(t), y = y(t)$ für die Koordinaten von P an !
3. Zeichnen Sie das Bild der Ellipse und die Ortslinie von P in ein Diagramm $(0 \leq t \leq 2\pi)$. Wählen Sie $u = 6\,cm$ und $v = 3\,cm$.
4. Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der Ellipse und der von P erzeugten Ortslinie.

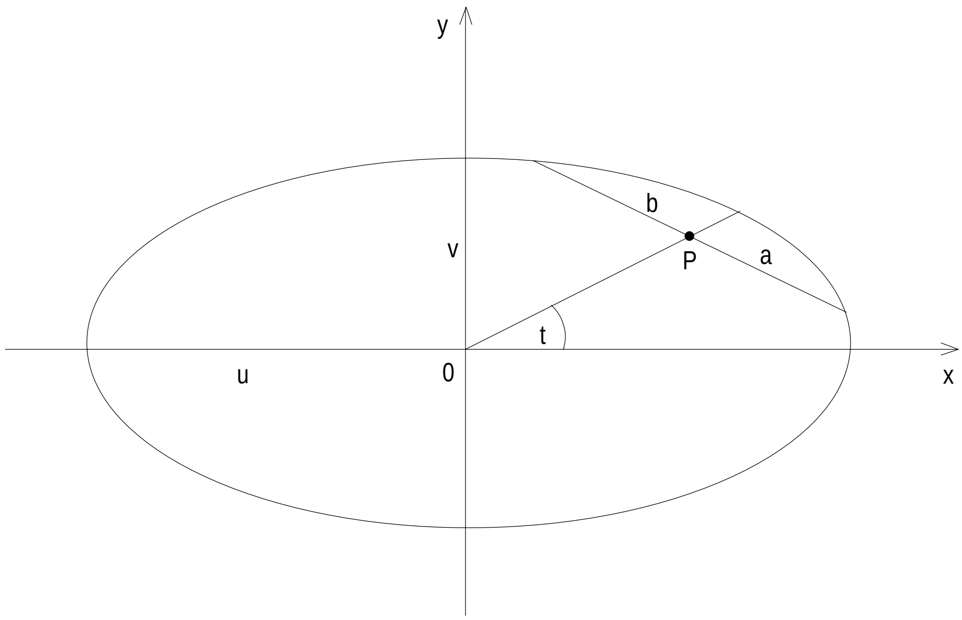

Abbildung 2: Ellipse mit den Halbachsen u, v und der Sehne $a + b$

Für Kurven, welche auf diese Weise erzeugt werden formulierte der engliche Mathematiker *Hammond Holditch* 1858 den folgenden Satz:

Wenn eine Sehne der konstanten Länge $a + b$ in einer geschlossene Kurve von einem Punkt P in zwei Strecken der Länge a, b geteilt wird, hat die Differenz der von der Kurve und der Ortslinie des Teilpunkts erzeugten Fläche den Inhalt $A_{diff} = \pi \cdot a \cdot b$.

Zeigen Sie für beide Aufgabenstellungen das der Satz richtig ist. (Punktezahl=10)

Lösung zur Kreissehne

Wir bezeichenn den Radius des inneren Kreises k_2 mit c.

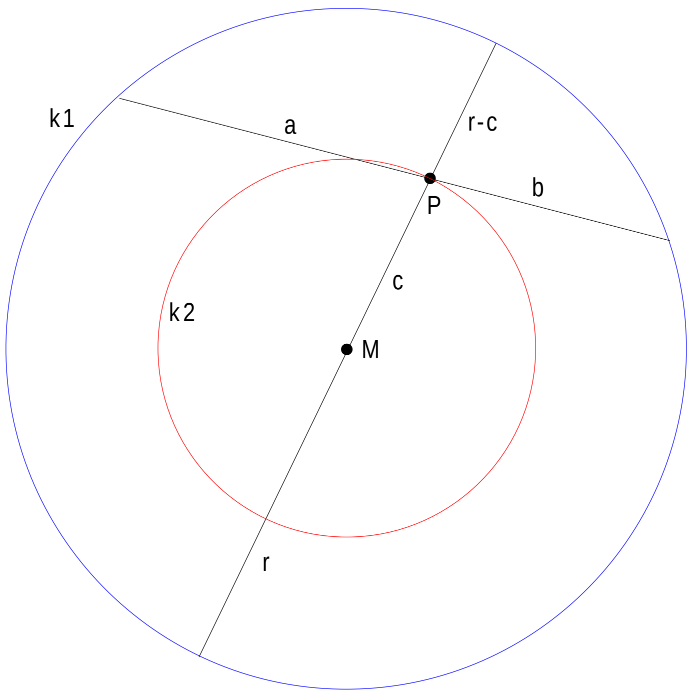

Abbildung 1: Die Sehne a, b schneidet sich mit der Sehne $r + c, r - c$ in P

Nun kommt der Sehnsatz zur Anwendung:

Schneiden sich in einem Kreis zwei Sehnen, so ist das Produkt der Abschnittslängen der einen Sehne gleich dem Produkt der Abschnittslängen der anderen Sehne.

$$a \cdot b = (r + c) \cdot (r - c) = r^2 - c^2 \tag{1}$$

Multiplizieren wir beiden Seiten der Gleichung mit π erhalten wir:

$$\pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot r^2 - \pi \cdot c^2 \tag{2}$$

Der Flächeninhalt des Kreisringes zwischen k_1 und k_2 beträgt damit:

$$A_{diff} = \pi \cdot a \cdot b \tag{3}$$

wie es im Satz von *Holditch* vorausgesagt war.

