Konstruktion der Goldkäferkurve

Cetonia aurata Linne

22. Mai 2004

Gegeben sei das rechtwinklig, kartesische Koordinatensystem mit dem Ursprung in O und den Achsen x, y. Auf den Koordinatenachsen gleite die Strecke $\overline{AB}$ mit der Länge $2 \cdot a$. Wir wählen auf der 1. Winkelhalbierenden w einen festen Punkt K, der von O den Abstand d haben möge. Ferner sei R die Mitte von $\overline{AB}$. Nun fällen wir das Lot von K aus auf $\overline{AB}$ und erhalten den Fußpunkt M (Abbildung 1). Gleitet nun $\overline{AB}$ auf den Achsen (beachte in allen vier Quadranten, wie in Abbildung 1 angedeutet), dann beschreibt unser Punkt M die genannte Käferkurve. Die Kurve ist den Umrissen des gemeinen Goldkäfers *Cetonia aurata Linne* sehr ähnlich.

1. Konstruiere die Kurve mit einem Programm der dynamischen Geometrie (EUKLID, ZUL o.ä.).

2. Leite aus der Konstruktionsbeschreibung eine Polardarstellung $r = r(\varphi)$ für die Kurve ab. Punktezahl=6

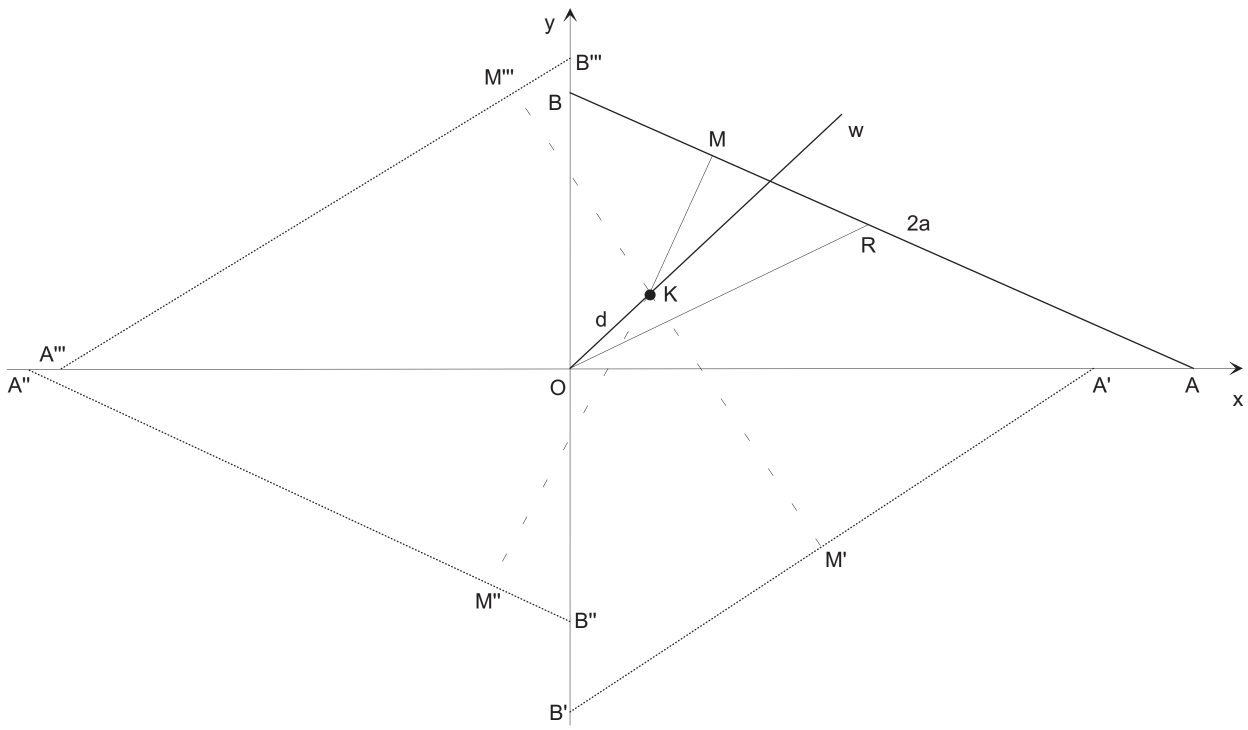

Abbildung 1: Konstruktion der Käferkurve

Konstruktionstext aus EUKLID

Mit dem Programm EUKLID (Roland Mechling, www.dynageo.de) kann die gesuchte Kurve leicht konstruiert werden. Auf der $x - Achse$ legen wir den verschiebaren Punkt A fest. Um A zeichnen wir einen Kreis mit dem Radius $r = 8\,cm$. Die Schnittpunkte zwischen dem Kreis und der $y - Achse$ bezeichnen wir mit B bzw. B'. Weiterhin spiegeln wird den Punkt A an der $y-$ Achse und bezeichnen das Spiegelbild mit A'. Die gesamte Konstruktion lautet dann:

