Acht Euromünzen im Kreis

Gerhard J. Woeginger

Newsgroup *de.rec.denksport*

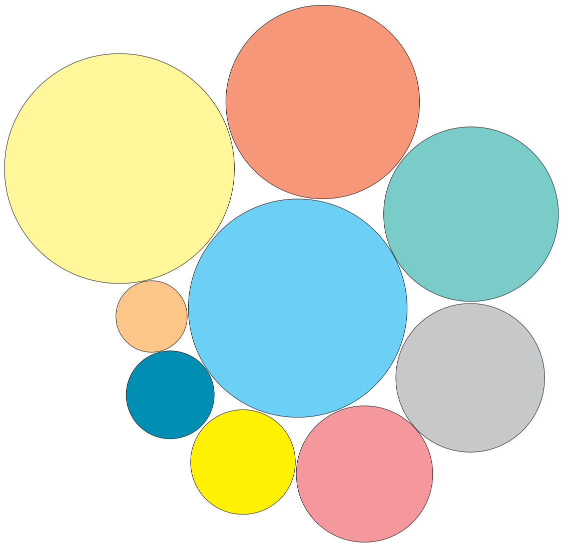

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Wir betrachten acht Euro und EuroCent Münzen:

- Eine 2-Euro Münze (mit Durchmesser 25.75mm)
- Eine 1-Euro Münze (mit Durchmesser 23.25mm)
- Eine 50-EuroCent Münze (mit Durchmesser 24.25mm)
- Eine 20-EuroCent Münze (mit Durchmesser 22.25mm)
- Eine 10-EuroCent Münze (mit Durchmesser 19.75mm)
- Eine 5-EuroCent Münze (mit Durchmesser 21.25mm)
- Eine 2-EuroCent Münze (mit Durchmesser 18.75mm)
- Eine 1-EuroCent Münze (mit Durchmesser 16.25mm)

Wir ordnen diese acht Münzen im Kreis an, sodass jede Münze genau zwei andere Münzen berührt, und sodass alle acht eine in der Mitte liegende Kreisscheibe K berühren.
Bei welcher Anordnung ist der Radius von K am groessten?
Bei welcher Anordnung ist der Radius von K am kleinsten?

Lösungsvorschlag

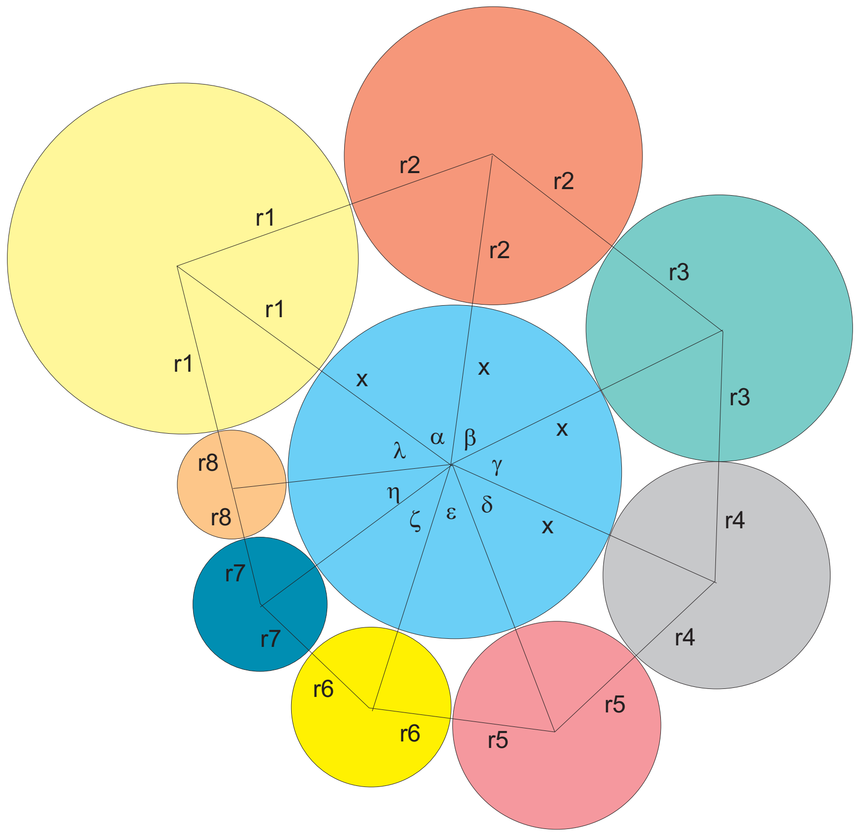

Abbildung 2: Skizze zum Lösungsweg

Wir verbinden je zwei benachbarte Kreismittelpunkte und erhalten ein Achteck (Abbildung 2). Die Eckpunkte des Achtecks verbinden wir mit dem Mittelpunkt der Kreisscheibe und bezeichnen die Innewinkel mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \lambda$. Der gesuchte Radius vom inneren Berührungskreis sei x und die Radien der acht Münzen $r_1 \ldots r_8$. Die Innenwinkel können wir über den Kosinussatz berechen :

