Milchverteilung

Allunions-Mathematik-Olympiade

Moskau, 1977

Sieben Zwerge sitzen um einen runden Tisch, jeder hat einen Becher vor sich. In einigen dieser Becher befindet sich Milch, insgesamt 3 Liter.
Nun beginnt der erste Zwerg den Inhalt seines Becher gleichmäßig auf die der anderen Zwerge zu verteilen. Gegen den Uhrzeigersinn vorgehend wiederholt auch jeder der anderen Zwerge diese Prozedur. Nachdem auch der siebente Zwerg seine Milch so verteilt hat, befindet sich in jedem der Becher wieder genau so viel Milch, wie vor der Verteilungsprozedur.
Wieviel Milch war zu Beginn in jedem Becher?

Lösungsvorschlag 1

von Wolfgang Kirschenhofer, Österreich

Wenn man die Aufgabe so versteht, daß der erste Zwerg seinen Becher völlig leert und auf die restlichen Zwerge verteilt dann gilt:
Die Einheit sei e Liter. Der erste Zwerg hat $6 \cdot e$ Liter, der zweite $5 \cdot e$ Liter, der dritte $4 \cdot e$ Liter usw. Insgesamt sind das dann bei $n = 7$ Zwergen:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n \cdot (n-1)}{2} = 21\, e\, L \tag{1}$$

Es gilt daher:

$$21\, L\, e = 3\, L \quad \rightarrow \quad e = \frac{1}{7} \tag{2}$$

Die ursprüngliche Verteilung der Bechermengen ist dann:

```
6/7, 5/7, 4/7, 3/7, 2/7, 1/7, 0
```

Begründung:
Die Folge der Verteilungen ist jetzt:

```
(6,5,4,3,2,1,0)
(0,6,5,4,3,2,1)
(1,0,6,5,4,3,2)
(2,1,0,6,5,4,3)
(3,2,1,0,6,5,4)
(4,3,2,1,0,6,5)
(5,4,3,2,1,0,6)
```

Die nächste Verteilung ist dann wieder die ursprüngliche, nämlich

```
(6,5,4,3,2,1,0)
```

Verallgemeinert gilt für n Zwerge und einer Gesamtmenge von k Litern Milch:

$$e = \frac{2 \cdot k}{n \cdot (n-1)} \tag{3}$$

und als Anfangsverteilung:

$$z_1 = (n-1) \cdot e, \quad z_2 = (n-2) \cdot e, \quad z_3 = (n-3) \cdot e \quad \ldots \quad z_n = 0 \tag{4}$$

Der Aufgabentext gestattet eine weitere Interpretation. Der Zwerg verteilt seinen Becher gleichmäßig auf die seiner Kameraden und behält 1/7 in seinem Becher zurück.
Dann hat der erste Zwerg $7 \cdot e$ Liter, der zweite $6 \cdot e$ Liter, der dritte $5 \cdot e$ Liter usw. Zusammen sind das:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 28\, e\, L \tag{5}$$

Es muß daher gelten:

$$28 \cdot e = 3 \quad \rightarrow \quad e = \frac{3}{28} \tag{6}$$

Die ursprngliche Verteilung der Bechermengen ist daher in Litern gemessen:

```
(21/28, 18/28, 15/28, 12/28, 9/28, 6/28, 3/28)
```

Begründung:
Die Folge der Verteilungen ist:

```
(7,6,5,4,3,2,1)
(1,7,6,5,4,3,2)
(2,1,7,6,5,4,3)
(3,2,1,7,6,5,4)
(4,3,2,1,7,6,5)
(5,4,3,2,1,7,6)
(6,5,4,3,2,1,7)
```

Die nächste Verteilung ist dann wieder die ursprüngliche, nämlich:

```
(7,6,5,4,3,2,1).
```

Lösungsvorschlag 2

von Philippe Chevanne, Paris

Der Schlüssel zur Lösung der Aufgabe ist: man führt noch eine zusätzliche Verteilungsrunde ein und fragt dann nach der Originalverteilung. Dann sind alle Zwischenverteilungen periodisch mit der Periodenlänge 7 und diese Zwischenverteilungen sind gleichzeitig auch Lösungen des Problems!
Da 7 eine Primzahl ist, kann die Periodenlänge nicht kleiner als 7 sein, da 7 keinen kleineren Teiler besitzt. Es genügt nun die Verteilung nach der ersten Runde zu betrachten und daraus die Originalverteilung zu bestimmen.

