Kelleraufteilung

aus *Göttinger Mathematikzirkel*

Aufgabenblatt 4

Ein Kohlenkeller hat die Form eines Quadrates mit der Seitenlänge 1. Drei Familien wollen diesen durch den Einbau von Trennwänden in drei Flächengleiche Teile zerlegen. Eine Möglichkeit hierzu zeigt Abbildung 1. Die Gesamtlänge der eingebauten Wände ist hierbei 2. Trennwände sind nun aber ziemlich teuer und deshalb sollte man versuchen, die Gesamtlänge der Trennwände so kurz wie möglich zu wählen.
Man finde eine solche möglichst kurze Variante!
Hinweis: Die Trennwände müssen hierbei keineswegs immer gerade verlaufen!

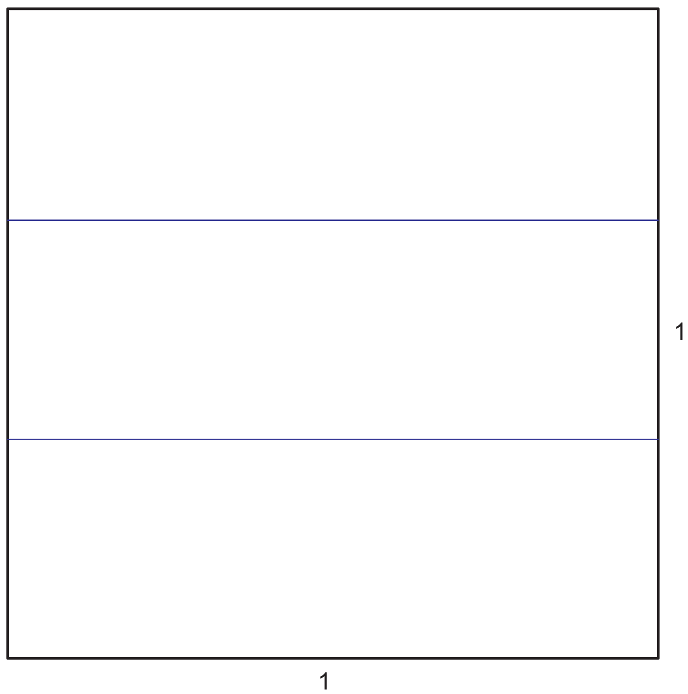

Abbildung 1: Aufteilung des Kohlenkellers in drei gleich große Teile

Vorüberlegungen

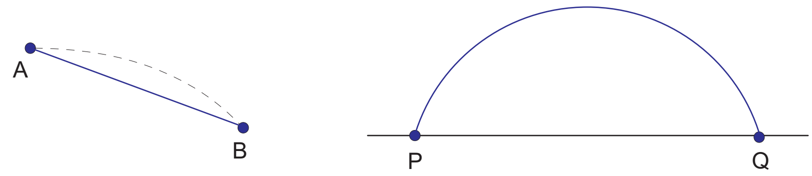

Abbildung 2: Ergebnisse aus der Variationsrechnung

Folgende Grundsätze sollten bei der Lösungsfindung berücksichtigt werden:

1. von allen Kurven die zwei Punkte A, B in der Ebene verbinden, ist die Gerade die kürzeste Linie (Beweis über Variationsrechnung möglich)

2. der Kreis bzw. Kreisbogen schließt die größtmögliche Fläche ein bei kleinsten Umfang (isoperimetrisches Problem der Variationsrechnung)

3. die Kreisbögen sollten auf die weiteren Begrenzungswände nach Möglichkiet senkrecht auftreffenen (Variationsrechnung)

4. symmetrische Flächenaufteilungen sind zu bevorzugen, d.h. es gibt wenigstens eine Spiegelachse.