Lösung zur Ellipsensehne

Erster Ansatz: Schnittpunkt zwischen Kreis und Ellipse

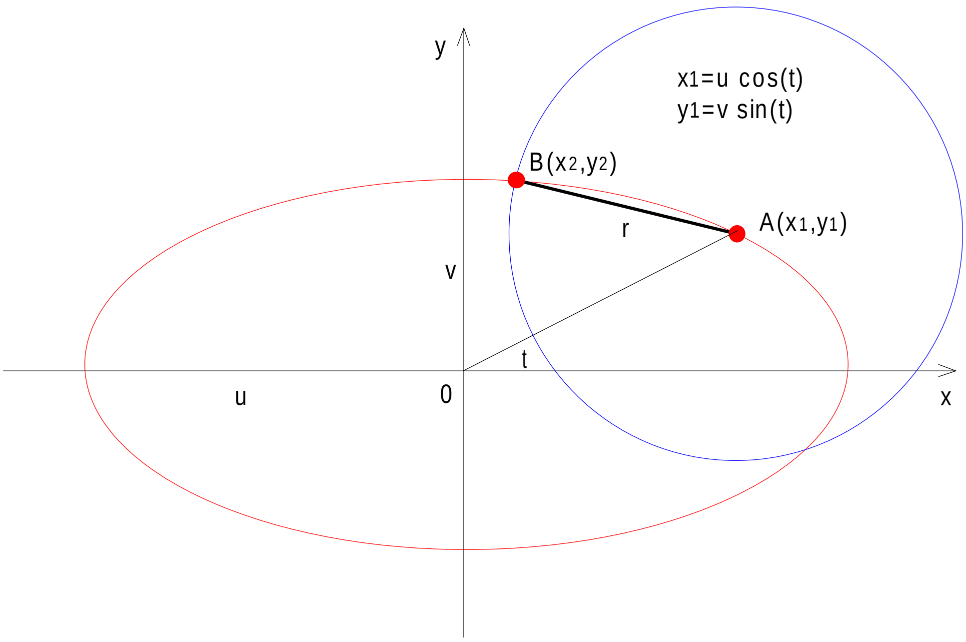

Abbildung 1: Schnittpunkte zwischen Ellipse und Kreis

Wir zeichnen die Ellipse mit ihren Halbachsen u, v und dem Mittelpunkt in $O(0,0)$. Um eine Sehne konstanter Länge auf der Ellipse zur erzeugen wählen wir den Punkt $A(x_1, y_1)$ auf der Ellipse und zeichnen um ihn ein Kreis mit dem Radius r. Einer der Schnittpunkte zwischen Kreis und Ellipse bezeichen wir mit $B(x_2, y_2)$. Die Punktabstandsgleichung zwischen den Punkten A und B lautet:

$$k: \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = r^2 \tag{1}$$

Die Koordinaten der Punkte A und B genügen weiterhin der allgemeinen Ellipsengleichung in Mittelpunktslage :

$$A: \quad \frac{{x_1}^2}{u^2} + \frac{{y_1}^2}{v^2} = 1, \qquad B: \frac{{x_2}^2}{u^2} + \frac{{y_2}^2}{v^2} = 1 \tag{2}$$

Im nächsten Schritt müssen Gleichungen (1) und (2) nach x_2, y_2 aufgelöst werden. Es stellt sich heraus, das eine algebraische Auflösung nur mit großem Aufwand möglich ist. Die entstehenden Ausdrücke sind so umfangreich, das eine weitere Verarbeitung zu kompliziert wird. Besser ist es die Ellipse mit einer Gleichung 1.Ordnung - einer Geraden - zum Schnitt zu bringen wie der zweite Lösungsversuch zeigt.

Zweiter Lösungsansatz: Schnitt zwischen Gerade und Ellipse

Wir bestimmen nun die Schnittpunkte zwischen der Ellipse und einer Geraden g_1.