$$\cos\alpha = \frac{(r_1+x)^2 + (r_2+x)^2 - (r_1+r_2)^2}{2\,(r_1+x)\,(r_2+x)} \tag{1}$$

$$\cos\beta = \frac{(r_2+x)^2 + (r_3+x)^2 - (r_2+r_3)^2}{2\,(r_2+x)\,(r_3+x)} \tag{2}$$

bis

$$\cos\lambda = \frac{(r_8+x)^2 + (r_1+x)^2 - (r_8+r_1)^2}{2\,(r_8+x)\,(r_1+x)} \tag{3}$$

Für die Summe der Winkel gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \zeta + \eta + \lambda = 360° \tag{4}$$

Mit Hilfe der Umkehrfunktion Arcuskosinus erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
&\arccos\left(\frac{(r_1+x)^2+(r_2+x)^2-(r_1+r_2)^2}{2\,(r_1+x)\,(r_2+x)}\right)+\\
&\arccos\left(\frac{(r_2+x)^2+(r_3+x)^2-(r_2+r_3)^2}{2\,(r_2+x)\,(r_3+x)}\right)+\\
&\dots\\
&\arccos\left(\frac{(r_8+x)^2+(r_1+x)^2-(r_8+r_1)^2}{2\,(r_8+x)\,(r_1+x)}\right)=2\,\pi
\end{aligned}$$

Diese Gleichung lösen wir mit einem Näherungsverfahren nach x auf. Bei der Variation der Münzanordnung halten wir den Radius r_8 fest. Nun müssen wir für alle $7! = 5040$ Permutationen der Radien $r_1 \dots r_7$ den Radius von k berechnen und dabei das Minimum bzw. Maximum herausfinden. In Mathematica erhalten wir als Ergebnis:

$k_{min} \approx 17.0711$ mit der Anordnung $12.875, 9.375, 11.625, 10.625, 11.125, 9.875, 12.125, 8.125$

und

$k_{max} \approx 17.1612$ mit der Permutation $9.875, 11.125, 12.125, 12.875, 11.625, 10.625, 9.375, 8.125$.

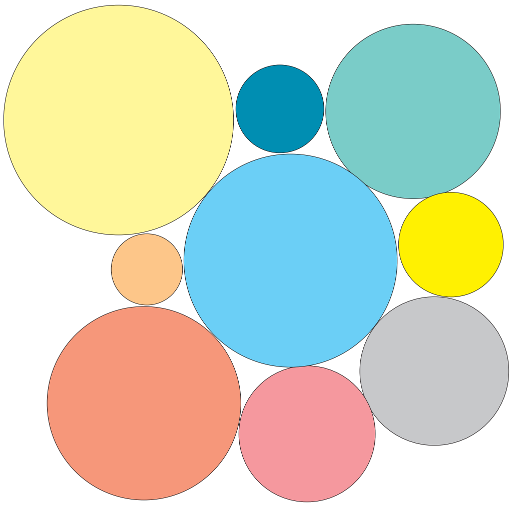

Abbildung 3: Anordung mit minimalen Durchmesser der Kreisscheibe $k_{min} \approx 17.0711$

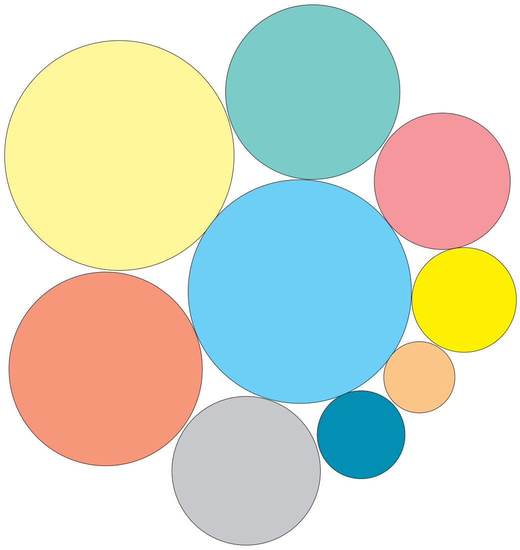

Abbildung 4: Anordung mit maximalen Durchmesser der Kreisscheibe $k_{max} \approx 17.1612$