Die *Eurokurve*

Eine diffizile Konstruktion mit Nadel und Faden

von Ingmar Rubin, Berlin

Lehrer *Karl* zeigt seinen Schülern stets auf's neue die praktische Bedeutung der Mathematik. Das er die bevorstehende Umstellung auf den *Euro* nicht verpaßt hat, zeigt seine folgende Aufgabenstellung.

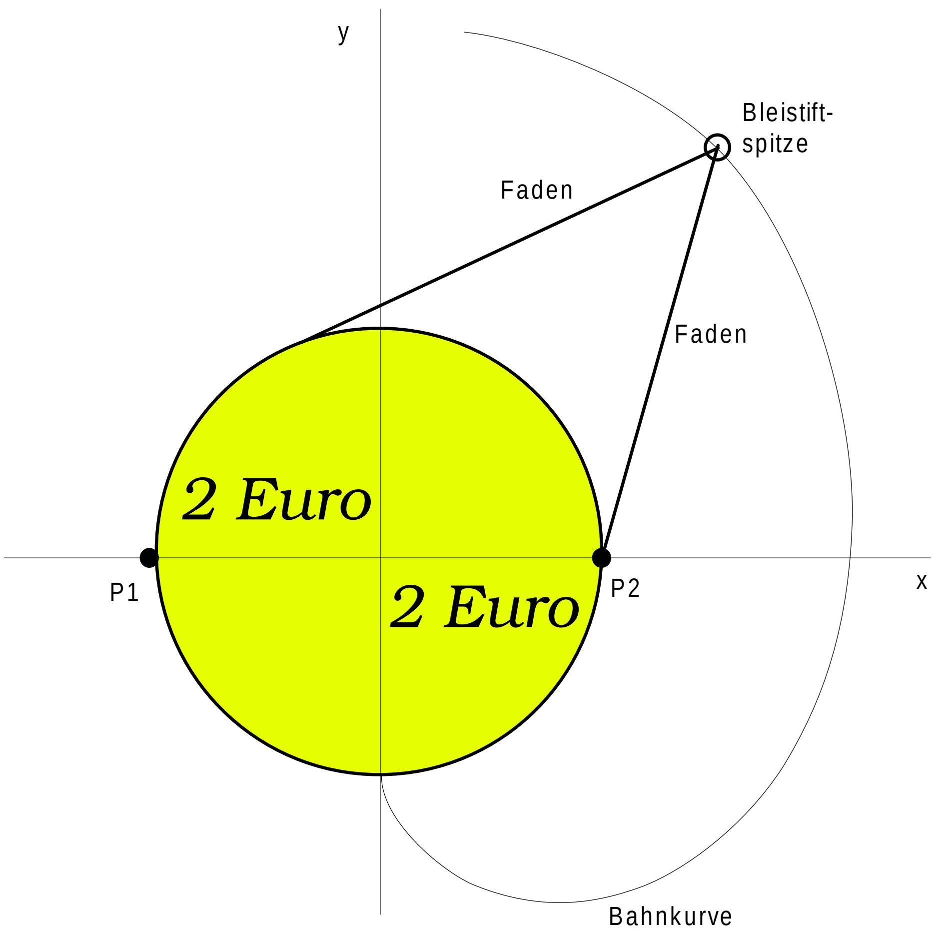

Abbildung 0.1: Skizze zur *Eurokurve*

Auf einem Blatt Millimeterpapier hat er ein Koordinatenkreuz gezeichnet. Nun holt er eine 2 Euro Münze aus seiner Tasche - es handelt sich um eine Imitation aus dem Süßwarenregal seines Supermarktes. Er platziert den Schokoladentaler genau zentrisch in das Koordinatensystem. Seinem Nähetui entnimmt er zwei Nadeln und ein Stück Bindfaden - was Mathematiker so alles bei sich haben ... .