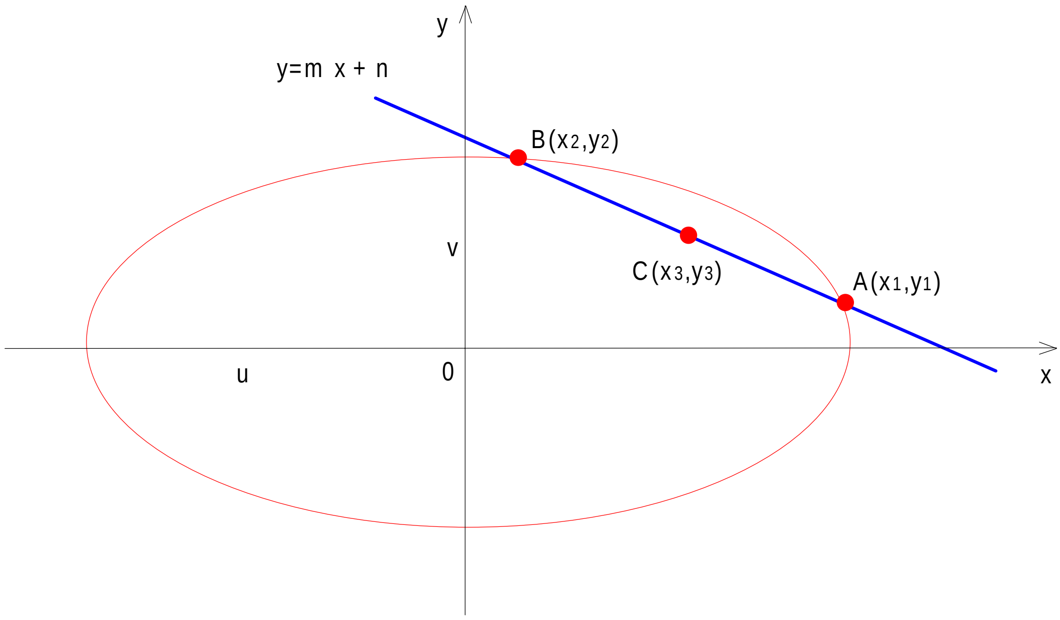

Abbildung 2: Schnittpunkte zwischen Ellipse und Gerade

$$Ellipse: \quad \frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1, \qquad g_1: \quad y = mx + n \tag{3}$$

Achtung ! Für die weitere Rechnung wurde das Computeralgebraprogramm *Mathematica* benutzt. Ohne Computerunterstützung ist der Aufwand für die Ableitungen und algebraischen Umformungen zu hoch. Es kann sein das andere Computeralgebraprogramme wie *MuPAD, MAPLE V, DERIVE* etwas andere Zwischenergebnisse liefern - das Endresultat sollte aber übereinstimmen.

Die Auflösung von Gleichung (3) liefert die Schnittpunkkoordinaten der Punkte $A(x_1, y_1)$ und $B(x_2, y_2)$.

$$y_1 = n - \frac{m^2nu^2}{m^2u^2 + v^2} - \frac{muv\sqrt{-n^2 + m^2u^2 + v^2}}{m^2u^2 + v^2} \tag{4}$$

$$x_1 = \frac{-mnu^2 - uv\sqrt{-n^2 + m^2u^2 + v^2}}{m^2u^2 + v^2} \tag{5}$$

$$y_2 = n - \frac{m^2nu^2}{m^2u^2 + v^2} + \frac{muv\sqrt{-n^2 + m^2u^2 + v^2}}{m^2u^2 + v^2} \tag{6}$$

$$x_2 = \frac{-mnu^2 + uv\sqrt{-n^2 + m^2u^2 + v^2}}{m^2u^2 + v^2} \tag{7}$$

Die Länge der Sehne $\overline{AB}$ beträgt:

$$k^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \frac{4(1 + m^2)u^2v^2(-n^2 + m^2u^2 + v^2)}{(m^2u^2 + v^2)^2} \tag{8}$$

Da k konstante Länge haben soll, gibt es zwischen m und n eine feste Beziehung. Die Auflösung von (8) nach n ergibt zwei Lösungen:

$$\{\{n_1 \to -\sqrt{\left(\tfrac{1}{(4+4m^2)u^2v^2}\left((m^2u^2+v^2)^2\left(-k^2 + \tfrac{4m^2u^4v^2}{(m^2u^2+v^2)^2} + \tfrac{4m^4u^4v^2}{(m^2u^2+v^2)^2} + \tfrac{4u^2v^4}{(m^2u^2+v^2)^2} + \tfrac{4m^2u^2v^4}{(m^2u^2+v^2)^2}\right)\right)\right)}\},$$

$$\{n_2 \to \sqrt{\left(\tfrac{1}{(4+4m^2)u^2v^2}\left((m^2u^2+v^2)^2\left(-k^2 + \tfrac{4m^2u^4v^2}{(m^2u^2+v^2)^2} + \tfrac{4m^4u^4v^2}{(m^2u^2+v^2)^2} + \tfrac{4u^2v^4}{(m^2u^2+v^2)^2} + \tfrac{4m^2u^2v^4}{(m^2u^2+v^2)^2}\right)\right)\right)}\}\}$$

Für die weitere Rechnung betrachten wir nur die obere Halbebene, d.h. $y > 0$ und entscheiden uns für n_2. Den Anstieg m ersetzen wir durch den Winkel t zwischen $x - Achse$ und Normale. Wenn t das Intervall $0 \leq t \leq 2\pi$ durchläuft, hat sich die Sehne einmal vollständig gedreht.

$$m = -\frac{1}{\tan(t)} = -\frac{\cos(t)}{\sin(t)} \tag{9}$$

Die Koordinaten vom Mittelpunkt $P(x_3, y_3)$ auf der Sehne $\overline{AB}$ berechnen sich aus:

$$x_3(t) = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{u^2\cot[t]\sqrt{\frac{(v^2+u^2\cot[t]^2)\left(-\left(k^2-4u^2\right)v^2-u^2\left(k^2-4v^2\right)\cot[t]^2\right)\sin[t]^2}{u^2v^2}}}{2(v^2 + u^2\cot[t]^2)} \tag{10}$$

$$y_3(t) = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{v^2\sqrt{\frac{(v^2+u^2\cot[t]^2)\left(-\left(k^2-4u^2\right)v^2-u^2\left(k^2-4v^2\right)\cot[t]^2\right)\sin[t]^2}{u^2v^2}}}{2(v^2 + u^2\cot[t]^2)} \tag{11}$$

Damit haben wir eine Parameterdarstellung der Ortslinie von P für die obere Halbebene hergeleitet. Aus Symmetriegründen ergibt sich die Ortslinie für die untere Kurve aus $P(-x_3(t), -y_3(t))$. Wem diese Aussage nicht genügt, kann mit der Lösung n_1 aus (8) die Rechnung wiederholen.