Im ersten Schritt werden wir einige elementargeometrische Fälle untersuchen. Die Lösung mit der kleinsten Länge wird dann weiter optimiert. Im zweiten Teil der Lösungsfindung werden wir zusätzlich Kreisbögen mit einbeziehen, gemäß den obigen Erkenntnissen aus der Variationsrechnung. Auch hier werden wir die Kreisbögen in ihrem Radius variieren, um die optimale Lösung zu finden

Untersuchung elementargeometrischer Fälle

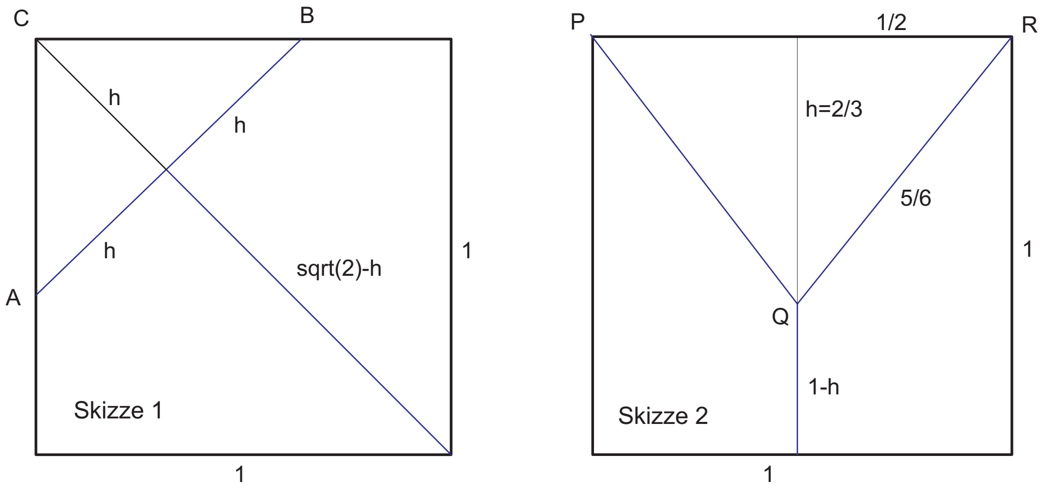

Abbildung 3: zwei Möglichkeiten mit schräg gestellten Wänden

Berechnung für Skizze 1: zunächst müssen wir h so bestimmen, das der Flächeninhalt vom gleichschenkliegen Dreieck ABC genau 1/3 beträgt.

$$F_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (h + h) = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{\frac{1}{3}} \tag{1}$$

Die Länge der Stellwände ergibt dann:

$$s_1 = h + h + \sqrt{2} - h = h + \sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{2} \approx 1.99156 \tag{2}$$

In Skizze 2 beträgt die Höhe h:

$$F_{PQR} = \frac{h \cdot 1}{2} = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad h = \frac{2}{3} \tag{3}$$

Die Seite $\overline{QR}$ berechnet sich aus dem Pythagoras:

$$\overline{QR} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}} = \frac{5}{6} \tag{4}$$

Die Länge der Stellwände ergibt:

$$s_2 = 2 \cdot \overline{QR} + (1 - h) = 2 \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{3} = 2 \tag{5}$$

