Das Rätsel vom Geko auf der Leiter

Eine Aufgabe von Rüdeger Baumann

5. April 2002

Eine Leiter der Länge $l = 200\,cm$ lehnt an der Wand. Der Fußpunkt der Leiter befindet sich $5\,cm$ von der Wand entfernt. Karl der Geko ist schon $5\,cm$ die Leiter hinauf gekrochen und hat sich es dort erst einmal gemütlich gemacht. Emilia die Maus zieht die Leiter mit gleichmäßiger Geschwindigkeit $u = 1\,\frac{cm}{s}$ von der Wand weg. Im gleichen Moment beginnt Karl mit konstanter Geschwindigkeit $v = 1\,\frac{cm}{s}$ die Leiter hinauf zu kriechen.

1. Gesucht ist die Bahnkurve, auf der sich Karl bewegt. Als Parameter ist die laufende Zeit t in Sekunden zu verwenden.
2. Zeichnen Sie die Bahnkurve für das Intervall $0 \leq t \leq 195\,s$!
3. Zu welchem Zeitpunkt t_x erreicht der Geko seine maximale Höhe ?
4. Wie hoch über dem Boden befindet sich Karl zum Zeitpunkt $t = t_x$

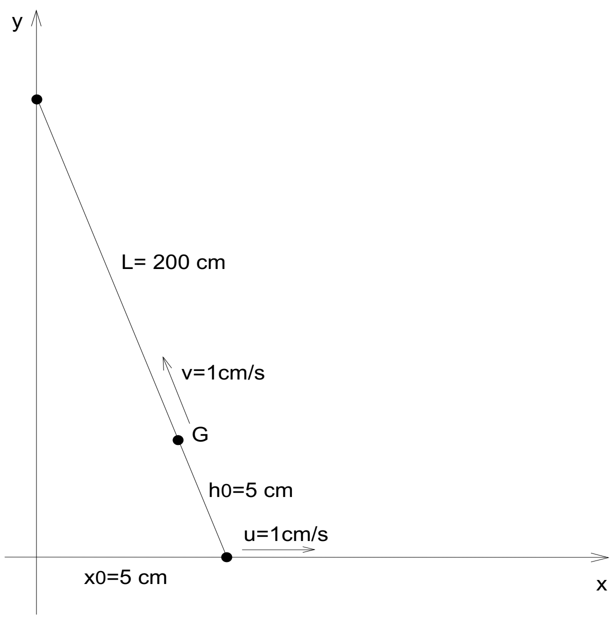

Abbildung 1: Der Geko auf der Leiter

Punktezahl=7

Parametergleichung der Bahnkurve

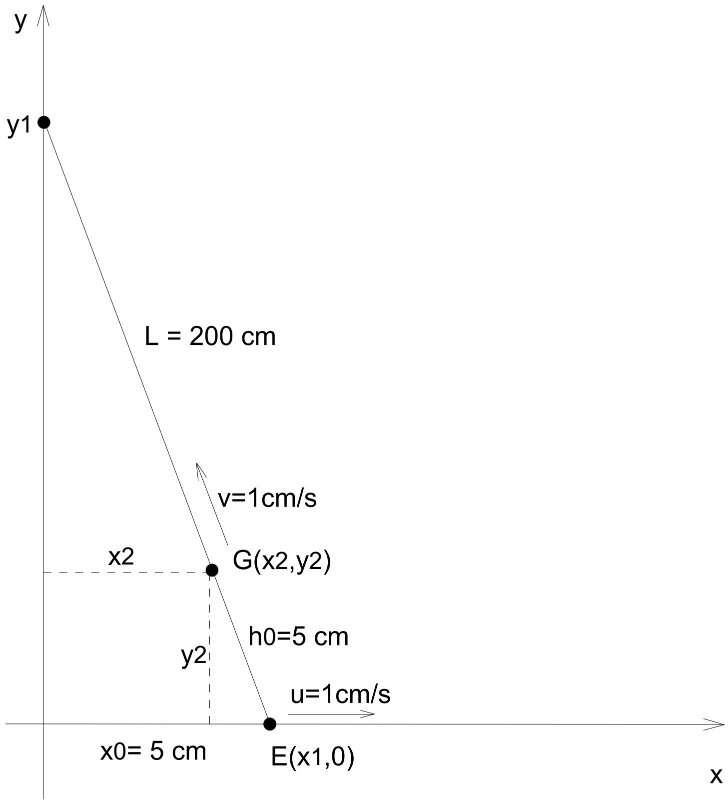

Abbildung 2: Skizze zur Lösung

Der Fußpunkt E der Leiter sei durch die Koordinaten $E(x_1, 0)$ beschrieben.