Die Fläche, welche die Ortslinie von P einschließt, ermitteln wir aus der *Leibnizschen Sektorenformel*. Auf Grund der Symmetrie berechnen wir nur die obere Hälfte und multiplizieren das Ergebnis mit dem Faktor 2:

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{t=0}^{t=\pi} (x_3 \cdot \dot{y}_3 - \dot{x}_3 \cdot y_3) \cdot dt \tag{12}$$

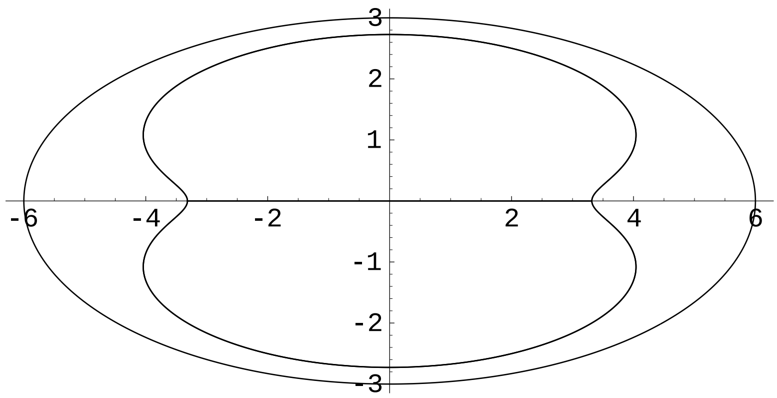

Abbildung 3: Ellipse mit $u = 6, v = 3$ und der Ortslinie von P

Die Ableitungen der Koordinaten $x_3(t)$ und $y_3(t)$ sind:

$$\dot{x}_3 = ((3k^2u^4 + 2k^2u^2v^2 + (3k^2 - 32u^2)v^4 + k^2(4(u^4 - v^4)\cos[2t] + (u^2 - v^2)^2\cos[4t]))\csc[t]^2) \Big/ (8v^2(v^2 + u^2\cot[t]^2) \sqrt{(-\tfrac{1}{u^2v^2}((u^2 + v^2 + (u - v)(u + v)\cos[2t]) (-8u^2v^2 + k^2(u^2 + v^2) + k^2(u - v)(u + v)\cos[2t]) \csc[t]^2)))$$

$$\dot{y}_3 = -((3k^2u^4 + 2u^2(k^2 - 16u^2)v^2 + 3k^2v^4 + k^2(4(u^4 - v^4)\cos[2t] + (u^2 - v^2)^2\cos[4t])) \cot[t]\csc[t]^2) \Big/ (16u^2(v^2 + u^2\cot[t]^2)\sqrt{(\tfrac{1}{u^2v^2}((v^2 + u^2\cot[t]^2) (-(k^2 - 4u^2)v^2 - u^2(k^2 - 4v^2)\cot[t]^2)\sin[t]^2)))$$

$$dA = -\frac{k^2}{4} + \frac{2\,u^2v^2}{u^2 + v^2 + (u - v)(u + v)\cos[2t]} \tag{13}$$

$$A = \int_{t=0}^{t=\pi} dA \cdot dt = \pi\,u\,v - \frac{\pi\,k^2}{4} \tag{14}$$

In unserem Fall wird die Sehne der Länge k genau in der Mitte geteilt, d.h:

$$\frac{k}{2} = a, \quad bzw. \quad \frac{k}{2} = b \quad \rightarrow \quad \frac{k^2}{4} = a\,b \tag{15}$$

Damit erhalten wir :

$$A = \pi\,u\,v - \pi\,a\,b \tag{16}$$

Die Differenz aus der Ellipsenfläche und der von der Parameterkurve eingeschlossenen Fläche ergibt:

$$A_{diff} = A_{ell} - A = \pi\, u\, v - (\pi\, u\, v - \pi\, a\, b) = \pi\, a\, b \tag{17}$$

- womit auch für die Ellipse der Satz von *Holditch* richtig ist.

Als Vorraussetzungen für den Satz von *Holditch* sind zu nennen:

- die äußere Kurve muß konvex sein, d.h. sie darf keine Einbuchtungen o.ä. aufweisen,
- die Sehnen sind Tangenten, d.h. die innere Kurve ist Hüllkurve,
- die Sehne darf nicht zu lang sein und wandert nur einmal herum,
- die innere Kurve ist einfach zusammenhängend.