```
A  ist ein Basispunkt, der an xa gebunden ist.
k1  ist ein Kreis mit Mittelpunkt A und Radius 8 cm
B  ist ein Schnittpunkt der Linie ya mit dem Kreis k1
B'  ist der 2. Schnittpunkt der Linie ya mit dem Kreis k1
A'  ist Bildpunkt von A bei der Achsenspiegelung an ya
w   ist die Halbierende des Winkels ( A ; O ; B )
K  ist ein Basispunkt, der an g1 gebunden ist.
s3  ist die Strecke  [ A ; A' ]
g2  ist die Gerade  ( B ; A )
g3  ist das Lot von K auf  g2
g4  ist die Gerade  ( A' ; B' )
P5  ist der Schnittpunkt der Linien g3 und g4
M  ist der Schnittpunkt der Linien g3 und g2
OL1  ist eine Ortslinie des Punktes M, wenn A gezogen wird
OL2  ist eine Ortslinie des Punktes P5, wenn A gezogen wird
g5  ist die Gerade  ( A ; B' )
g6  ist das Lot von K auf  g5
P8  ist der Schnittpunkt der Linien g6 und g5
OL3  ist eine Ortslinie des Punktes P8, wenn A gezogen wird
```

Polardarstellung der Kurve

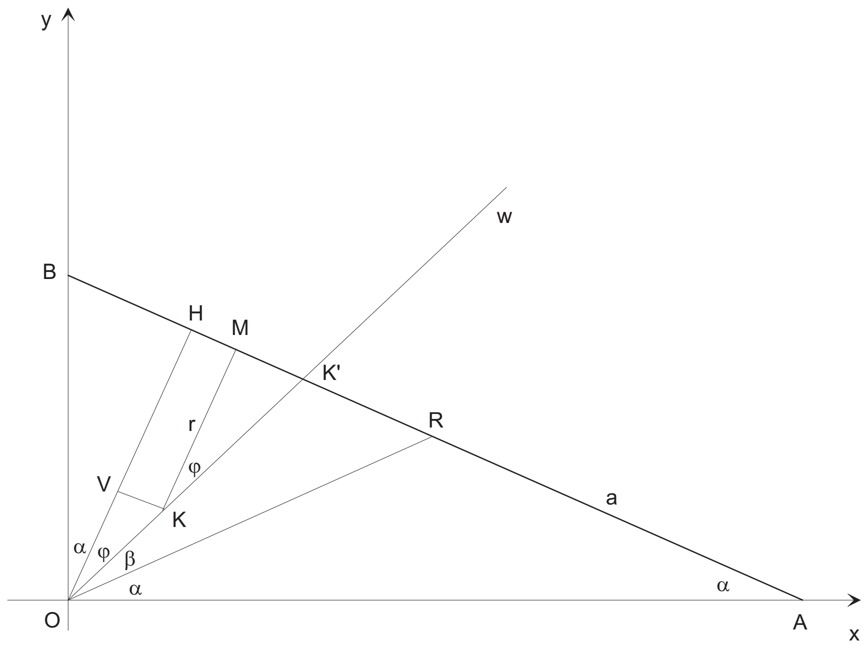

Abbildung 2: Herleitung der Polargleichung für die Käferkurve

Damit wir auf einfache Weise die Gleichung der Kurve gewinnen können, wählen wir für die Darstellung in Polarkoordinaten die 1.Winkelhalbierende w als Achse und den Punkt K als Pol. Die Polarkoordinaten von M seien dann (r, φ). Aus elementargeometrischen Gründen Überlegungen ist dabei der Winkel $\sphericalangle ROH = 2 \cdot \varphi$:

