Zwei Kreise im gleichseitigen Dreieck

ein Aufgabe aus der *Japanischen Tempelgeometrie*

23. August 2006

Gegeben sei das gleichseitige Dreieck ABC mit der Seitenlänge a. Auf der Höhenlinie $h_c = CD$ befinden sich die Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2. Der Kreis k_1 tangiert die Seite AB im Punkt D. Der Kreis k_2 tangiert die Seiten AC und BC des Dreiecks. Die gemeinsamen Tangenten t_1, t_2 der Kreise laufen durch die Punkte A bzw. B.

1. Bestimme den Radius von k_1 und k_2 für den Fall, dass beide Kreise gleich groß sind.

2. Berechne den Radius R von k_2 wenn der Radius r für k_1 gegeben ist.

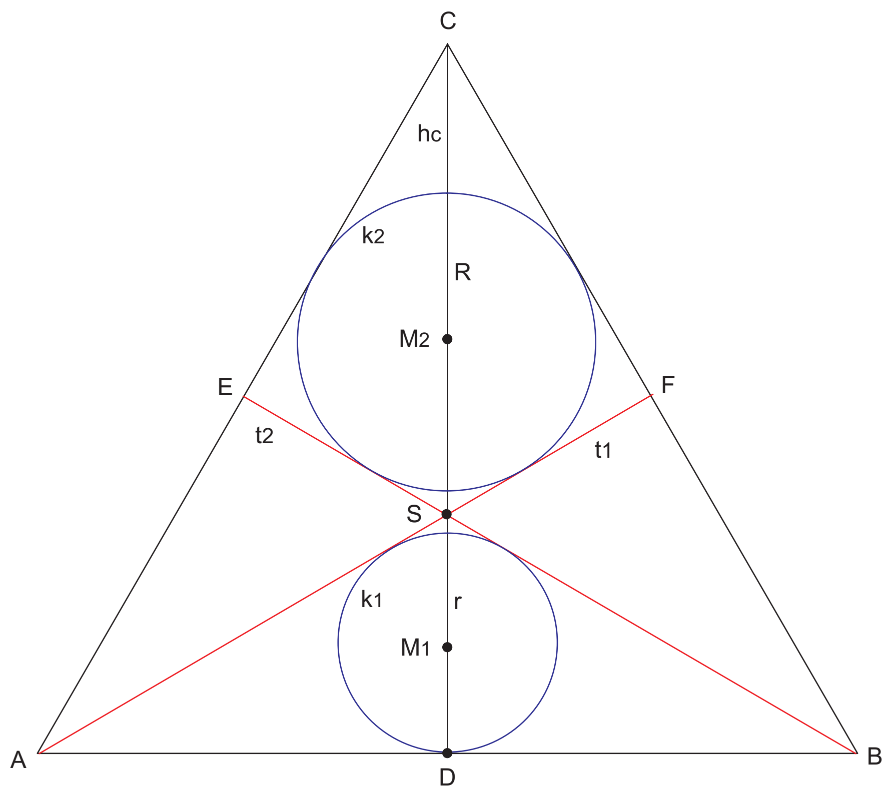

Abbildung 1: Bild zur Aufgabenstellung

Lösungsvorschlag I

nach einer Idee von Peter Stratmann, Bonn

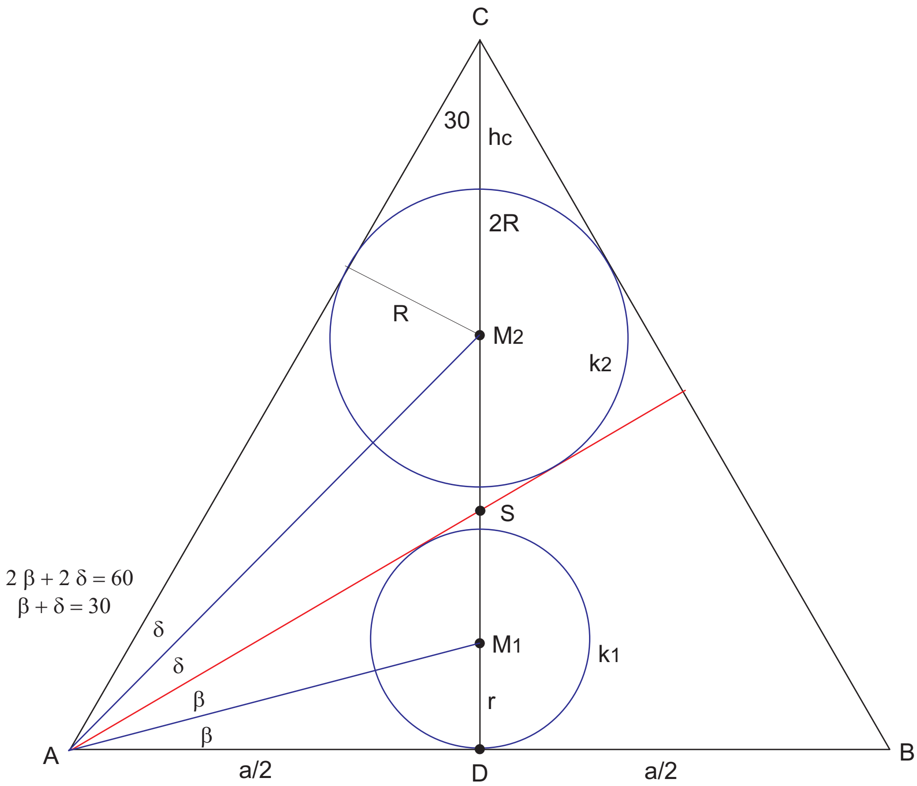

Abbildung 2: Skizze zum Lösungsweg I

Der Mittelpunkt M_1 von k_1 befindet sich auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle SAD = 2\,\beta$. Ebenso liegt der Mittelpunkt M_2 von k_2 auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle CAS = 2\,\delta$ (siehe Abbildung 2). Die Summe der Winkel $2\,\beta + 2\,\delta$ ist konstant und beträgt 60° (Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck):

$$2\,\beta + 2\,\delta = 60^\circ \quad \rightarrow \quad \beta + \delta = \sphericalangle M_1AM_2 = 30^\circ = const. \tag{1}$$

Im rechtwinkligen Dreieck ADM_1 ergibt sich:

$$\tan\beta = \frac{r}{a/2} = \frac{2\,r}{a} \tag{2}$$

Der Abschnitt $\overline{CM_2}$ auf der Höhenlinie h_c des Dreiecks folgt aus:

$$\sin 30^\circ = \frac{R}{\overline{CM_2}} \quad \rightarrow \quad \overline{CM_2} = 2\,R \tag{3}$$

Die Strecke $\overline{DM_2}$ auf der Höhenlinie $h_c = \overline{CD}$ berechnet sich aus der Differenz:

$$\overline{DM_2} = h_c - \overline{CM_2} = \frac{a\,\sqrt{3}}{2} - 2\,R \tag{4}$$

Im rechtwinkligen Dreieck ADM_2 ergibt sich:

$$\tan(2\,\beta+\delta)=\frac{\overline{DM_2}}{a/2}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}-2\,R}{a/2}=\sqrt{3}-\frac{4\,R}{a} \tag{5}$$

Die Anwendung eines Additionstherems liefert:

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\cdot\tan y} \tag{6}$$

$$\tan(\beta+30^\circ)=\frac{\tan\beta+\tan 30^\circ}{1-\tan\beta\cdot\tan 30^\circ}=\sqrt{3}-\frac{4\,R}{a} \tag{7}$$

Mit dem Resultat aus (1) und $\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$ erhalten wir:

$$\frac{\frac{2\,r}{a}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{2\,r}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}-\frac{4\,R}{a} \tag{8}$$

Nach Beseitigung der Doppelbrüche erhalten wir:

$$\frac{a\sqrt{3}+6\,r}{3\,a-2\sqrt{3}\,r}=\sqrt{3}-\frac{4\,R}{a} \tag{9}$$

Für Aufgabenstellung 1 setzen wir $R=r$ und lösen nach r auf:

$$\frac{a\sqrt{3}+6\,r}{3\,a-2\sqrt{3}\,r}=\sqrt{3}-\frac{4\,r}{a} \tag{10}$$

$$a\sqrt{3}+6\,r=\left(3\,a-2\sqrt{3}\,r\right)\left(\sqrt{3}-\frac{4\,r}{a}\right) \tag{11}$$

$$a\sqrt{3}+6\,r=3\sqrt{3}\,a-6\,r-12\,r+\frac{8\sqrt{3}\,r^2}{a} \tag{12}$$

schließlich erhalten wir eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von r:

$$8\sqrt{3}\,r^2-24\,r\,a+2\sqrt{3}\,a^2=0 \quad\rightarrow\quad r_{1/2}=\frac{a\,(3\pm\sqrt{6})}{2\sqrt{3}} \tag{13}$$