Lösungsweg von Andreas Grieser, Greifswald

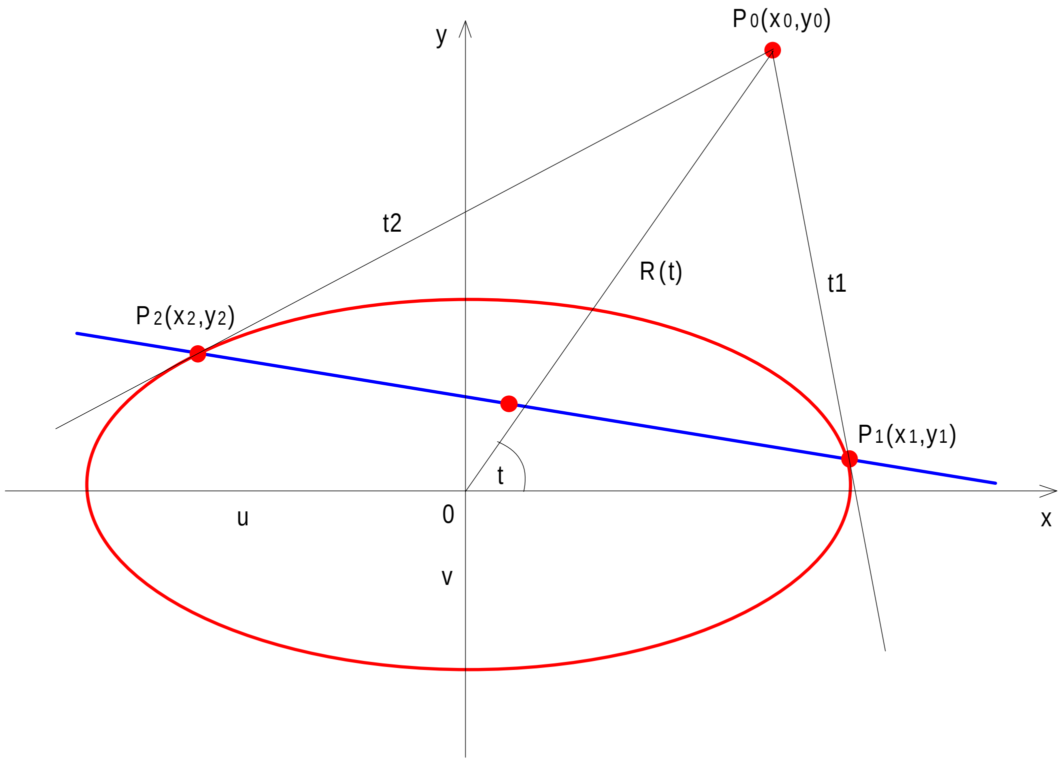

Abbildung 1: Ellipse und Polare zum Punkt P_0

Wir legen von einem äußeren Punkt P_0 die Tangenetn t_1 und t_2 an die Ellipse. Die Berüherungspunkte bezeichen wir mit $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$. Die durch $\overline{P_1P_2}$ bestimmte Gerade bezeichnet man als *Polare* bezüglich des Punktes P_0 an die Ellipse. Sie genügt der Gleichung:

$$\frac{x\,x_0}{a^2} + \frac{y\,y_0}{b^2} = 1 \tag{1}$$

Wir bestimmen nun die Schnittpunktkoordinaten zwischen Ellipse und Polarengleichung.

$$x_1 = \frac{u^2(v^4{x_0}^2 - y_0\sqrt{v^4{x_0}^2(v^2{x_0}^2 + u^2(-v^2 + {y_0}^2))})}{v^4{x_0}^3 + u^2v^2x_0{y_0}^2}$$

$$y_1 = \frac{u^2v^2y_0 + \sqrt{v^4{x_0}^2(v^2{x_0}^2 + u^2(-v^2 + {y_0}^2))}}{v^2{x_0}^2 + u^2{y_0}^2}$$

$$x_2 = \frac{u^2(v^4{x_0}^2 + y_0\sqrt{v^4{x_0}^2(v^2{x_0}^2 + u^2(-v^2 + {y_0}^2))})}{v^4{x_0}^3 + u^2v^2x_0{y_0}^2}$$

$$y_2 = \frac{u^2v^2y_0 - \sqrt{v^4{x_0}^2(v^2{x_0}^2 + u^2(-v^2 + {y_0}^2))}}{v^2{x_0}^2 + u^2{y_0}^2}$$

Der Mittelpunkt zwischen P_1 und P_2 beschreibt die gesuchte Ortskurve:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{u^2 v^2 x_0}{v^2 {x_0}^2 + u^2 {y_0}^2} \tag{2}$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{u^2 v^2 y_0}{v^2 {x_0}^2 + u^2 {y_0}^2} \tag{3}$$

Der Abstand der Punkte P_1 und P_2 muss konstant $(u + v)/2$ betragen (siehe Aufgabenstellung).

