Fünf Euromünzen im Kreis

Gerhard J. Woeginger

14. September 2006

Wir betrachten zwei 2-Euro Münzen (mit Durchmesser 25.75mm) und drei 1-Euro Münzen (mit Durchmesser 23.25mm).
Bis auf Rotationen und Spiegelungen gibt es grundsaetzlich nur zwei verschiedene Arten, diese fünf Münzen im Kreis anzuordnen, sodass jede Münze genau zwei andere Münzen berührt, und sodass alle fünf eine in der Mitte liegende Kreisscheibe K berühren:

1. Die beiden 2-Euro Münzen neben einander,
2. Die beiden 2-Euro Münzen nicht neben einander.

Bei welcher der beiden Anordnungen ist der Radius von K grösser?

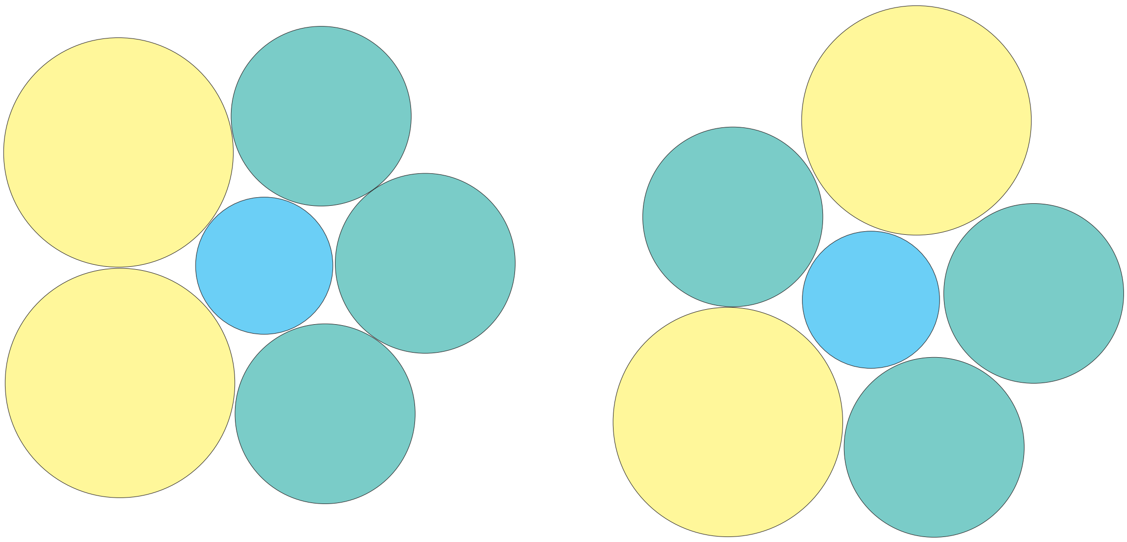

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Fall 1: Die beiden 2 Euromünzen liegen nebeneinader

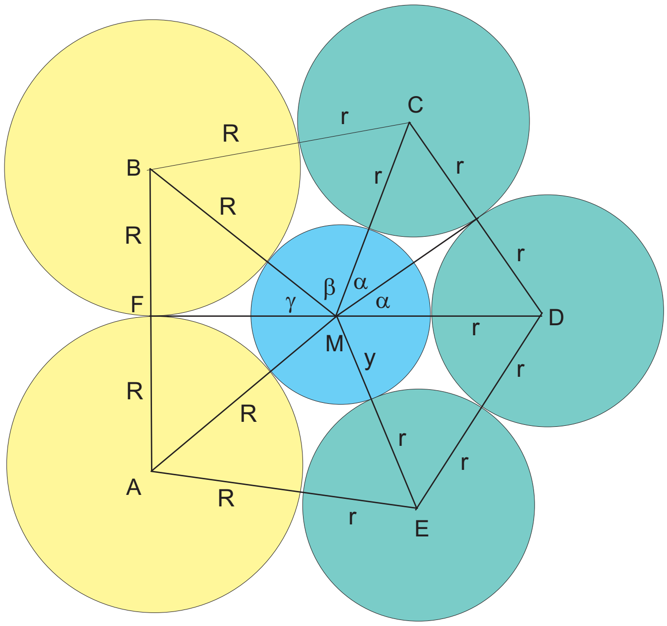

Abbildung 2: Skizze zum Lösungsweg 1

Wir verbinden je zwei benachbarte Kreismittelpunkte und erhalten das Fünfeck $ABCDE$ (Abbildung 2). Der gesuchte Radius vom inneren Berührungskreis sei y. Für die eingezeichneten Innenwinkel α, β, γ gilt:

$$2\,\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \rightarrow \quad \beta + \gamma = 180^\circ - 2\,\alpha \tag{1}$$