Eine Nadel sticht er links des Talerrandes auf der $x - Achse$ ein. Der Bindfaden wird an der Nadel festgebunden und einmal straff um den Rand der Münze gelegt. Das zweite Ende wird ebenfalls an der Nadel festgebunden. Nun löst er die Nadel kurz und entnimmt eine der Schlaufen. Diese befestigt er mit der zweiten Nadel am rechten Talerrand auf der x-Achse. Mit einem spitzen Bleistift fährt er die Fadenschlaufe - bei stets straff gespannten Faden - einmal ab.

Das ganze erinnert an die *Gärtnerkonstruktion* einer Ellipse. Die entstandene Kurve hat mit einer Ellipse wenig zu tun. Sie erinnert an eine bekannte Kurve 4.Ordnung. Über den genauen Radius der 2 Euro Münze macht Lehrer *Karl* keine näheren Angaben - für die folgende Aufagenstellung rechne man mit $r = 1\,cm$.

1. Bestimmen sie die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten !
2. Wie groß ist die Fläche zwischen der Kurve und dem Rand der 2 Euro Münze ?
3. Mit welcher bekannten algebraischen Kurve 4. Ordnung hat die *Eurokurve* Ähnlichkeit ?
4. Zeichnen sie die *Eurokurve* zusammen mit der algebraischen Kurve in ein Diagramm.
5. Berechnen Sie die Flächendifferenz zwischen der *Eurokurve* und der algebraischen Kurve !

Punktezahl=12

1 Flächenberechnung - Teil I

Wir bezeichnen den Drehwinkel zwischen Radiusvektor $\overline{OB}$ und $x - Achse$ mit t. Die Fadenkurve kann in Abhängigkeit vom Winkel t nicht für das gesamte Intervall $0 \leq t \leq 2\,\pi$ mit einer Funktionsgleichung beschrieben werden.
Im Intervall $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0$ entspricht der Kurvenverlauf einer Kreisevolvente.