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \frac{(u + v)^2}{4} \tag{4}$$

Nach einsetzen der Ausdrücke für x_1, x_2, y_1, y_2 und Zusammenfassen, erhalten wir:

$$\frac{4(v^4 {x_0}^2 + u^4 {y_0}^2)(v^2 {x_0}^2 + u^2(-v^2 + {y_0}^2))}{(v^2 {x_0}^2 + u^2 {y_0}^2)^2} = \frac{1}{4}(u + v)^2 \tag{5}$$

Wir gehen nun zur Parameterdartsellung über und ersetzen x_0, y_0 durch ihre Polarkoordinaten :

$$x_0 = r(t)\ \cos(t), \qquad y_0(t) = r(t)\ \sin(t) \tag{6}$$

$$\frac{(4(r^2 v^4 \cos[t]^2 + r^2 u^4 \sin[t]^2)\,(r^2 v^2 \cos[t]^2 + u^2(-v^2 + r^2 \sin[t]^2)))}{(r^2 v^2 \cos[t]^2 + r^2 u^2 \sin[t]^2)^2} = \frac{1}{4}(u + v)^2 \tag{7}$$

Diese Gleichung wird nun nach $r(t)$ aufgelöst:

$$\begin{aligned} r(t) = 4\surd((&u^2 v^6 \cos[t]^2 + u^6 v^2 \sin[t]^2)/(v^4(-u + 3v)(u + 5v)\cos[t]^4 + \\ &2u^2 v^2(7u^2 - 2uv + 7v^2)\cos[t]^2 \sin[t]^2 + \\ &u^4(3u - v)(5u + v)\sin[t^4])) \end{aligned}$$

Für x_m und y_m ergebne sich damit :

$$\begin{aligned} x_m(t) = {} & (u^2 v^2 \cos[t])/ \\ & (4(v^2 \cos[t]^2 + u^2 \sin[t]^2)\surd((u^2 v^6 \cos[t]^2 + u^6 v^2 \sin[t]^2)/ \\ & \qquad (v^4(-u + 3v)(u + 5v)\cos[t]^4 + \\ & \qquad\quad 2u^2 v^2(7u^2 - 2uv + 7v^2)\cos[t]^2 \sin[t]^2 + \\ & \qquad\quad u^4(3u - v)(5u + v)\sin[t^4]))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_m(t) = {} & (u^2 v^2 \sin[t])/ \\ & (4(v^2 \cos[t]^2 + u^2 \sin[t]^2)\surd((u^2 v^6 \cos[t]^2 + u^6 v^2 \sin[t]^2)/ \\ & \qquad (v^4(-u + 3v)(u + 5v)\cos[t]^4 + \\ & \qquad\quad 2u^2 v^2(7u^2 - 2uv + 7v^2)\cos[t]^2 \sin[t]^2 + \\ & \qquad\quad u^4(3u - v)(5u + v)\sin[t^4]))) \end{aligned}$$

Wir berechnen nun:

$$R(t) = \sqrt{{x_m}^2 + {y_m}^2} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} R(t) = {} & (u^2 v^2)/ \\ & (4(v^2\cos[t]^2 + u^2\sin[t]^2)\sqrt{((u^2 v^6\cos[t]^2 + u^6 v^2\sin[t]^2)/} \\ & (v^4(-u+3v)(u+5v)\cos[t]^4 + \\ & 2u^2v^2(7u^2 - 2uv + 7v^2)\cos[t]^2\sin[t]^2 + \\ & u^4(3u-v)(5u+v)\sin[t]^4))) \end{aligned}$$

Die Funktion $R(t)$ beschreibt die Polargleichnug vom Mittelpunkt der Sehne. Für Kurven in Polardarstellung berechnet sich der Flächeninhalt nach der *Leibnizschen Sektorenformel*:

$$A = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{t=2\pi} [R(t)]^2 \, dt \tag{9}$$

$$A = \frac{1}{32} \int_{t=0}^{t=2\pi} u^2 v^2 \left(\frac{16}{v^2\cos[t]^2 + u^2\sin[t]^2} - \frac{(u+v)^2}{v^4\cos[t]^2 + u^4\sin[t]^2} \right) dt \tag{10}$$

$$A = \pi\, u\, v - \frac{\pi}{16}\,(u+v)^2 \tag{11}$$

Als Differenz zwischen Ellipsenfläche und A ergibt sich :

$$A_{diff} = \frac{\pi}{16}\,(u+v)^2 \tag{12}$$

Die Länge der Sehne beträgt:

$$a + b = \frac{u+v}{2} \quad a = b \quad \rightarrow \quad a = \frac{u+v}{4}, \quad b = \frac{u+v}{4} \tag{13}$$

Nach dem Satz von Holditch berechnen wir :

$$A_{diff} = \pi\, a\, b = \pi \left(\frac{u+v}{4}\right) \left(\frac{u+v}{4}\right) = \frac{\pi}{16}\,(u+v)^2 \tag{14}$$

Das Ergebnis stimmt mit dem oben berechnet Integral überein, womit auch für die Ellipsensehen der Satz von Holditch bewiesen ist.