Variante 1

Der Zwerg verteilt seine Milch vollständig auf die der anderen Zwerge, d.h er behält nichts zurück. Die erste Verteilungsrunde ergibt:

$$a(i) := a(i) + \frac{a(0)}{6}, \quad a(0) = 0, \tag{7}$$

Da diese neue Verteilung auch eine Lösung sein muss, ist

$$\begin{aligned}
a(1) + \frac{a(0)}{6} &= a(0) &\rightarrow \quad a(1) &= \frac{5\,a(0)}{6}\\
a(2) + \frac{a(0)}{6} &= a(1) &\rightarrow \quad a(2) &= \frac{4\,a(0)}{6}\\
\ldots\\
a(6) + \frac{a(0)}{6} &= a(5) &\rightarrow \quad a(6) &= 0
\end{aligned}$$

Die Gesammtmenge der Milch beträgt dann:

$$\frac{a(0) \cdot (6+5+4+3+2+1+0)}{6} = 3\,L \quad \rightarrow \quad a(0) = \frac{6}{7}\,L \tag{8}$$

und die Originalverteilung:

$$a(0) = \frac{6}{7}, \quad a(1) = \frac{5}{7}, \quad a(2) = \frac{4}{7}, \quad a(3) = \frac{3}{7}, \quad a(4) = \frac{2}{7}, \quad a(5) = \frac{1}{7}, \quad a(6) = 0 \tag{9}$$

Variante 2

Der Zwerg teilt seinen Becherinhalt in 7 Teile und behält 1/7 Milch zurück. Die erste Verteilungsrunde ergibt:

$$a(i) := a(i) + \frac{a(0)}{7}, \quad a(0) = \frac{a(0)}{7} \tag{10}$$

dann ist:

$$\begin{aligned}
&\frac{a(0)}{7} = a(6)\\
&a(1) + \frac{a(0)}{7} = a(0), \quad a(1) = \frac{6\,a(0)}{7}\\
&\dots\\
&a(6) + \frac{a(0)}{7} = a(5), \quad a(6) = \frac{a(0)}{7}
\end{aligned}$$

Die Gesammtmenge der Milch beträgt:

$$\frac{a(0)\cdot(7+6+5+4+3+2+1)}{7} = 3\,L \quad \rightarrow \quad a(0) = \frac{3}{4}\,L \tag{11}$$

und die Originalverteilung ist:

$$a(0) = \frac{21}{28}, a(1) = \frac{18}{28}, a(2) = \frac{15}{28}, a(3) = \frac{12}{28}, a(4) = \frac{9}{28}, a(5) = \frac{6}{28}, a(6) = \frac{3}{28} \tag{12}$$

Lösungsweg über ein lineares Gleichungssystem und CAS

Sei die Anzahl der Zwerge $n = 7$, sei der Becherinhalt der Zwerge mit $z[1] \dots z[n]$ bezeichnet und die Anfangsmenge in den Bechern mit $z0[1] \dots z0[n]$ benannt. Der Inhalt der Becher berechnet sich schrittweise über eine doppelte Summationsschleife. Jeder Zwerg $z[i]$ erhält zu seinem Becherinhalt den $n-1$ ten Teil des Zwerges $z[j]$, der gerade seinen Becher auf die der anderen verteilt. Nach jeder Verteilungsrunde ist der Becher des Zwerges $z[j]$ leer. Der Algorithmus sieht dann wie folgt aus:

```
- Belegung der Becher mit der Anfangsmenge
  For i=1 to n Do
    z[i] := z0[i];
  End;
- schrittweise Aufsummierung der Becherinhalte,
- jede i-Schleife entspricht einer Verteilungsrunde
- am Ende einer Verteilungsrunde ist der Becher z[j] leer
  For j=1 to n Do
    For i=1 to n Do
        If i # j Then
           x[i]:=x[i] + x[j]/(n-1);
        End;
    End;
    x[j]=0;
  End;
```

