

Fünf Euromünzen im Kreis

Gerhard J. Woeginger

14. September 2006

Wir betrachten zwei 2-Euro Münzen (mit Durchmesser 25.75mm) und drei 1-Euro Münzen (mit Durchmesser 23.25mm).

Bis auf Rotationen und Spiegelungen gibt es grundsätzlich nur zwei verschiedene Arten, diese fünf Münzen im Kreis anzuordnen, sodass jede Münze genau zwei andere Münzen berührt, und sodass alle fünf eine in der Mitte liegende Kreisscheibe K berühren:

1. Die beiden 2-Euro Münzen neben einander,
2. Die beiden 2-Euro Münzen nicht neben einander.

Bei welcher der beiden Anordnungen ist der Radius von K grösser?

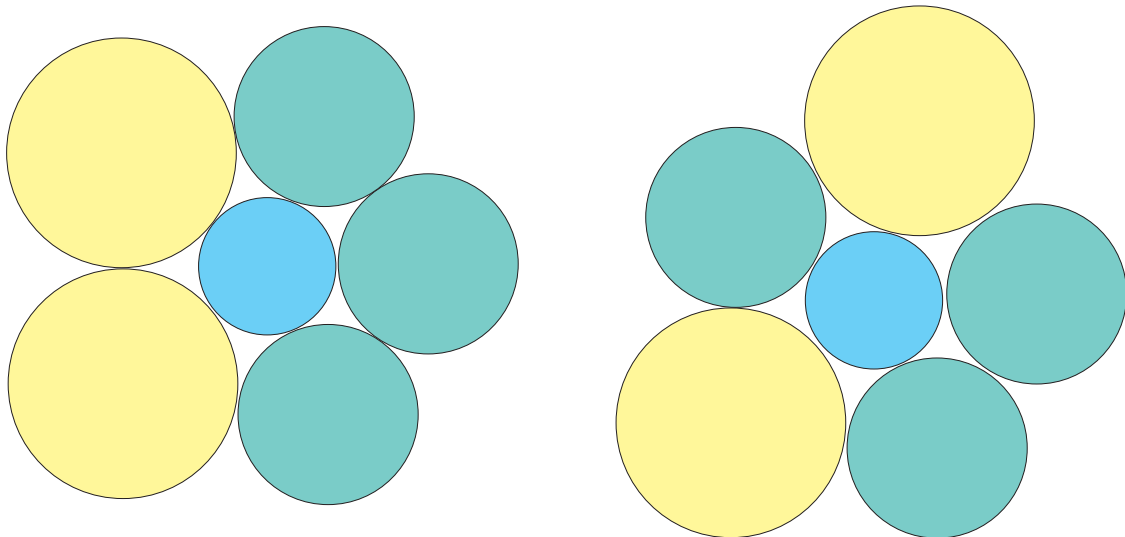


Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

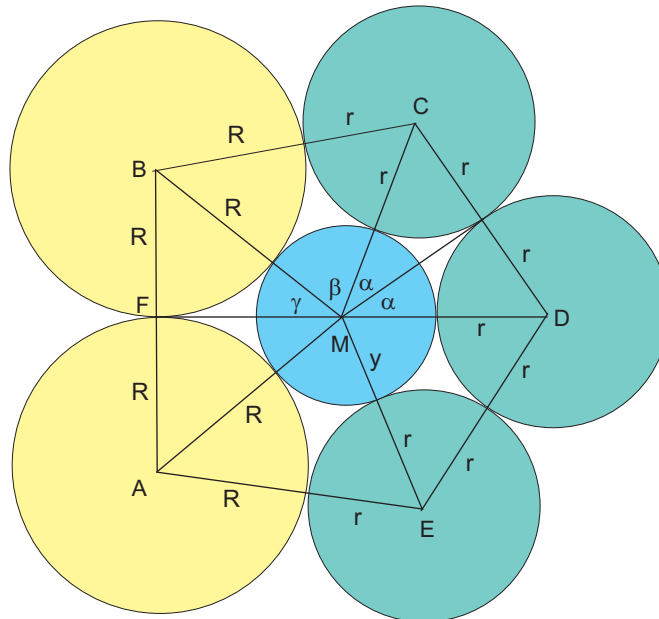
Fall 1: Die beiden 2 Euromünzen liegen nebeneinander

Abbildung 2: Skizze zum Lösungsweg 1

Wir verbinden je zwei benachbarte Kreismittelpunkte und erhalten das Fünfeck $ABCDE$ (Abbildung 2). Der gesuchte Radius vom inneren Berührungskreis sei y . Für die eingezeichneten Innenwinkel α, β, γ gilt:

$$2\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \rightarrow \quad \beta + \gamma = 180^\circ - 2\alpha \quad (1)$$