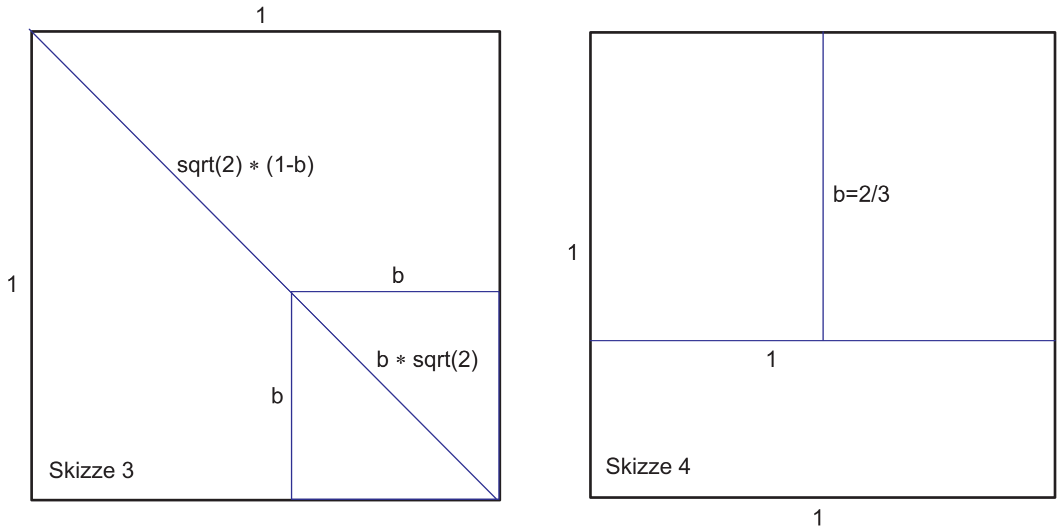

Abbildung 4: zwei weitere Möglichkeiten zur Aufteilung des Kellers

In Skizze 3 bestimmen wir die Seitenlänge b des einbeschriebenen Qudrates, so dass die Fläche genau 1/3 beträgt:

$$F = b^2 = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{6}$$

Die Länge der Stellwände beträgt dann:

$$s_3 = b + b + \sqrt{2} \cdot (1 - b) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 1.75242 \tag{7}$$

In Skizze 4 beträgt die Länge der Stellwände nur noch:

$$s_4 = 1 + \frac{2}{3} \approx 1.6666 \tag{8}$$

Der Wert s_4 ist von allen Werten bisher das Optimum.

Optimierungsphase für gerade Stellwände

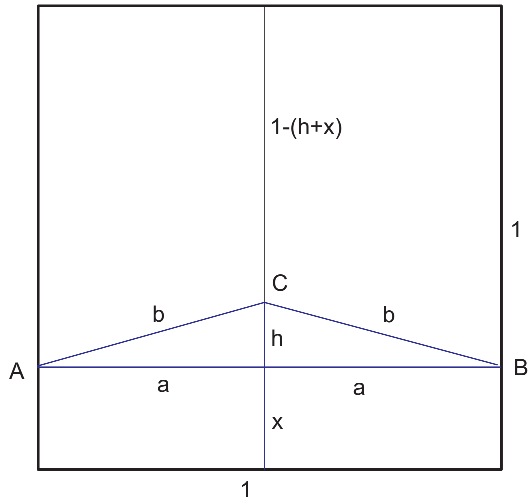

Abbildung 5: Ausgangspunkt für die weitere Optimierung ist Skizze 4

Der Wert s_4 ist kleiner als alle vorangehenden Werte $s_1 \dots s_3$. Wir verwenden deshalb Skizze 4 als Ausgangspunkt für weitere Optimierungen. In Abbildung 5 arbeiten wir mit zwei schrägen Wänden, wobei wir die Höhe h im Dreieck ABC als freien Parameter einführen. Das Rechteck unterhalb des Dreicks muß zusammen mit der Dreiecksfläche 1/3 der Quadratfläche ergeben:

$$h \cdot a + 2 \cdot a \cdot x = \frac{4\,a^2}{3} \quad \rightarrow \quad x = \frac{2\,a}{3} - \frac{h}{2} \tag{9}$$

Die Länge einer Schrägwand berechnet sich aus dem Pythagoras:

$$b = \sqrt{a^2 + h^2} \tag{10}$$

Die Gesamtlänge der Stellwände beträgt:

$$s(h) = 2 \cdot b + 2\,a - (h + x) = \frac{4\,a}{3} - \frac{h}{2} + 2\sqrt{a^2 + h^2} \tag{11}$$