Nach Anwendung von trigonometrischen Beziehungen erhlaten wir:

$$\cos\left(\beta + \gamma\right) = \cos\left(180^\circ - 2\,\alpha\right) \tag{2}$$

$$\cos\beta \cdot \cos\gamma - \sin\beta \cdot \sin\gamma = -\cos\left(2\,\alpha\right) \tag{3}$$

Der Kosinussatz im Dreick CMD liefert:

$$4\,r^2 = 2\,(r+y)^2 - 2\,(r+y)^2\,\cos(\,\alpha) \quad \rightarrow \quad \cos(2\,\alpha) = 1 - \frac{2\,r^2}{(r+y)^2} \tag{4}$$

Der Kosinussatz im Dreieck BMC liefert:

$$(R+r)^2 = (R+y)^2 + (r+y)^2 - 2\,(R+y)\,(r+y)\,\cos\beta \tag{5}$$

umgestellt nach $\cos\beta$:

$$\cos\beta = \frac{(R+y)^2 + (r+y)^2 - (R+r)^2}{2\,(R+y)\,(r+y)} \tag{6}$$

Den Term $\sin\beta$ erhalten wir dann über den *trigonometrischen Pythagoras*:

$$\sin\beta = \sqrt{1 - (\cos\beta)^2} \tag{7}$$

Im rechtwinkligen Dreieck BFM ist:

$$\sin\gamma = \frac{R}{R+y}, \qquad \cos\gamma = \frac{\sqrt{(R+y)^2 - R^2}}{R+y} \tag{8}$$

Die Resulatate aus (4) bis (8) setzen wir in (3) ein und erhalten eine Bestimmungsgelichung für y

$$1 + \frac{-2\,R\,\sqrt{r\,R\,y\,(r+R+y)} + \sqrt{y\,(2\,R+y)}\,(r\,(-R+y) + y\,(R+y))}{(r+y)\,(R+y)^2} = \frac{2\,r^2}{(r+y)^2} \tag{9}$$

Mit $R = 25.75 \div 2\,mm$ und $r = 23.25 \div 2\,mm$ ergibt sich als numerische Näherungslösung $y \approx 8.49021\,mm$

Fall 2: Die beiden 2 Euromünzen liegen nicht nebeneinader

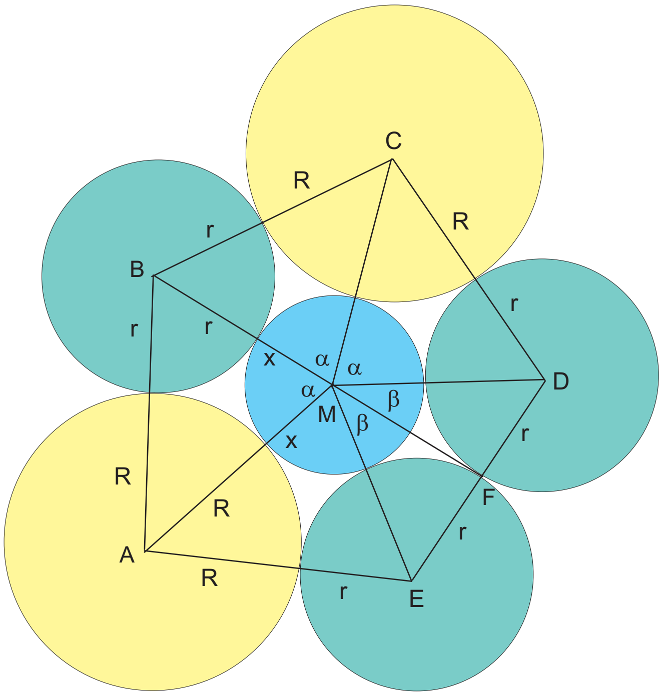

Abbildung 3: Skizze zum Lösungsweg 2

Wir verbinden je zwei benachbarte Kreismittelpunkte und erhalten das Fünfeck $ABCDE$ (Abbildung 3). Der gesuchte Radius vom inneren Berührungskreis sei x. Für die eingezeichneten Innenwinkel α, β gilt:

$$2\,\alpha + \beta = 180^\circ \quad \rightarrow \quad \alpha = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \tag{1}$$