Da beide Kreise innerhalb vom Dreieck ABC liegen sollen, folgt als Lösung:

$$r_2=\frac{a\,(3-\sqrt{6})}{2\sqrt{3}}=\frac{a}{2}\,(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \tag{14}$$

Bei Aufgabenstellung 2 ist R gesucht:

$$\frac{a\sqrt{3}+6\,r}{3\,a-2\sqrt{3}\,r}=\sqrt{3}-\frac{4\,R}{a} \quad\rightarrow\quad R=\frac{a\,(\sqrt{3}\,a-6\,r)}{6\,a-4\sqrt{3}\,r} \tag{15}$$

Lösungsvorschlag II

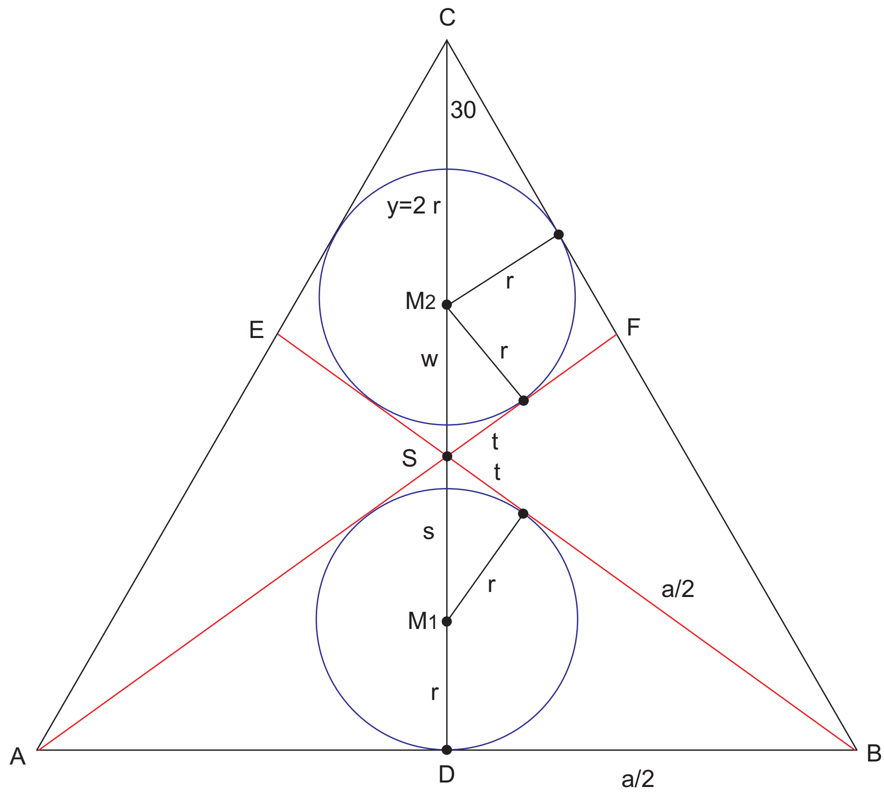

Abbildung 3: Skizze zum Lösungsweg II für $r = R$

Wir gehen in Abbildung 3 davon aus, dass beide Kreise gleich große Radien besitzen. Die Tangentenabschnitte t vom Punkt S an die Kreise k_1 und k_2 sind dann gleich groß. Der Abschnitt $y = \overline{CM_2}$ auf der Höhenlinie des Dreiecks folgt aus:

$$\sin 30^\circ = \frac{r}{y} \quad \rightarrow \quad y = 2\,r \tag{1}$$

Die Strecken $s = \overline{M_1S}$ und $w = \overline{SM_2}$ sind gleich lang und berechnen sich aus dem Pythagoras:

$$s = w = \sqrt{t^2 + r^2} \tag{2}$$

Die Höhe $h_c = \overline{CD}$ setzt sich wie folgt zusammen:

$$h_c = \frac{a\sqrt{3}}{2} = r + s + w + y = 3\,r + 2\,\sqrt{t^2 + r^2} \tag{3}$$

Betrachten wir nun das rechtwinklige Dreieck BDS:

$$\triangle BDS: \quad \left(\frac{a}{2} + t\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \left(r + \sqrt{t^2 + r^2}\right)^2 \tag{4}$$