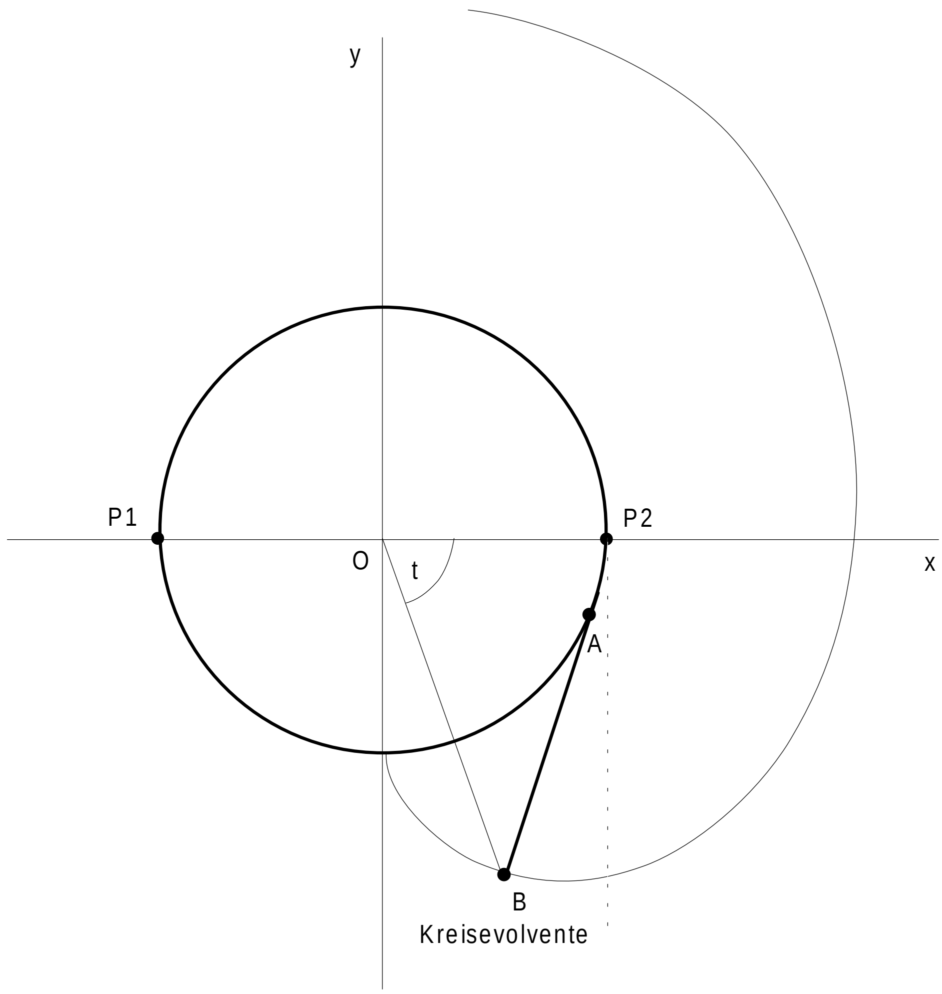

Abbildung 1.1: Flächenberechnung für das Intervall $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0$

Für jeden Schrittwinkel Δt wird von der Kreisperipherie ein Stück der Länge

$$\Delta L = 2\,r\,\Delta t \tag{1.1}$$

abgewickelt. Mit dem Faktor 2 berücksichtigen wir, das der Faden in diesem Intervall doppelt liegt. Der Abstand zwischen den Punkten A und B (siehe Bild 1.1) nimmt aus dem selben Grund nur um den Betrag $\frac{\Delta L}{2}$ zu. Die Gleichungen für die Kreisevolvente in Parameterdarstellung lauten:

$$x(t) = r\,\cos t + r\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\sin t \tag{1.2}$$

$$y(t) = r\,\sin t - r\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\cos t \tag{1.3}$$

Der Radiusvektor $r_1(t) = \overline{OB}$ lautet für das Intervall $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0$:

$$r_1(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{(4 + \pi^2 + 4t(\pi + t) + 4(\pi + 2t)\sin[2t])} \tag{1.4}$$

Die Fläche, die der Radiusvektor $r_1(t)$ im Intervall $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0$ überstreicht, errechnet sich aus der *Leibnizschen Sektorenformel* :

$$A_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{t=-\pi/2}^{t=0} [r_1(t)]^2\, dt \tag{1.5}$$

$$A_1 = \frac{r^2}{8}\int\limits_{t=-\pi/2}^{t=0} (4 + \pi^2 + 4t(\pi + t) + 4(\pi + 2t)\sin[2t])\, dt \tag{1.6}$$

$$A_1 = \frac{\pi^3\, r^2}{48} \tag{1.7}$$

2 Flächenberechnung - Teil II

An der Stelle $t = 0$ ändert sich die Betrachtung. Der Faden liegt jetzt nur einlagig auf der Kreisperipherie. Je Schrittwinkel nimmt die Summe der Seiten a und p um den Betrag $\Delta L = r\,\Delta t$ zu.