Am Ende der Verteilung ist der Becher vom Zwerg $z[7]$ leer. Da die Menge nach der Verteilung gleich dem Inhalt zum Beginn der Verteilung sein soll, wissen wir bereits, dass $z0[7] = 0$ sein muß. Die weiteren Becherinhalte am Beginn berechnen sich aus dem linearen Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
&z[1] = z0[1]\\
&z[2] = z0[2]\\
&z[3] = z0[3]\\
&z[4] = z0[4]\\
&z[5] = z0[5]\\
&z0[1] + z0[2] + z0[3] + z0[4] + z0[5] + z0[6] = 3
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe eines Computeralgebrasystems (CAS) wie Mathematica berechnen wir das lineare Gleichungssystem für $n = 7$ Zwerge:

Anzahl der Zwerge: $\boldsymbol{n = 7;}$

Definition der Startwerte: $\mathbf{Array}[\mathbf{z0}, \boldsymbol{n}]$
$\{\mathrm{z0}[1], \mathrm{z0}[2], \mathrm{z0}[3], \mathrm{z0}[4], \mathrm{z0}[5], \mathrm{z0}[6], \mathrm{z0}[7]\}$

Vektor der Becherinhalte: $\mathbf{Array}[\boldsymbol{z}, \boldsymbol{n}]$
$\{z[1], z[2], z[3], z[4], z[5], z[6], z[7]\}$

Initalisierung der Becherinhalte mit den Anfangswerten:
$\mathbf{For}[\boldsymbol{i = 1, i < n + 1, z[i] =} \mathbf{z0}[\boldsymbol{i}]; \boldsymbol{i}\mathbf{++}];$

Jeder Becher erhält als Summe den jeweils (n-1) ten Teil des j-ten Zwergs,
der j-te Zwerg hat nach der Verteilungsrunde wieder einen leeren Becher
$\mathbf{For}[\boldsymbol{j = 1, j < n + 1,}$
$\mathbf{For}[\boldsymbol{i = 1, i < n + 1,} \mathbf{If}[\boldsymbol{i == j}, \mathbf{0}, \boldsymbol{z[i]} = \mathbf{Simplify}[\boldsymbol{z[i] + z[j]/(n - 1)}]\ ];$
$\boldsymbol{i}\mathbf{++}];$
$\boldsymbol{j}\mathbf{++}; \boldsymbol{z[j - 1]} = \mathbf{0}];$

Die Endzustände sollen dem Anfangszustand entsprechen:
$\mathbf{gl1} = \boldsymbol{z}[\mathbf{1}] == \mathbf{z0}[\mathbf{1}]$

$$\frac{70993\mathrm{z0}[1]+6(16807\mathrm{z0}[2]+6(2401\mathrm{z0}[3]+2058\mathrm{z0}[4]+1764\mathrm{z0}[5]+1512\mathrm{z0}[6]+1296\mathrm{z0}[7]))}{279936} == \mathrm{z0}[1]$$

$\mathbf{gl2} = \boldsymbol{z}[\mathbf{2}] == \mathbf{z0}[\mathbf{2}]$

$$\frac{63217\mathrm{z0}[1]+6(9031\mathrm{z0}[2]+6(2401\mathrm{z0}[3]+2058\mathrm{z0}[4]+1764\mathrm{z0}[5]+1512\mathrm{z0}[6]+1296\mathrm{z0}[7]))}{279936} == \mathrm{z0}[2]$$

$\mathbf{gl3} = \boldsymbol{z}[\mathbf{3}] == \mathbf{z0}[\mathbf{3}]$

$$\frac{54145\mathrm{z0}[1]+6(7735\mathrm{z0}[2]+6630\mathrm{z0}[3]+12348\mathrm{z0}[4]+10584\mathrm{z0}[5]+9072\mathrm{z0}[6]+7776\mathrm{z0}[7])}{279936} == \mathrm{z0}[3]$$