$$\alpha + \varphi = 45^\circ, \quad \alpha + \beta = 45^\circ \quad \rightarrow \quad \varphi = \beta \tag{1}$$

Es gilt dann:

$$\overline{OH} = a \cdot \cos \sphericalangle ROH = a \cdot \cos 2 \cdot \varphi \tag{2}$$
$$\overline{OH} = \overline{OV} + \overline{VH} = \overline{OV} + \overline{KM} \tag{3}$$
$$\overline{OH} = d \cdot \cos \varphi + \overline{KM} \tag{4}$$

und wegen $\overline{KM} = r$

$$\overline{OH} = d \cdot \cos \varphi + r \tag{5}$$

Wir isolieren r und setzen für $\overline{OH}$ den Ausdruck aus (2), so dass wir schließlich erhalten

$$r(\varphi) = a \cdot \cos 2 \cdot \varphi - d \cdot \cos \varphi \tag{6}$$

Abbildung 3 zeigt den Polarplot im Intervall $0 \leq t \leq 2 \cdot \pi$

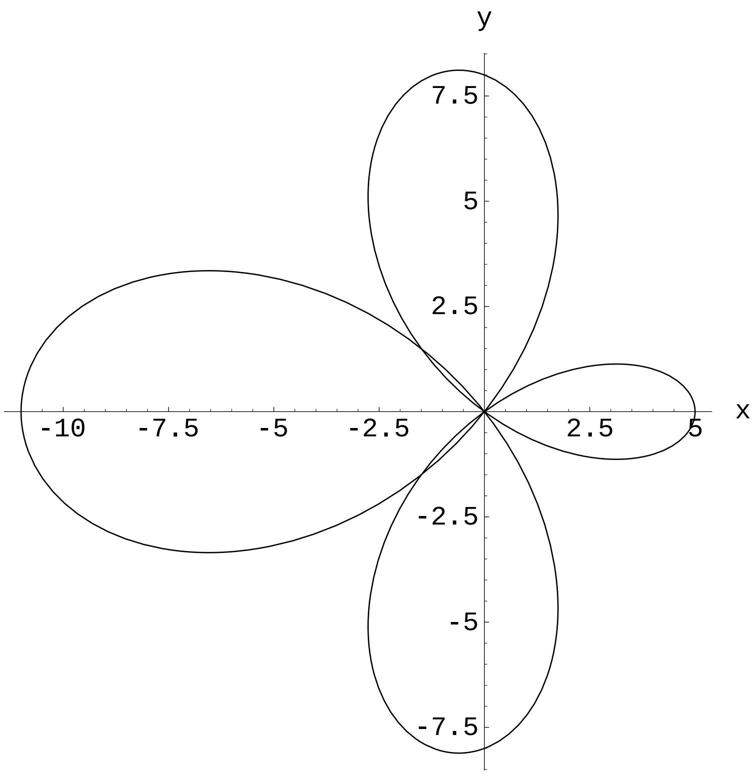

Abbildung 3: Polarplot der Kurve $r(\varphi) = a \cdot \cos 2 \cdot \varphi - d \cdot \cos \varphi$

Nehmen wir K als Ursprung eines zu XOY parallel verschobenen neuen Koordinatenesystems (x, y) und wenden darauf die Übergangsformeln von Polarkoordinaten zu cartesischen an, so erhalten wir eine algebraische Kurve 6.Ordnung.

$$(x^2 + y^2) \cdot (x^2 + y^2 + d \cdot x)^2 = a^2 \cdot (x^2 - y^2)^2 \tag{7}$$