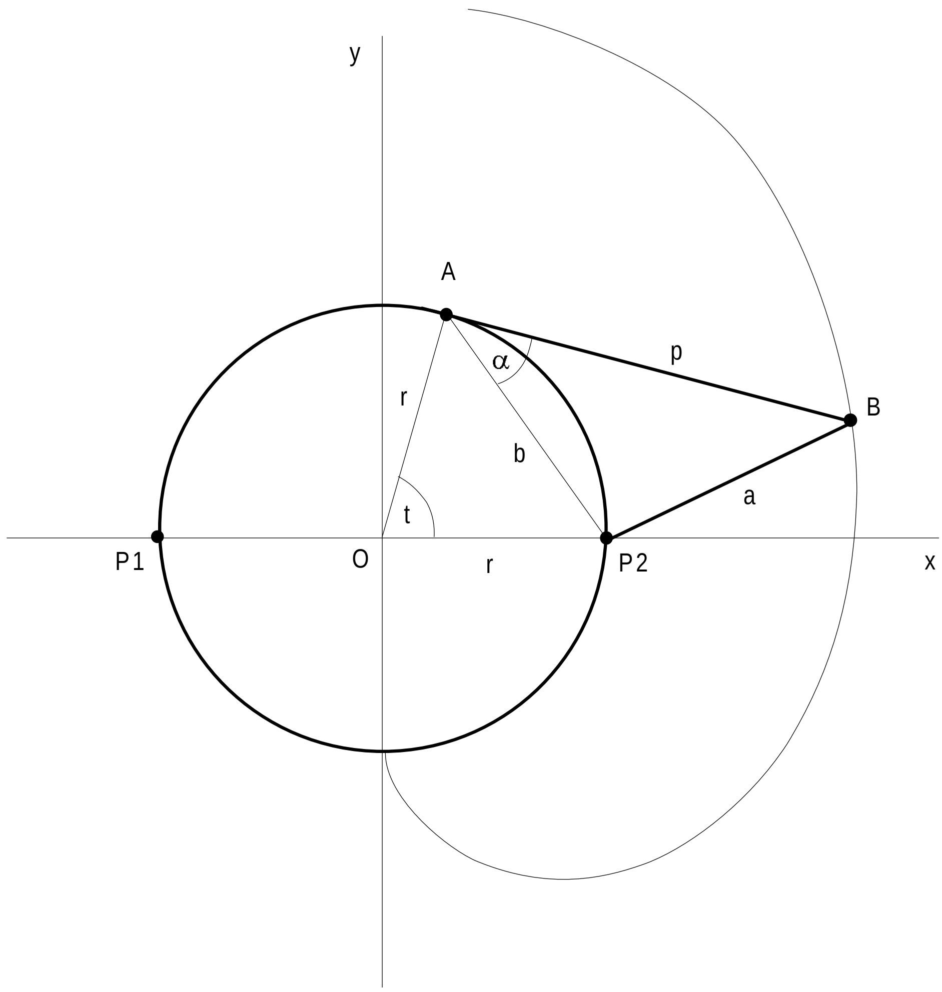

Abbildung 2.1: Für Winkel $t \geq 0$ weicht die Bahnkurve von der Evolvente ab

Die Länge des Fadens berechnet sich aus dem Bogenstück $\Delta s = r\,(\pi - t)$, der Seite p und der Seite a. Aus der Aufgabenstellung ist bekannt, das diese Summe identisch mit dem Kreisumfang ist.

$$L = r\,(\pi - t) + p + a = 2\,\pi\,r \tag{2.1}$$

Ziel der weiteren Überlegung ist eine Polardarstellung $r_2(t) = \overline{OB}$ zu finden. Zunächst wird mit Hilfe des Kosinussatzes eine Darstellung $p = p(t)$ hergeleitet.

Aus den Gesetzmäßigkeiten am Kreis ist bekannt, das der Sehnentangentenwinkel α halb so groß ist wie der Zentriewinkel t.

$$\alpha = \frac{t}{2} \tag{2.2}$$

Kosinussatz im Dreieck P_2OA:

$$b^2 = 2\,r^2\,(1 - \cos t) \quad \rightarrow \quad b = r\,\sqrt{2 - 2\,\cos t} \tag{2.3}$$

Kosinussatz im Dreieck P_2AB:

$$a^2 = b^2 + p^2 - 2\,a\,p\,\cos\frac{t}{2} \tag{2.4}$$

Gleichung (2.1) wird nach a umgestellt und anschließend in Gleichung (2.4) eingesetzt.