$$x_1(t) = x_0 + u\,t \tag{1}$$

Die Koordinate y_1 ist mit der Koordinate x_1 über die konstante Leiterlänge l fest verbunden:

$$x_1^2 + y_1^2 = l^2 \quad \rightarrow \quad y_1 = \sqrt{l^2 - (x_0 + u\,t)^2} \tag{2}$$

Die Koordinaten vom Geko folgen direkt aus dem Strahlensatz:

$$\frac{h}{x_2 - x_1} = \frac{l}{x_1} \quad \rightarrow \quad x_2 = x_1 \cdot \left(\frac{l-h}{l}\right) \tag{3}$$

$$\frac{h}{y_2} = \frac{l}{y_1} \quad \rightarrow \quad y_2 = y_1 \cdot \left(\frac{h}{l}\right) \tag{4}$$

An Stelle von h notieren wir nun die zeitabhängige Höhe des Geko's:

$$h(t) = h_0 + v\,t \quad \rightarrow \quad y_2 = \frac{h_0 + v\,t}{l} \cdot \sqrt{l^2 - (x_0 + u\,t)^2} \tag{5}$$

Die parameterabhängige Bahnkurve des Geko's wird damit durch die folgenden zwei Gleichungen beschrieben:

$$x_2(t) = (x_0 + u\,t) \cdot \left(\frac{l - h_0 - v\,t}{l} \right) \tag{6}$$

$$y_2 = \frac{h_0 + v\,t}{l} \cdot \sqrt{l^2 - (x_0 + u\,t)^2} \tag{7}$$

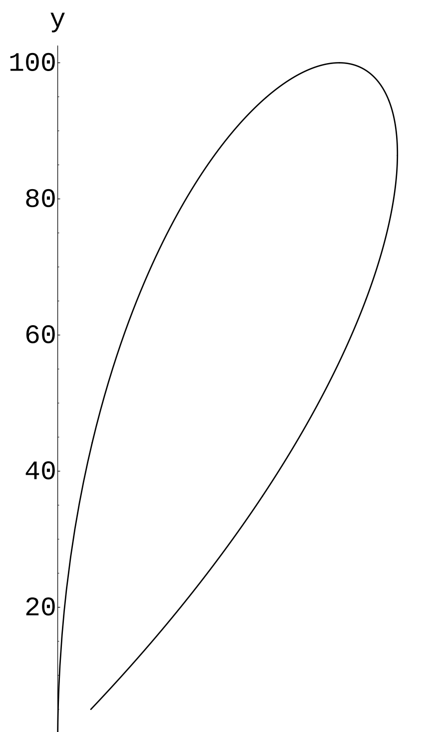

Abbildung 3: Bahnkurve vom Geko im Zeitintervall $0 \leq t \leq 195\,s$

Maximum der Bahnkurve

Um die maximale Höhe der Kurve $c(x_2, y_2)$ zu ermitteln genügt es das Maximum von $y_2(t)$ zu bestimmen.

$$\frac{d\,y_2}{dt} = -\frac{u(h_0 + tv)(tu + x_0)}{l\sqrt{l^2 - (tu + x_0)^2}} + \frac{v\sqrt{l^2 - (tu + x_0)^2}}{l} \tag{8}$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen wir mit einem Computeralgebraprogramm:

$$\dot{y}_2(t) = 0 \tag{9}$$

$$t_{01} = \frac{-u(h_0 u + 3vx_0) - u\sqrt{{h_0}^2 u^2 + 8l^2 v^2 - 2h_0 uvx_0 + v^2 {x_0}^2}}{4u^2 v} = \frac{1}{4}\,(-400\sqrt{2} - 20) \tag{10}$$

$$t_{02} = \frac{-u(h_0 u + 3vx_0) + u\sqrt{{h_0}^2 u^2 + 8l^2 v^2 - 2h_0 uvx_0 + v^2 {x_0}^2}}{4u^2 v} = \frac{1}{4}\,(400\sqrt{2} - 20) \approx 136.42\,s \tag{11}$$

Die Lösung t_{01} liefert eine negative Zeit und ist damit für unsere Aufgabenstellung nicht von Bedeutung. Das Maximum liegt damit bei $t_x = t_{02}$. Die Höhe erhalten wir nach dem Einsetzen in $y_2(t)$:

$$y_2(t_x) = \frac{1}{4lu}\Bigg(\Big(3h_0 u - 3vx_0 + \sqrt{8l^2 v^2 + (h_0 u - vx_0)^2}\Big)\cdot \sqrt{l^2 - \frac{\Big(-h_0 u + vx_0 + \sqrt{8l^2 v^2 + (h_0 u - vx_0)^2}\Big)^2}{16v^2}}\Bigg) = 100\,cm$$

Auf den Nachweis des Maximums über die zweite Ableitung sei an dieser Stelle verzichtet, da das Bild der Kurve keine andere Lösung zuläßt.