Lösungsweg über konjugierte Durchmesser von Reinhold Moebs

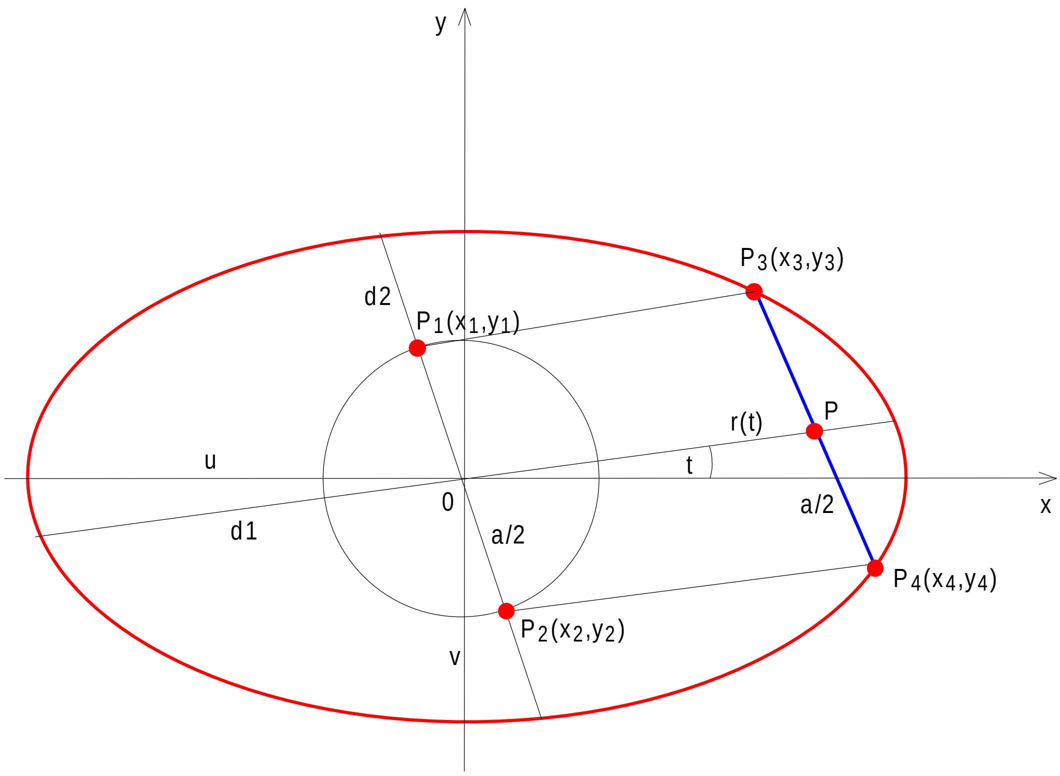

Abbildung 1: Ellipse mit Durchmesser d_1 und zugehörigen konjugierten Durchmesser d_2

Für das weitere Verständnis benötigen wir die Begriffe :

Durchmesser der Ellipse: sind Sehnen, die durch den Ellipsenmittelpunkt gehen und von diesem halbiert werden.

konjugierter Durchmesser: Mittelpunkte aller Sehnen, die zu einem Ellipsenduchmesser parallel sind. Es gilt für die Steigungen des Duchmessers und des konjugierten Durchmessers:

$$m_1\,m_2 = -\frac{u^2}{v^2} \tag{1}$$

Wir verlängern $r(t) = \overline{OP}$ in beiden Richtungen bis an den Rand der Ellipse und erhalten den Duchmesser d_1. Sein Anstieg beträgt :

$$d_1: \qquad m_1 = \tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \tag{2}$$

Zum Durchmesser d_1 zeichnen wir den konjugierten Duchmesser d_2 mit dem Anstieg m_2 durch den Ursprung.

$$d_2: \qquad m_2 = -\frac{\cos(t)\,u^2}{\sin(t)\,v^2} \tag{3}$$

Auf d_2 tragen wir die Länge der Sehne ab, in dem wir einen Kreis mit dem Radius

$$k_1 : \qquad R = \frac{a}{2} \tag{4}$$

um den Ursprung zeichnen. Die Schnittpunkte zwischen k_1 und d_2 seien mit P_1 und P_2 bezeichnet. Durch P_1, P_2 konstruieren wir die Parallelen zu d_1. Die Schnittpunkte zwischen den Parallelen und der Elllipse seien mit P_3 und P_4 bezeichnet.

Die Linie $\overline{P_1P_2}$ ist die Sehne mit der Länge a. Nach dem oben stehenden Satz wir diese Sehne genau in der Mitte vom Durchmesser d_1 geteilt, da dieser konjugiert zu d_2 ist !

Analytische Berechnung

Kreisgleichung mit Radius $R = a/2$:

$$k_1 : \qquad x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} \tag{5}$$

Geradengleichung für den Ellipsendurchmesser d_2

$$d_2 : \qquad y = m_2\, x = -\frac{v^2}{m_1\, u^2}\, x \tag{6}$$

Schnittpunkte zwischen k_1 und d_2 :

$$P_1(x_1, y_1) : \qquad x_1 = -\frac{a m_1 u^2}{2\sqrt{{m_1}^2 u^4 + v^4}}, \quad y_1 = \frac{a v^2}{2\sqrt{{m_1}^2 u^4 + v^4}} \tag{7}$$

$$P_2(x_2, y_2) : \qquad x_2 = \frac{a m_1 u^2}{2\sqrt{{m_1}^2 u^4 + v^4}}, \quad y_2 = -\frac{a v^2}{2\sqrt{{m_1}^2 u^4 + v^4}} \tag{8}$$

Gleichung der Parallelen t_2 zu d_1 durch den Punkt P_2:

$$t_2 : \qquad y = (x - x_2)\, m_1 + y_2 \tag{9}$$

Gleichung der Ellipse mit den Halbachsen u, v :

$$e : \qquad \frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1 \tag{10}$$