Von dieser Funktion ermitteln wir das Minimum:

$$s'(h) = \frac{2\,h}{\sqrt{a^2 + h^2}} - \frac{1}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad h_0 = \frac{a}{\sqrt{15}} \tag{12}$$

Mit $a = 1/2$ erhalten wir als minimale Lösung für unsere Problem:

$$s_{min} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{15}}{4} \approx 1.63491, \qquad h_{min} = \frac{1}{2\sqrt{15}} \approx 0.129099 \tag{13}$$

Optimierung mittels Kreisbögen

Aus den Vorüberlegungen wissen wir, dass Kreisbögen eine Fläche optimal eingrenzen. Natürlich ist gleichzeitig jeder Kreisbogen über der Sehne länger als die Sehne selbst. Aus diesem Gegensatz versuchen wir nun in den folgenden Kapiteln das Optimum zu bestimmen.

Viertelkreisbogen und Diagonale

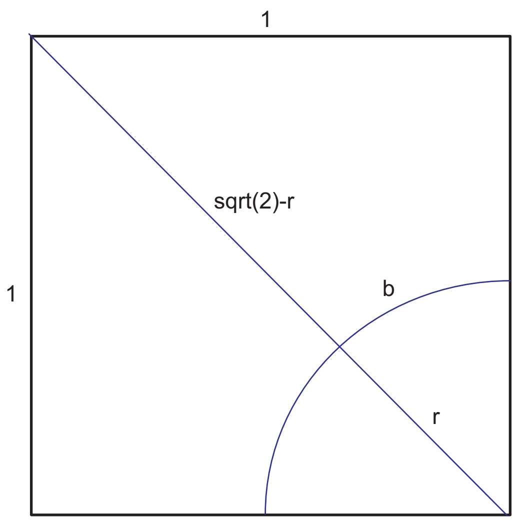

Abbildung 6: Kreisbogen und Diagonale

In Abbildung 6 muß der Viertelkreisradius r so bestimmt werden, dass seine Fläche 1/3 beträgt

$$F = \frac{\pi}{4} \cdot r^2 = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad r = \frac{2}{\sqrt{3\,\pi}} \approx 0.65147 \tag{14}$$

Die Länge des Viertelbogens berechnet sich dann zu:

$$b = \frac{\pi \cdot r}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3\,\pi}} \tag{15}$$

Für die Länge der Stellwände ergibt sich:

$$s_6 = b + \sqrt{2} - r = \frac{\pi - 2}{\sqrt{3\,\pi}} + \sqrt{2} \approx 1.78607 \tag{16}$$

Variable Kreisbögen und Diagonale

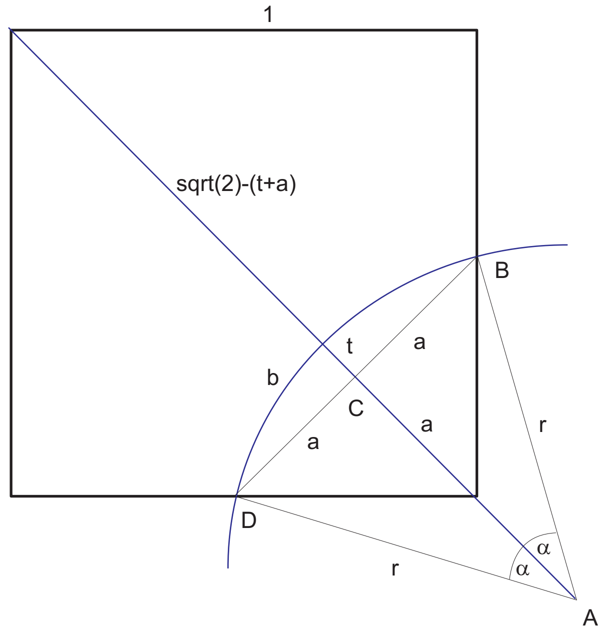

Abbildung 7: variable Kreisbögen und Diagonale

Anstelle eines festen Viertelkreisbogens benutzen wir jetzt einen beliebigen Kreisbogenradius. Der Mittelpunkt A vom Kreisbogen befindet sich auf der verlängerten Diagonale. Als variablen Parameter verwenden wir den Öffnungswinkel $\alpha = \sphericalangle BAC$. Der Radius r und die Länge des Kreisbogen b berechnen sich zu