$$a = r\,(\pi + t) - p \tag{2.5}$$

$$a^2 = (r\,(\pi + t) - p)^2 = b^2 + p^2 - 2\,b\,p\,\cos\frac{t}{2} \tag{2.6}$$

Gleichung (2.6) kann nach $p(t)$ aufgelöst werden. An Stelle von b und b^2 wird Gleichung (2.3) eingesetzt.

$$p(t) = \frac{r\left(1 - \cos t - \frac{t^2}{2} - \pi\,t\,\frac{\pi^2}{2}\right)}{\sqrt{2 - 2\,\cos t}\,\cos\frac{t}{2} - (\pi + t)} \tag{2.7}$$

Aus dem Satz des Pythagoras im Dreieck OAB folgt der Radiusvetor $r_2(t)$:

$$r_2(t) = \sqrt{r^2 + p^2(t)} \tag{2.8}$$

Die Fläche, welche der Radiusvektor $r_2(t)$ im Intervall $0 \leq t \leq t_1$ überstreicht, berechnet sich aus:

$$A_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{t=0}^{t=t_1} (r^2 + p^2(t))\,dt \tag{2.9}$$

Um die Fläche A_2 zu berechnen wird nun der Winkel t_1 benötigt. An der Stelle $t = t_1$ muß Seite p gleich lang sein mit Seite a siehe Drachenviereck $POAB$ in Abbildung 3.1. Aus Gleichung (2.1) folgt:

$$2\,p + r\,(\pi - t_1) = 2\,\pi\,r \quad \rightarrow \quad p = \frac{1}{2}\,r\,(\pi + t_1) \tag{2.10}$$

Im rechtwinkligen $\triangle O\,A\,B$ gilt:

$$\tan\frac{t_1}{2} = \frac{p}{r} = \frac{r\,(\pi + t_1)}{2\,r} \tag{2.11}$$

$$\tan\frac{t_1}{2} = \frac{1}{2}\,(\pi + t_1) \quad \rightarrow \quad t_1 \approx 2.45518 \tag{2.12}$$

$$A_2 = \frac{r^2}{2}\int\limits_{t=0}^{t_1}\left(1 + \frac{\left(1 - \cos t - \frac{t^2}{2} - \pi\,t\,\frac{\pi^2}{2}\right)^2}{(\sqrt{2 - 2\,\cos t}\,\cos\frac{t}{2} - (\pi + t))^2}\right)dt = 8.71147\,r^2 \tag{2.13}$$

3 Flächenberechnung Teil III

Im Intervall $t_1 \leq t \leq \pi$ entspricht die Fläche einem Kreissektor mit dem Radius R. Die beiden Seiten p und a sind stets gleich lang. Daraus folgt, daß der Abstand $R = \overline{OB}$ konstant bleibt. Je Schrittwinkel Δt wird stets das gleiche Maß an Fadenlänge abgewickelt wie aufgewickelt.