Nach Anwendung von trigonometrischen Beziehungen erhalten wir:

$$\cos(\beta + \gamma) = \cos(180^\circ - 2\alpha) \quad (2)$$

$$\cos\beta \cdot \cos\gamma - \sin\beta \cdot \sin\gamma = -\cos(2\alpha) \quad (3)$$

Der Kosinussatz im Dreieck CMD liefert:

$$4r^2 = 2(r+y)^2 - 2(r+y)^2 \cos(\alpha) \quad \rightarrow \quad \cos(2\alpha) = 1 - \frac{2r^2}{(r+y)^2} \quad (4)$$

Der Kosinussatz im Dreieck BMC liefert:

$$(R+r)^2 = (R+y)^2 + (r+y)^2 - 2(R+y)(r+y) \cos\beta \quad (5)$$

umgestellt nach $\cos\beta$:

$$\cos\beta = \frac{(R+y)^2 + (r+y)^2 - (R+r)^2}{2(R+y)(r+y)} \quad (6)$$

Den Term $\sin\beta$ erhalten wir dann über den *trigonometrischen Pythagoras*:

$$\sin\beta = \sqrt{1 - (\cos\beta)^2} \quad (7)$$

Im rechtwinkligen Dreieck BFM ist:

$$\sin \gamma = \frac{R}{R+y}, \quad \cos \gamma = \frac{\sqrt{(R+y)^2 - R^2}}{R+y} \quad (8)$$

Die Resultate aus (4) bis (8) setzen wir in (3) ein und erhalten eine Bestimmungsgleichung für y

$$1 + \frac{-2R\sqrt{rRy(r+R+y)} + \sqrt{y(2R+y)}(r(-R+y) + y(R+y))}{(r+y)(R+y)^2} = \frac{2r^2}{(r+y)^2} \quad (9)$$

Mit $R = 25.75 \div 2 \text{ mm}$ und $r = 23.25 \div 2 \text{ mm}$ ergibt sich als numerische Näherungslösung $y \approx 8.49021 \text{ mm}$

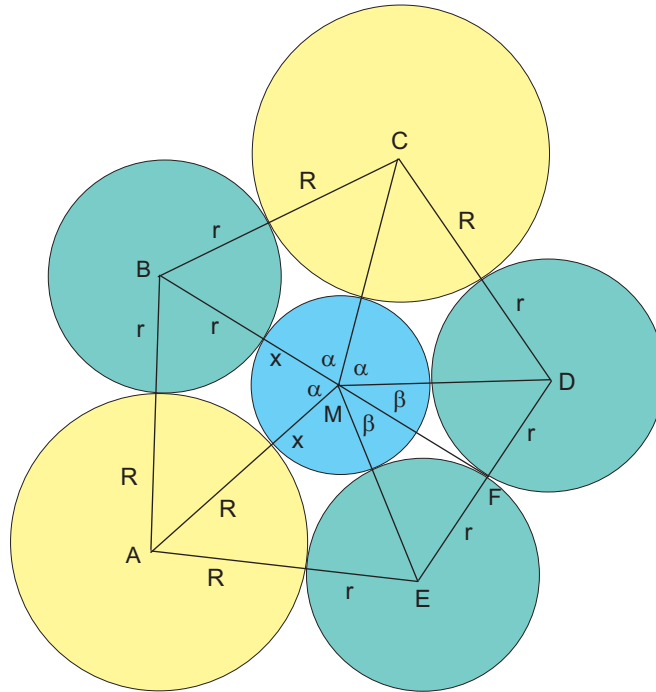
Fall 2: Die beiden 2 Euromünzen liegen nicht nebeneinander

Abbildung 3: Skizze zum Lösungsweg 2

Wir verbinden je zwei benachbarte Kreismittelpunkte und erhalten das Fünfeck $ABCDE$ (Abbildung 3). Der gesuchte Radius vom inneren Berührungskreis sei x . Für die eingezeichneten Innenwinkel α, β gilt:

$$2\alpha + \beta = 180^\circ \quad \rightarrow \quad \alpha = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \quad (1)$$

Im Dreieck AMB wenden wir den Kosinussatz an:

$$(r + R)^2 = (r + x)^2 + (R + x)^2 - 2 \cdot (r + x) \cdot (R + x) \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

Im rechtwinkligen Dreieck DFM gilt:

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{(r + x)^2 - r^2}}{r + x} \quad (3)$$

Gleichung (1) wird nun mit Hilfe von Winkeltheoremen umgeformt:

$$\alpha = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \quad \rightarrow \quad \cos \alpha = \cos \left(90^\circ - \frac{\beta}{2} \right) = \sin \left(\frac{\beta}{2} \right) = \sqrt{\frac{1}{2} (1 - \cos \beta)} \quad (4)$$

Schließlich ersetzen wir $\cos \beta$ mit dem Ergebnis aus (3):

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} (1 - \cos \beta)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{(r + x)^2 - r^2}}{r + x} \right)} \quad (5)$$

Nun können wir $\cos \alpha$ in (2) ersetzen und erhalten eine Gleichung zur Bestimmung von x .

$$(r + R)^2 = (r + x)^2 + (R + x)^2 - 2 \cdot (r + x) \cdot (R + x) \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{(r + x)^2 - r^2}}{r + x} \right)} \quad (6)$$

Nach Zusammenfassen der Terme ergibt sich die Gleichung:

$$(r + R)^2 + (r + x)(R + x) \sqrt{2 - \frac{2\sqrt{x(2r + x)}}{r + x}} = (r + x)^2 + (R + x)^2 \quad (7)$$

Mit $R = 25.75 \div 2 \text{ mm}$ und $r = 23.25 \div 2 \text{ mm}$ ergibt sich als numerische Näherungslösung $x \approx 8.48743 \text{ mm}$. Im Fall das beide Münzen nebeneinander liegen betrug $y \approx 8.49021 \text{ mm}$, d.h. $y > x$.

Lösungsvorschlag II

von *Lothar Teichert* Betrachte die Anordnung, bei der die beiden Zwei-Euro-Münzen benach-

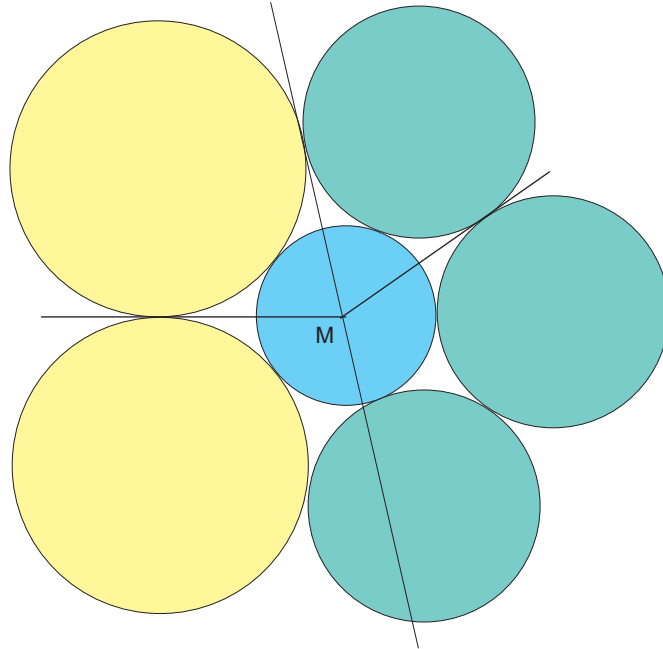


Abbildung 4: Skizze zum Lösungsvorschlag II

bart sind. Der Strahl vom Mittelpunkt des mittleren Kreises zum Berührungspunkt der beiden Zwei-Euro-Münzen ist aus Symmetriegründen Tangente an die Münzen. Dasselbe gilt für einen Strahl vom Mittelpunkt zu einem Berührungspunkt zweier Ein-Euro-Münzen.

Diese beiden Strahlen zerlegen das Ganze in einen Sektor mit zwei Münzen (Ein- und Zwei-Euro) und einen mit drei Münzen. Einer dieser Sektoren wird an der Winkelhalbierenden zwischen den Strahlen gespiegelt. Dabei bleiben die Münzen ganz, sie ändern nur die Reihenfolge; der mittlere Kreis bleibt auch ganz; die Münzen berühren immer noch den mittleren Kreis; die beiden Strahlen berühren immer noch je zwei Münzen, jetzt aber zwei verschiedenen grosse, sodass diese Münzen sich nicht berühren. Der mittlere Kreis ist also etwas grösser als einer, bei dem sich je zwei benachbarte Münzen berühren würden. D. h. wenn die Zwei-Euro-Münzen nicht benachbart sind, und sich jeweils zwei Münzen berühren, ist der Kreis in der Mitte kleiner.