$\mathbf{gl4} = \boldsymbol{z}[\mathbf{4}] == \mathbf{z0}[\mathbf{4}]$

$$\frac{43561\mathrm{z0}[1]+6(6223\mathrm{z0}[2]+6(889\mathrm{z0}[3]+762\mathrm{z0}[4]+1764\mathrm{z0}[5]+1512\mathrm{z0}[6]+1296\mathrm{z0}[7]))}{279936} == \mathrm{z0}[4]$$

$\mathbf{gl5} = \boldsymbol{z}[\mathbf{5}] == \mathbf{z0}[\mathbf{5}]$

$$\frac{31213\mathrm{z0}[1]+6(4459\mathrm{z0}[2]+6(637\mathrm{z0}[3]+6(91\mathrm{z0}[4]+78\mathrm{z0}[5]+252\mathrm{z0}[6]+216\mathrm{z0}[7])))}{279936} == \mathrm{z0}[5]$$

Der letzte Zwerg hat am Ende immer einen leeren Becher:
gl6 = z0[n]==0;

Die Summe aller Becherinhalte zu Beginn beträgt 3 Liter:
gl7 = z0[1] + z0[2] + z0[3] + z0[4] + z0[5] + z0[6] == 3;

Solve[{gl1, gl2, gl3, gl4, gl5, gl6, gl7}, {z0[1], z0[2], z0[3], z0[4], z0[5], z0[6], z0[7]}]

$\left\{\left\{\mathrm{z0}[1] \to \frac{6}{7}, \mathrm{z0}[2] \to \frac{5}{7}, \mathrm{z0}[3] \to \frac{4}{7}, \mathrm{z0}[4] \to \frac{3}{7}, \mathrm{z0}[5] \to \frac{2}{7}, \mathrm{z0}[6] \to \frac{1}{7}, \mathrm{z0}[7] \to 0\right\}\right\}$

Für die zweite Variante, das der Zwerg immer 1/7 seines Becherinhaltes zurück behält ergibt sich die folgende Lösung.

n = 7; Array[x, n]; Array[x0, n];

For[$i = 1, i < n + 1, x[i]$ = x0[i]; i++];

For[$j = 1, j < n + 1$,
For[$i = 1, i < n + 1$, If[$i == j, 0, x[i]$ = Simplify[$x[i] + x[j]/n$]];
i++];
j++; $x[j-1] = x[j-1]/n$];

gl1 = x[1] == x0[1]

$\frac{262144\mathrm{x0}[1]+7(32768\mathrm{x0}[2]+7(4096\mathrm{x0}[3]+7(512\mathrm{x0}[4]+448\mathrm{x0}[5]+392\mathrm{x0}[6]+343\mathrm{x0}[7])))}{823543} == \mathrm{x0}[1]$

gl2 = x[2] == x0[2]

$\frac{144495\mathrm{x0}[1]+7(32768\mathrm{x0}[2]+7(4096\mathrm{x0}[3]+7(512\mathrm{x0}[4]+448\mathrm{x0}[5]+392\mathrm{x0}[6]+343\mathrm{x0}[7])))}{823543} == \mathrm{x0}[2]$

gl3 = x[3] == x0[3]

$\frac{127688\mathrm{x0}[1]+7(15961\mathrm{x0}[2]+7(4096\mathrm{x0}[3]+7(512\mathrm{x0}[4]+448\mathrm{x0}[5]+392\mathrm{x0}[6]+343\mathrm{x0}[7])))}{823543} == \mathrm{x0}[3]$

gl4 = x[4] == x0[4]

$\frac{108480\mathrm{x0}[1]+7(13560\mathrm{x0}[2]+7(1695\mathrm{x0}[3]+7(512\mathrm{x0}[4]+448\mathrm{x0}[5]+392\mathrm{x0}[6]+343\mathrm{x0}[7])))}{823543} == \mathrm{x0}[4]$

gl5 = x[5] == x0[5]

$\frac{86528\mathrm{x0}[1]+7(10816\mathrm{x0}[2]+7(1352\mathrm{x0}[3]+7(169\mathrm{x0}[4]+448\mathrm{x0}[5]+392\mathrm{x0}[6]+343\mathrm{x0}[7])))}{823543} == \mathrm{x0}[5]$

gl6 = x[6] == x0[6]