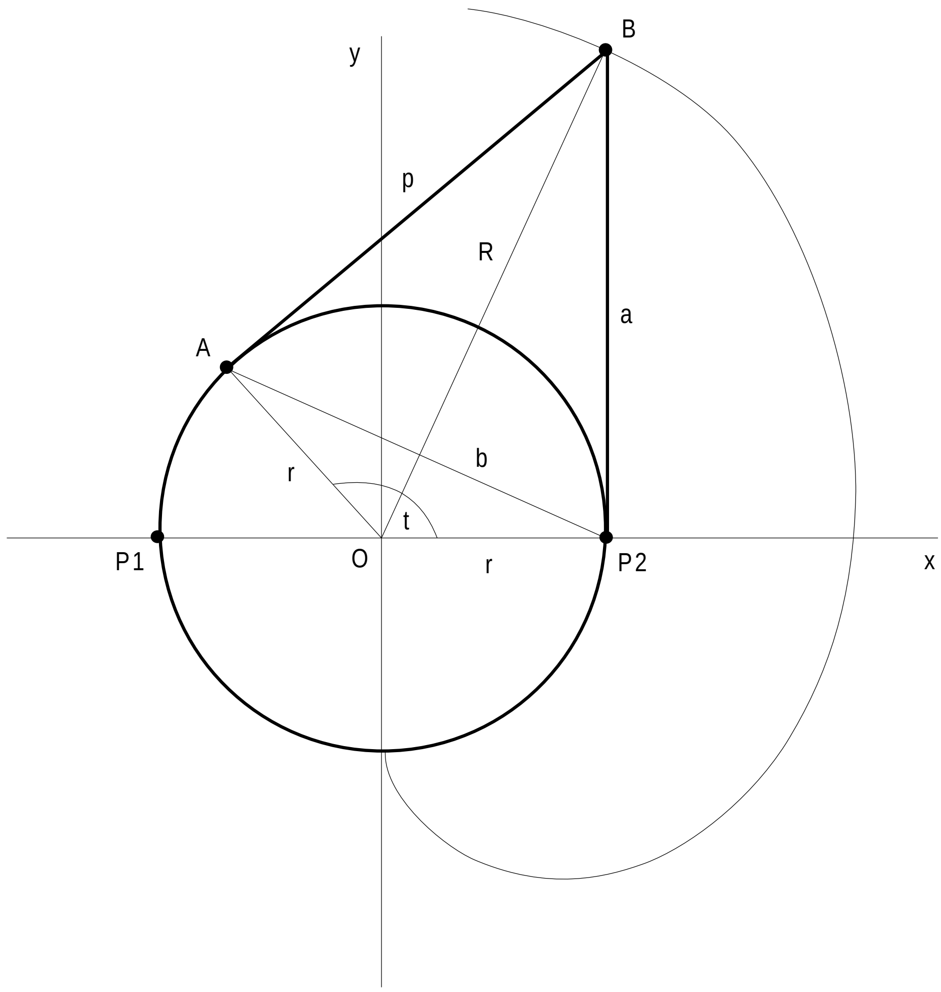

Abbildung 3.1: Im Intervall $t_1 \leq t \leq \pi$ reduziert sich die Berechnung auf einen Kreissektor mit dem Radius R

$$R^2 = r^2 + p^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}\,(\pi + t_1)\right)^2 \tag{3.1}$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\,R^2\,(\pi - t_1) = \frac{1}{2}\,r^2\,\left(1 + \frac{1}{4}\,(\pi + t_1)^2\right)\,(\pi - t_1) \tag{3.2}$$

4 Berechnung der resultierenden Gesamtfläche

Die weiteren beiden Teilflächen entsprechen aus Symmetriebetrachtungen dem Integral (1.5) und dem Integral (2.9), welche bereits oben berechnet wurden. Am Schluß der Flächenberechnung muß von der Gesamtsumme die Kreisfläche abgezogen werden, da diese implizit bei allen Teilberechnungen mit einbezogen ist (der Radiusvektor in der Leibnizschen Sektorenformel überstreicht die innere Kreisfläche !).

$$A_{ges} = 2\,A_1 + 2\,A_2 + A_3 - \pi\,r^2 \tag{4.1}$$

$$A_{ges} = r^2 \left(\frac{\pi^3}{24} + 2\,8.71147 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} (\pi + t_1)^2 \right) (\pi - t_1) - \pi \right) \tag{4.2}$$