Im Dreieck AMB wenden wir den Kosinussatz an:

$$(r+R)^2 = (r+x)^2 + (R+x)^2 - 2\cdot(r+x)\cdot(R+x)\cdot\cos\alpha \tag{2}$$

Im rechtwinkligen Dreieck DFM gilt:

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{(r+x)^2 - r^2}}{r+x} \tag{3}$$

Gleichung (1) wird nun mit Hilfe von Winkeltheoremen umgeformt:

$$\alpha = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \cos\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\,(1-\cos\beta)} \tag{4}$$

Schließlich ersetzen wir $\cos\beta$ mit dem Ergebnis aus (3):

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\,(1-\cos\beta)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{(r+x)^2-r^2}}{r+x}\right)} \tag{5}$$

Nun können wir $\cos\alpha$ in (2) ersetzen und erhalten eine Gleichung zur Bestimmung von x.

$$(r+R)^2 = (r+x)^2 + (R+x)^2 - 2\cdot(r+x)\cdot(R+x)\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{(r+x)^2-r^2}}{r+x}\right)} \qquad (6)$$

Nach Zusammenfassen der Terme ergibt sich die Gleichung:

$$(r+R)^2 + (r+x)\,(R+x)\sqrt{2-\frac{2\sqrt{x\,(2\,r+x)}}{r+x}} = (r+x)^2 + (R+x)^2 \qquad (7)$$

Mit $R = 25.75 \div 2\,mm$ und $r = 23.25 \div 2\,mm$ ergibt sich als numerische Näherungslösung $x \approx 8.48743\,mm$ Im Fall das beide Münzen nebeneinander liegen betrug $y \approx 8.49021\,mm$, d.h $y > x$.

Lösungsvorschlag II

von *Lothar Teichert* Betrachte die Anordnung, bei der die beiden Zwei-Euro-Münzen benach-

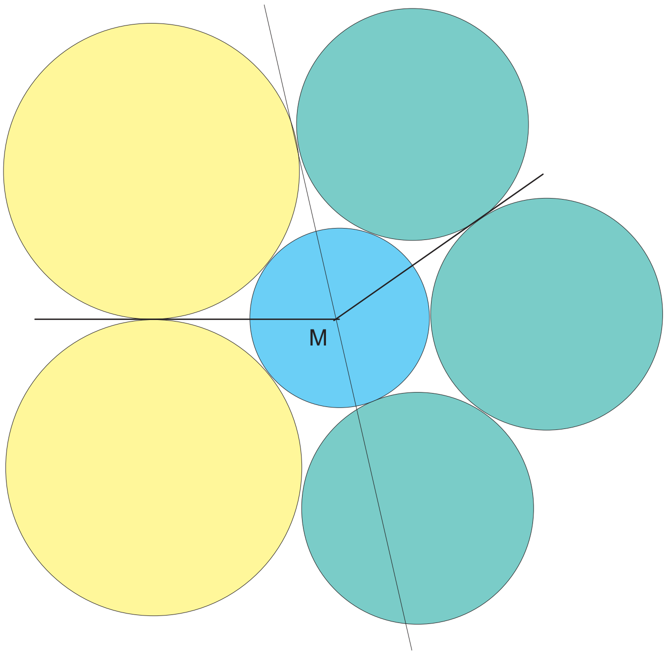

Abbildung 4: Skizze zum Lösungsvorschlag II

bart sind. Der Strahl vom Mittelpunkt des mittleren Kreises zum Berührpunkt der beiden Zwei-Euro-Münzen ist aus Symmetriegrnden Tangente an die Münzen. Dasselbe gilt fr einen Strahl vom Mittelpunkt zu einem Berührpunkt zweier Ein-Euro-Mnzen.
Diese beiden Strahlen zerlegen das Ganze in einen Sektor mit zwei Mnzen (Ein- und Zwei-Euro) und einen mit drei Münzen. Einer dieser Sektoren wird an der Winkelhalbierenden zwischen den Strahlen gespiegelt. Dabei bleiben die Münzen ganz, sie ändern nur die Reihenfolge; der mittlere Kreis bleibt auch ganz; die Münzen berühren immer noch den mittleren Kreis; die beiden Strahlen berühren immer noch je zwei Mnzen, jetzt aber zwei verschieden grosse, sodass diese Münzen sich nicht berühren. Der mittlere Kreis ist also etwas grösser als einer, bei dem sich je zwei benachbarte Münzen berhren wrden. D h. wenn die Zwei-Euro-Mnzen nicht benachbart sind, und sich jeweils zwei Münzen berühren, ist der Kreis in der Mitte kleiner.