$\frac{61440\mathrm{x0}[1]+7(7680\mathrm{x0}[2]+7(960\mathrm{x0}[3]+840\mathrm{x0}[4]+735\mathrm{x0}[5]+2744\mathrm{x0}[6]+2401\mathrm{x0}[7]))}{823543} == \mathrm{x0}[6]$

gl7 = x0[1] + x0[2] + x0[3] + x0[4] + x0[5] + x0[6] + x0[7] == 3

x0[1] + x0[2] + x0[3] + x0[4] + x0[5] + x0[6] + x0[7] == 3

Solve[{gl1, gl2, gl3, gl4, gl5, gl6, gl7}, {x0[1], x0[2], x0[3], x0[4], x0[5], x0[6], x0[7]}]

$\left\{\left\{\mathrm{x0}[1] \to \frac{3}{4}, \mathrm{x0}[2] \to \frac{9}{14}, \mathrm{x0}[3] \to \frac{15}{28}, \mathrm{x0}[4] \to \frac{3}{7}, \mathrm{x0}[5] \to \frac{9}{28}, \mathrm{x0}[6] \to \frac{3}{14}, \mathrm{x0}[7] \to \frac{3}{28}\right\}\right\}$

Milchverteilung II

Sieben Zwerge sitzen mit ihrem Milchbecher an einem runden Tisch. In den Bechnern befinden sich insgesamt drei Liter Milch. Zwerg1 verteilt den Inhalt seines Becher gleichmäßig und vollständig auf die Becher seiner Kameraden. Anschließend verteilt der nächste Zwerg, entgegen dem Uhrzeigersinn, seinen Becher gleichmäßig und vollständig auf die der anderen Zwerge. Schließlich verteilt auch der letzte Zwerg in der Runde seinen Becherinhalt. Nun hat am Ende Zwerg2 die gleiche Menge Milch in seinem Becher die Zwerg1 vor der Verteilung hatte. Zwerg3 hat den gleichen Inhalt wie Zwerg2 zu Beginn hatte usw. In Gleichungen formuliert lautet die Endverteilung :

$$x[2] = x0[1]$$
$$x[3] = x0[2]$$
$$x[4] = x0[3]$$
$$x[5] = x0[4]$$
$$x[6] = x0[5]$$
$$x[7] = x0[6]$$

Bestimme aus diesen Angaben den Inhalt der Becher vor der Verteilung!

$\boldsymbol{n = 7; \mathrm{Array}[x, n]; \mathrm{Array}[\mathrm{x0}, n];}$
$\boldsymbol{\mathrm{For}[i = 1, i < n+1, x[i] = \mathrm{x0}[i]; i{+}{+}];}$
$\boldsymbol{\mathrm{For}[j = 1, j < n+1,}$
$\boldsymbol{\mathrm{For}[i = 1, i < n+1, \mathrm{If}[i == j, 0, x[i] = \mathrm{Simplify}[x[i] + x[j]/(n-1)]];}$
$\boldsymbol{i{+}{+}];}$
$\boldsymbol{j{+}{+}; x[j-1] = 0];}$
$\boldsymbol{\mathrm{gl1} = x[1] == \mathrm{x0}[2]}$

$$\frac{70993\mathrm{x0}[1]+6(16807\mathrm{x0}[2]+6(2401\mathrm{x0}[3]+2058\mathrm{x0}[4]+1764\mathrm{x0}[5]+1512\mathrm{x0}[6]+1296\mathrm{x0}[7]))}{279936} == \mathrm{x0}[2]$$

$\boldsymbol{\mathrm{gl2} = x[2] == \mathrm{x0}[3]}$

$$\frac{63217\mathrm{x0}[1]+6(9031\mathrm{x0}[2]+6(2401\mathrm{x0}[3]+2058\mathrm{x0}[4]+1764\mathrm{x0}[5]+1512\mathrm{x0}[6]+1296\mathrm{x0}[7]))}{279936} == \mathrm{x0}[3]$$

$\boldsymbol{\mathrm{gl3} = x[3] == \mathrm{x0}[4]}$

$$\frac{54145\mathrm{x0}[1]+6(7735\mathrm{x0}[2]+6630\mathrm{x0}[3]+12348\mathrm{x0}[4]+10584\mathrm{x0}[5]+9072\mathrm{x0}[6]+7776\mathrm{x0}[7])}{279936} == \mathrm{x0}[4]$$