Schnittpunkt P_4 zwischen t_2 und Ellipse :

$$\begin{aligned} y_4 = \tfrac{1}{2}\Bigg(-\tfrac{a v^2}{\sqrt{{m_1}^2 u^4 + v^4}} &+ (m_1 \sqrt{(u^2 v^2 ({m_1}^2 u^2 + v^2)({m_1}^2 u^4 + v^4)} \\ &\qquad (-a^2({m_1}^2 u^2 + v^2) + 4({m_1}^2 u^4 + v^4))) \\ &((({m_1}^2 u^2 + v^2)({m_1}^2 u^4 + v^4))\Bigg), \\ x_4 = \tfrac{1}{2}\Bigg(\tfrac{a m_1 u^2}{\sqrt{{m_1}^2 u^4 + v^4}} &+ (\sqrt{(u^2 v^2 ({m_1}^2 u^2 + v^2)} \\ &\qquad ({m_1}^2 u^4 + v^4)(-a^2({m_1}^2 u^2 + v^2) + 4({m_1}^2 u^4 + v^4))))/ \\ &(({m_1}^2 u^2 + v^2)({m_1}^2 u^4 + v^4))\Bigg) \end{aligned}$$

Die gesuchte Polardarstellung vom Mittelpunkt der Sehne erhalten wir aus:

$$r = \overline{P_2P_4} \quad \rightarrow \quad r(t) = \sqrt{(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2} \tag{11}$$

$$r = \sqrt{-\frac{(1+{m_1}^2)u^2v^2(a^2({m_1}^2u^2+v^2) - 4({m_1}^2u^4+v^4))}{4({m_1}^2u^2+v^2)({m_1}^2u^4+v^4)}} \tag{12}$$

Für den Anstieg m_1 schreiben wir $m_1 = \tan(t)$ und erhalten $r = r(t)$:

$$r(t) = \frac{u\,v\,\sec(t)}{2}\sqrt{\frac{4}{v^2+u^2\tan[t]^2} - \frac{a^2}{v^4+u^4\tan[t]^2}} \tag{13}$$

Die Fläche, die der Radiusvektor $r(t)$ im Intervall $0 \leq t \leq 2\pi$ überstreicht, folgt aus der Leibnizschen Sektorenformel:

$$A = \frac{1}{2}\int\limits_{t=0}^{t=2\pi} r(t)^2\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi uv\sqrt{\frac{\mathrm{Sign}[u]^2}{\mathrm{Sign}[v]^2}}\,\mathrm{Sign}[v]}{\mathrm{Sign}[u]} - \frac{a^2\pi\mathrm{Sign}[u]^2\sqrt{\frac{\mathrm{Sign}[v]^4}{\mathrm{Sign}[u]^4}}}{2\mathrm{Sign}[v]^2}\right) \tag{14}$$

Im vorliegenden Fall gilt $u > 0$, $v > 0$, weshalb die Vorzeichenfunktion entfallen kann. Das Ergebnis entspricht dem Satz von Holditch.

$$A = \pi uv - \frac{a^2\pi}{4} \tag{15}$$

Man kann die Berechnung des Integrals umgehen, wenn man die Gleichung für $r(t)$ geschickt umformt:

$$r(t) = \frac{u\,v\,\sec(t)}{2}\sqrt{\frac{4}{v^2+u^2\tan[t]^2} - \frac{a^2}{v^4+u^4\tan[t]^2}} \tag{16}$$

$$r(t)^2 = \frac{u^2v^2}{u^2\sin^2(t)+v^2\cos^2(t)} - \frac{u^2\,v^2\,a^2}{4\,u^4\,\sin^2(t)+4\,v^4\,\cos^2(t)} \tag{17}$$

Setzt man :

$${\varepsilon_1}^2 = 1 - \frac{u^2}{v^2}, \quad {\varepsilon_2}^2 = 1 - \frac{u^4}{v^4}, \quad v' = \frac{a\,v}{2\,u}, \quad u' = \frac{a\,u}{2\,v} \tag{18}$$

so erhält man :

$$r(t)^2 = \frac{v^2}{1-{\varepsilon_1}^2\,\cos^2(t)} - \frac{v'^2}{1-{\varepsilon_2}^2\,\cos^2(t)} \tag{19}$$

Bei den Kurven

$$r_1(t) = \sqrt{\frac{v^2}{1-{\varepsilon_1}^2\,\cos^2(t)}}, \qquad r_2(t) = \sqrt{\frac{v'^2}{1-{\varepsilon_2}^2\,\cos^2(t)}} \tag{20}$$

handelt es sich um Polardarstellungen von Ellipsen mit dem Mittelpunkt im Ursprung. Die Halbachsen von $r_1(t)$ betragen u, v. Die Ellipse, die von $r_2(t)$ beschrieben wird hat die Halbachsen :

$$u' = \frac{a\,u}{2\,v}, \qquad v' = \frac{a\,v}{2\,u} \tag{21}$$

Die Fläche, welche $r(t)$ überstreicht beträgt:

$$A = \frac{1}{2}\int\limits_{t=0}^{2\pi} r(t)^2 dt = \frac{1}{2}\int\limits_{t=0}^{2\pi} r_1(t)^2 dt - \frac{1}{2}\int\limits_{t=0}^{2\pi} r_2(t)^2 dt \tag{22}$$

$$A = \pi\,u\,v - \pi\,u'\,v' = \pi\,u\,v - \pi\frac{a^2}{4} \tag{23}$$