$$r = \frac{a}{\sin\alpha}, \qquad b = 2 \cdot r \cdot \alpha = \frac{2 \cdot a \cdot \alpha}{\sin\alpha} \tag{17}$$

Die Fläche zwischen Kreisbogen b und Sehne $\overline{BD}$ beträgt:

$$A_b = r^2 \cdot \left(\alpha - \frac{\sin 2\,\alpha}{2}\right) \tag{18}$$

Die Summe aus der Dreiecksfläche und dem Kreisbogensegment muß $1/3$ betragen. Daraus können wir die Länge der halben Sehne $a = \overline{BC}$ bestimmen:

$$A_b + a^2 = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1 + \mathrm{Csc}(\alpha)^2\left(\alpha - \frac{1}{2}\mathrm{Sin}(2\,\alpha)\right)}} \tag{19}$$

Die Höhe t des Kreisbogensegments berechnet sich aus:

$$t = r \cdot (1 - \cos\alpha) \tag{20}$$

Die Länge der Stellwände ergibt sich dann zu

$$s = b + \sqrt{2} - (t + a) \tag{21}$$

$$s(\alpha) = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{6}\text{Cot}[\alpha] + \sqrt{6}(-1 + 2\alpha)\text{Csc}[\alpha] + 6\sqrt{1 - \text{Cot}[\alpha] + \alpha\text{Csc}[\alpha]^2}}{3\sqrt{2 - 2\text{Cot}[\alpha] + 2\alpha\text{Csc}[\alpha]^2}} \tag{22}$$

Das Minimum bestimmen wir numerisch und erhalten

$$s_{min} \approx 1.77425, \qquad \alpha \approx 59.8125°, \qquad r \approx 0.495722 \tag{23}$$

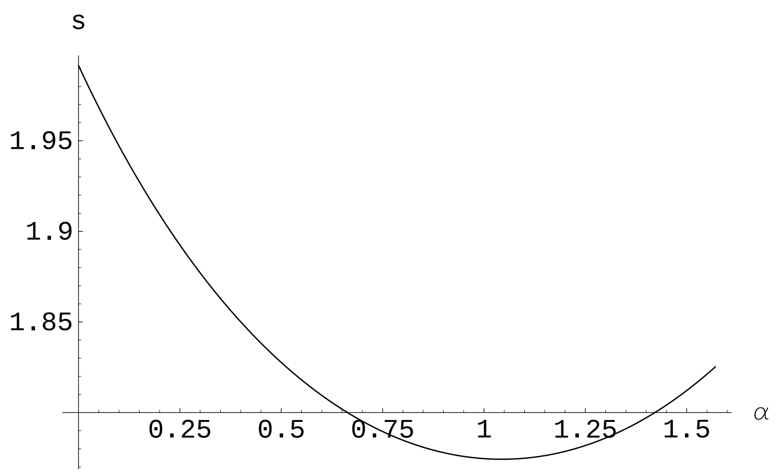

Abbildung 8: Funktionsverlauf $s(\alpha)$ im Intervall $\pi/6 \leq \alpha \leq \pi/2$