$\boldsymbol{\mathrm{gl4} = x[4] == \mathrm{x0}[5]}$

$$\frac{43561\mathrm{x0}[1]+6(6223\mathrm{x0}[2]+6(889\mathrm{x0}[3]+762\mathrm{x0}[4]+1764\mathrm{x0}[5]+1512\mathrm{x0}[6]+1296\mathrm{x0}[7]))}{279936} == \mathrm{x0}[5]$$

$\boldsymbol{\mathrm{gl5} = x[5] == \mathrm{x0}[6]}$

$$\frac{31213\mathrm{x0}[1]+6(4459\mathrm{x0}[2]+6(637\mathrm{x0}[3]+6(91\mathrm{x0}[4]+78\mathrm{x0}[5]+252\mathrm{x0}[6]+216\mathrm{x0}[7])))}{279936} == \mathrm{x0}[6]$$

$\boldsymbol{\mathrm{gl6} = x[6] == \mathrm{x0}[7]}$

$$\frac{16807\mathrm{x0}[1]+6(2401\mathrm{x0}[2]+6(343\mathrm{x0}[3]+6(49\mathrm{x0}[4]+42\mathrm{x0}[5]+36\mathrm{x0}[6]+216\mathrm{x0}[7])))}{279936} == \mathrm{x0}[7]$$

$\boldsymbol{\mathrm{gl7} = \mathrm{x0}[1] + \mathrm{x0}[2] + \mathrm{x0}[3] + \mathrm{x0}[4] + \mathrm{x0}[5] + \mathrm{x0}[6] + \mathrm{x0}[7] == 3}$

$$\mathrm{x0}[1] + \mathrm{x0}[2] + \mathrm{x0}[3] + \mathrm{x0}[4] + \mathrm{x0}[5] + \mathrm{x0}[6] + \mathrm{x0}[7] == 3$$

$\boldsymbol{\mathrm{Solve}[\{\mathrm{gl1}, \mathrm{gl2}, \mathrm{gl3}, \mathrm{gl4}, \mathrm{gl5}, \mathrm{gl6}, \mathrm{gl7}\}, \{\mathrm{x0}[1], \mathrm{x0}[2], \mathrm{x0}[3], \mathrm{x0}[4], \mathrm{x0}[5], \mathrm{x0}[6], \mathrm{x0}[7]\}]}$

$$\left\{\left\{\mathrm{x0}[1] \to 0, \mathrm{x0}[2] \to \tfrac{6}{7}, \mathrm{x0}[3] \to \tfrac{5}{7}, \mathrm{x0}[4] \to \tfrac{4}{7}, \mathrm{x0}[5] \to \tfrac{3}{7}, \mathrm{x0}[6] \to \tfrac{2}{7}, \mathrm{x0}[7] \to \tfrac{1}{7}\right\}\right\}$$

Milchverteilung III

Sieben Zwerge sitzen mit ihrem Milchbecher an einem runden Tisch. In den Bechnern befinden sich insgesamt drei Liter Milch. Zwerg1 verteilt den Inhalt seines Becher gleichmäßig auf die Becher seiner Kameraden und behält 1/7 seines Inhalts zurück. Anschließend verteilt der nächste Zwerg, entgegen dem Uhrzeigersinn, seinen Becher gleichmäßig auf die der anderen Zwerge und behält 1/7 seines Inhaltes zurück. Schließlich verteilt auch der letzte Zwerg in der Runde seinen Becherinhalt und behält 1/7 zurück. Nun hat am Ende Zwerg2 die gleiche Menge Milch in seinem Becher die Zwerg1 vor der Verteilung hatte. Zwerg3 hat den gleichen Inhalt wie Zwerg2 zu Beginn hatte usw. In Gleichungen formuliert lautet die Endverteilung :

$$\begin{aligned} x[2] &= x0[1] \\ x[3] &= x0[2] \\ x[4] &= x0[3] \\ x[5] &= x0[4] \\ x[6] &= x0[5] \\ x[7] &= x0[6] \end{aligned}$$

Bestimme aus diesen Angaben den Inhalt der Becher vor der Verteilung!