Für den Radius $r = 1\,cm$ erhalten wir $A_{ges} = 17.3765\,cm^2$

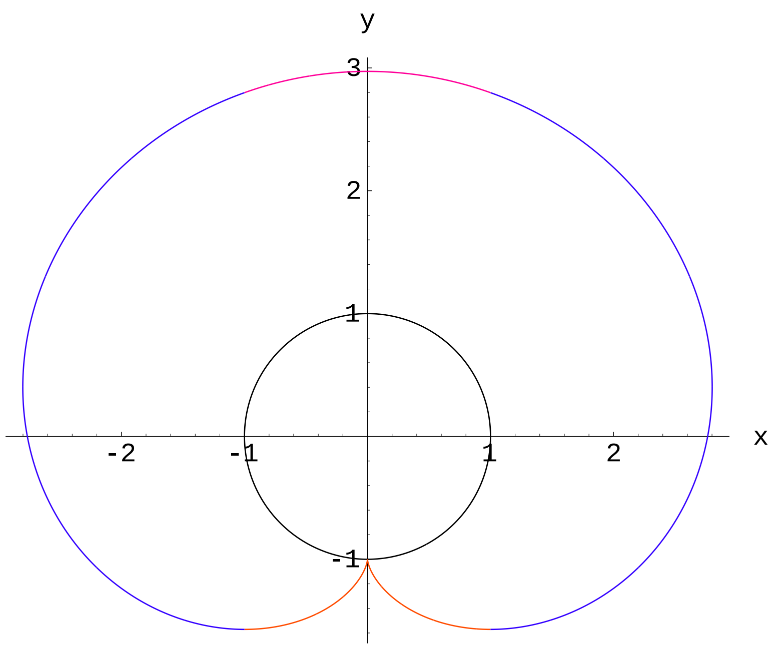

Abbildung 4.1: Computersimulation der Bahnkurve

5 Vergleich mit der Kardioide

Die Bahnkurve besitzt große Ähnlichkeit mit einer *Kardioide* :

$$r_k = a\,(1 + \sin[t]) \qquad a = 2\,r \tag{5.1}$$

Der Flächeninhalt der Kardioide berechnet sich zu:

$$A_k = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{t=2\pi} r_k^2\, dt = \frac{3}{2}\,\pi\, a^2 \tag{5.2}$$

Für den Vergleich zur Aufgabenstellung muß die innere Kreisfläche subtrahiert werden:

$$A_{res} = A_k - \pi\, r^2 = \frac{3}{2}\,\pi\, 4\, r^2 - \pi\, r^2 = 5\,\pi\, r^2 = 15.708\, cm^2 \tag{5.3}$$

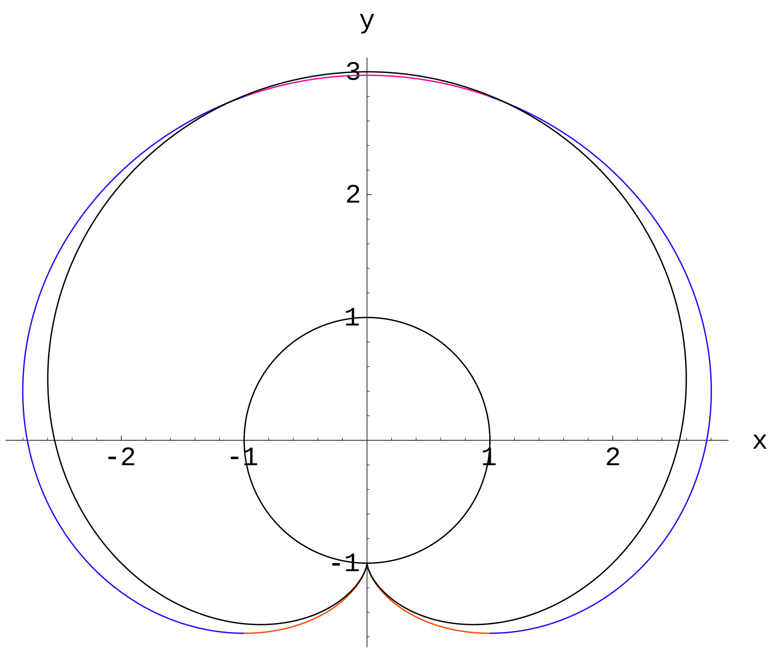

Abbildung 5.1: Kardioide und *Eurokurve* im Vergleich