Kreisbogen und Mittellinie

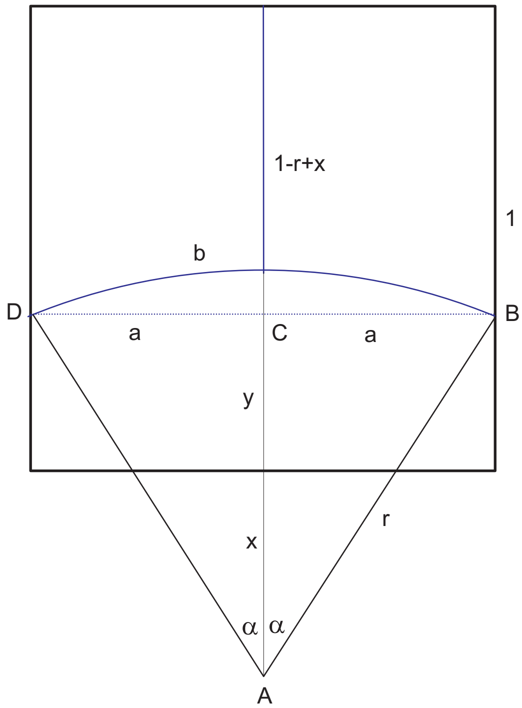

Abbildung 9: Kreibogen und Mittellinie als Begrenzung

Wir versuchen in Abbildung 9 einen optimalen Kreisbogen b über $\overline{BD}$ zu finden, der die Länge der Stellwände auf ein Minimum führt. Als Variable benutzen wir den Winkel $\alpha = \sphericalangle BAC$. Der Radius r und die Länge des Kreisbogen b berechnen sich zu (beachte: Länge der Quadratseite $= 2 \cdot a$):

$$r = \frac{a}{\sin\alpha}, \qquad b = 2 \cdot r \cdot \alpha = \frac{2 \cdot a \cdot \alpha}{\sin\alpha} \tag{24}$$

Der Abstand $\overline{AC} = x + y$ beträgt:

$$\overline{AC} = r \cdot \cos\alpha = a \cdot \cot\alpha = x + y \tag{25}$$

Die Fläche zwischen Kreisbogen b und Sehne $\overline{BD}$ beträgt:

$$A_b = r^2 \cdot \left(\alpha - \frac{\sin 2\,\alpha}{2}\right) \tag{26}$$

Wir müssen y so bestimmen, dass die Summe der Rechteckfläche plus dem Kreisbogensegment A_b gleich 1/3 der Quadratfläche ist:

$$A_b + 2 \cdot y \cdot a = \frac{4\,a^2}{3} \quad \rightarrow \quad y = \frac{2\,a}{3} - \frac{A_b}{2\,a} \tag{27}$$

Die Strecke x ist dann die Differenz:

$$x = r \cdot \cos\alpha - y = r \cdot \cos\alpha - \left(\frac{2\,a}{3} - \frac{A_b}{2\,a}\right) \tag{28}$$

Mit $a = 1/2$ erhalten wir die Länge der Stellwände zu:

$$s = b + 1 - (r - x) \tag{29}$$

$$s(\alpha) = \frac{1}{12}\left(8 + 3\,\mathrm{Cot}[\alpha] + 6\,(-1 + 2\,\alpha)\,\mathrm{Csc}[\alpha] + 3\,\alpha\,\mathrm{Csc}[\alpha]^2\right) \tag{30}$$

Das Minimum der Funktion $s(\alpha)$ ermitteln wir numerisch.