$\mathbf{n = 7; Array[x, n]; Array[x0, n];}$
$\mathbf{For[i = 1, i < n + 1, x[i] = x0[i]; i{+}{+}];}$
$\mathbf{For[j = 1, j < n + 1,}$
$\mathbf{For[i = 1, i < n + 1, If[i == j, 0, x[i] = Simplify[x[i] + x[j]/n]];}$
$\mathbf{i{+}{+}];}$
$\mathbf{j{+}{+}; x[j - 1] = x[j - 1]/n];}$
$\mathbf{gl1 = x[1] == x0[2]}$

$$\frac{262144\mathrm{x0}[1]+7(32768\mathrm{x0}[2]+7(4096\mathrm{x0}[3]+7(512\mathrm{x0}[4]+448\mathrm{x0}[5]+392\mathrm{x0}[6]+343\mathrm{x0}[7])))}{823543} == \mathrm{x0}[2]$$

$\mathbf{gl2 = x[2] == x0[3]}$

$$\frac{144495\mathrm{x0}[1]+7(32768\mathrm{x0}[2]+7(4096\mathrm{x0}[3]+7(512\mathrm{x0}[4]+448\mathrm{x0}[5]+392\mathrm{x0}[6]+343\mathrm{x0}[7])))}{823543} == \mathrm{x0}[3]$$

$\mathbf{gl3 = x[3] == x0[4]}$

$$\frac{127688\mathrm{x0}[1]+7(15961\mathrm{x0}[2]+7(4096\mathrm{x0}[3]+7(512\mathrm{x0}[4]+448\mathrm{x0}[5]+392\mathrm{x0}[6]+343\mathrm{x0}[7])))}{823543} == \mathrm{x0}[4]$$

$\mathbf{gl4 = x[4] == x0[5]}$

$$\frac{108480\mathrm{x0}[1]+7(13560\mathrm{x0}[2]+7(1695\mathrm{x0}[3]+7(512\mathrm{x0}[4]+448\mathrm{x0}[5]+392\mathrm{x0}[6]+343\mathrm{x0}[7])))}{823543} == \mathrm{x0}[5]$$

$\mathbf{gl5 = x[5] == x0[6]}$

$$\frac{86528\mathrm{x0}[1]+7(10816\mathrm{x0}[2]+7(1352\mathrm{x0}[3]+7(169\mathrm{x0}[4]+448\mathrm{x0}[5]+392\mathrm{x0}[6]+343\mathrm{x0}[7])))}{823543} == \mathrm{x0}[6]$$

$\mathbf{gl6 = x[6] == x0[7]}$

$$\frac{61440\mathrm{x0}[1]+7(7680\mathrm{x0}[2]+7(960\mathrm{x0}[3]+840\mathrm{x0}[4]+735\mathrm{x0}[5]+2744\mathrm{x0}[6]+2401\mathrm{x0}[7]))}{823543} == \mathrm{x0}[7]$$

$\mathbf{gl7 = x0[1] + x0[2] + x0[3] + x0[4] + x0[5] + x0[6] + x0[7] == 3}$

$\mathrm{x0}[1] + \mathrm{x0}[2] + \mathrm{x0}[3] + \mathrm{x0}[4] + \mathrm{x0}[5] + \mathrm{x0}[6] + \mathrm{x0}[7] == 3$

$\mathbf{Solve[\{gl1, gl2, gl3, gl4, gl5, gl6, gl7\}, \{x0[1], x0[2], x0[3], x0[4], x0[5], x0[6], x0[7]\}]}$

$$\left\{\left\{\mathrm{x0}[1] \to \frac{2451}{21923}, \mathrm{x0}[2] \to \frac{411771}{613844}, \mathrm{x0}[3] \to \frac{401967}{613844}, \mathrm{x0}[4] \to \frac{170871}{306922}, \right\}\right\}$$

$$\mathrm{x0}[5] \to \frac{137157}{306922}, \mathrm{x0}[6] \to \frac{205857}{613844}, \mathrm{x0}[7] \to \frac{137253}{613844}$$