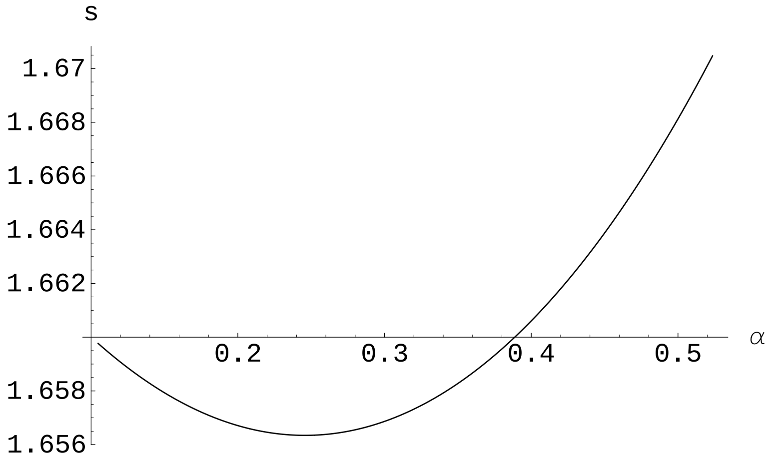

Abbildung 10: Das Minimum wird bei $\alpha = 14.077°$ erreicht und beträgt $s_{Min} = 1.65635$

$$s_{Min} = 1.65635, \qquad \alpha_{Min} = 14.077° \tag{31}$$

Damit ist die Lösung mit den schräg gestellten Wänden (Abbildung 5) vorläufig die beste Lösung.

Zwei Kreisbögen und Mittellinie

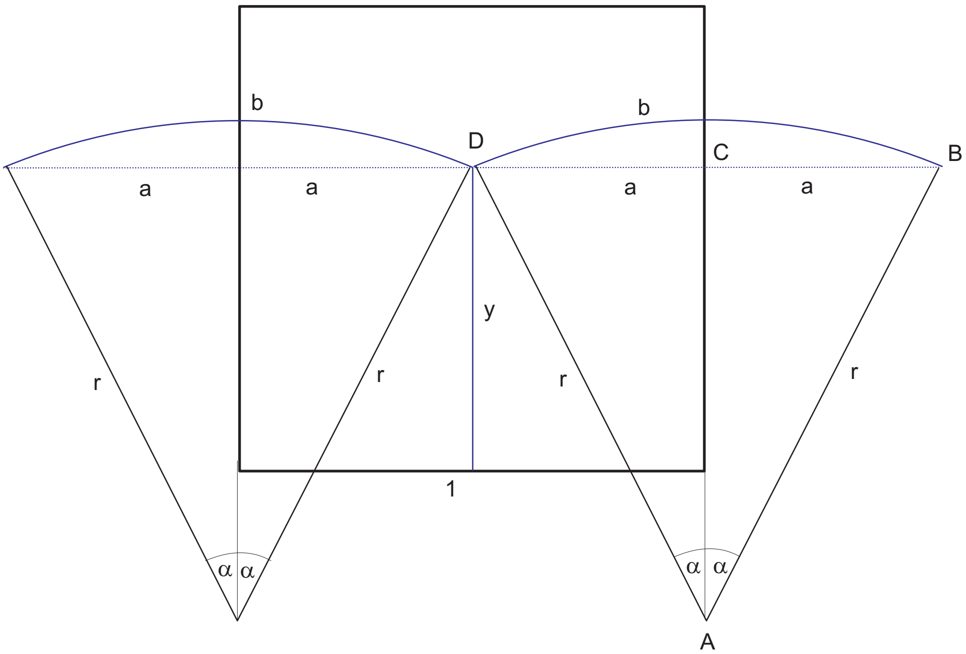

Abbildung 11: zwei Kreibögen und Mittellinie

Wir wollen jetzt die beiden Schrägwände aus Abbildung 5 durch Kreisbögen ersetzen, wobei sich der Kreismittelpunkt A auf der verlängerten Seitenwand des Quadrates befindet (Abbildung 11). Als Variable benutzen wir den Winkel $\alpha = \sphericalangle BAC$. Die Länge der Kellerwand betrage allgemein $2\,a$. Der Radius r und die Länge des Kreisbogen b berechnen sich dann zu:

$$r = \frac{a}{\sin\alpha}, \qquad b = 2 \cdot r \cdot \alpha = \frac{2 \cdot a \cdot \alpha}{\sin\alpha} \tag{32}$$

Wir betrachten jetzt die Summe der beiden unteren Kellerhälften. Die Fläche zwischen Kreisbogen b und Sehne $\overline{BD}$ beträgt:

$$A_b = r^2 \cdot \left(\alpha - \frac{\sin(2\,\alpha)}{2}\right) \tag{33}$$

Wir müssen y so bestimmen, dass die Summe der beiden Rechteckflächen $a \cdot y$ plus dem Kreisbogensegment A_b gleich $2/3$ der Quadratfläche ist:

$$A_b + 2 \cdot y \cdot a = \frac{8\,a^2}{3} \quad \rightarrow \quad y = \frac{4\,a}{3} - \frac{A_b}{2\,a} \tag{34}$$

Die Länge der Stellwände beträgt:

$$s = b + y = \frac{2\,a\,\alpha}{\sin\alpha} + \frac{4\,a}{3} - \frac{A_b}{2\,a} \tag{35}$$

Mit $a = 1/2$ erhalten wir:

$$s(\alpha) = \frac{2}{3} + \frac{\mathrm{Cot}(\alpha)}{4} + \alpha\,\mathrm{Csc}(\alpha) - \frac{1}{4}\,\alpha\,\mathrm{Csc}(\alpha)^2 \tag{36}$$

Über die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen wir das Minimum:

$$s'(\alpha) = \frac{1}{2}\,(-1 + \alpha\,\mathrm{Cot}(\alpha)) \cdot (-2 + \mathrm{Csc}(\alpha)) \cdot \mathrm{Csc}(\alpha) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{6} \tag{37}$$

Mit dem Minimum bei $\alpha = 30°$ erhalten wir als minimale Länge der Stellwände:

$$s(\alpha = 30°) = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6} \approx 1.62328, \tag{38}$$

Der zugehörige Bogenradius beträgt dann:

$$r = \frac{a}{\sin\alpha} = 1 \tag{39}$$

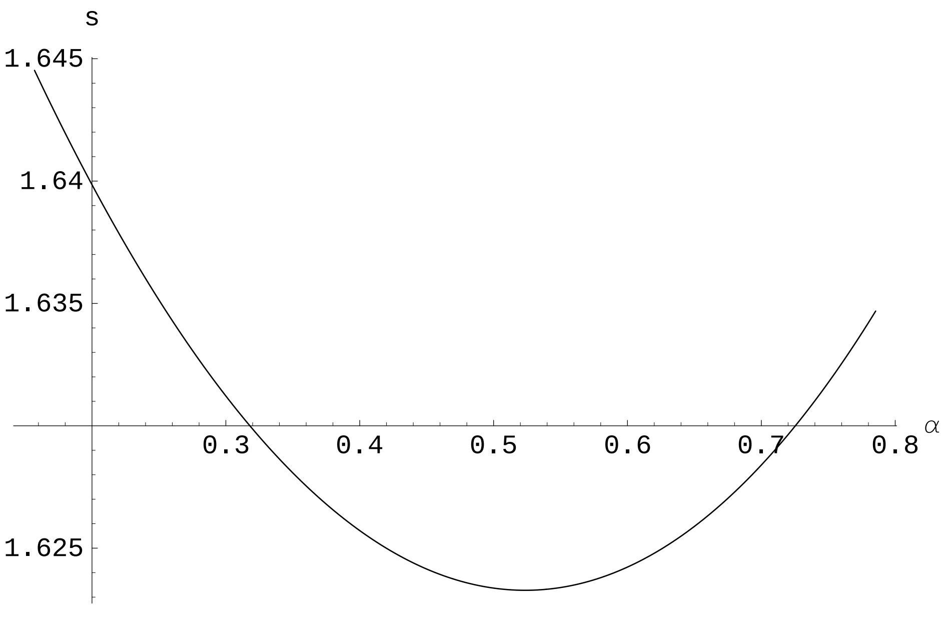

Abbildung 12: Das Minimum wird bei $\alpha = 30°$ erreicht und beträgt $s_{Min} = 1.62328$