Nach ausmultiplizieren der Quadrate und zusammenfassen erhalten wir :

$$2\,r\,(r+\sqrt{t^2+r^2}) = a\,t \tag{5}$$

Die Gleichungen (3) und (5) werden mit einem Computeralgebrasystem nach r, t aufgelöst. Für $a = 10$ wird eine numerische Näherung angegeben.

$$r = \frac{a\,(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2} \approx 1.58919, \quad t = \frac{a\,(\sqrt{6}-2)}{4} \approx 1.12372 \tag{6}$$

Berechnung von R bei gegebenen r

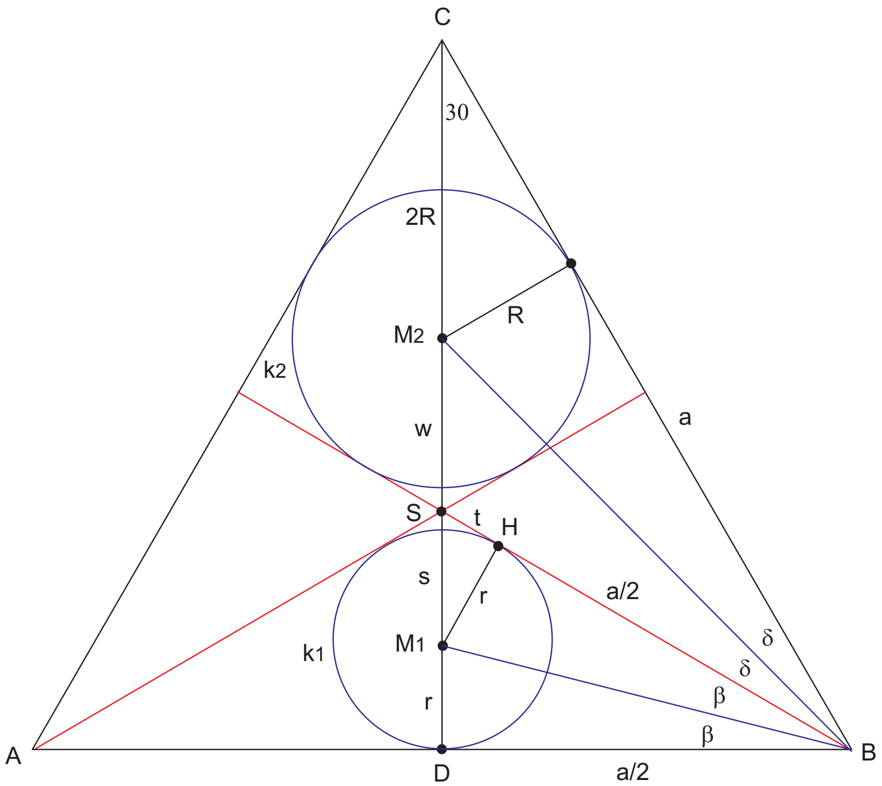

Abbildung 4: Lösungsvorschlag II, Berechnung von R bei gegebenen r

Im Dreieck BCD beträgt der Winkel $\sphericalangle BCD = 30°$. Daraus folgt:

$$\overline{CM_2} = \frac{R}{\sin 30°} = 2\,R \tag{7}$$

Der Mittelpunkt von Kreis k_1 liegt auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle DBS$. Wir können den *Satz des Apollonius* zur Anwendung bringen:
Die Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältniss der anliegenden Seiten.

$$\triangle BDS: \quad \frac{s}{r} = \frac{a/2+t}{a/2} \tag{8}$$

Analog liegt M_2 auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle CBS$ und es gilt mit dem Satz des Apollonius:

$$\triangle BSC : \frac{2\,R}{w} = \frac{a}{a/2+t} \tag{9}$$

Im rechtwinkligen Dreieck SHM_1 gilt der Pythagoras:

$$s = \sqrt{t^2 + r^2} \tag{10}$$

Die Höhe h_c setzt sich zusammen aus:

$$h_c = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\,R + w + s + r = 2\,R + w + \sqrt{t^2 + r^2} + r \tag{11}$$

Die Gleichungen (8),(9) und (11) werden nach w, t, R aufgelöst:

$$\left\{\left\{w \to \tfrac{1}{6}\left(\sqrt{3}a - 4r\right), R \to \tfrac{1}{6}\left(\sqrt{3}a - 4r\right), t \to 0\right\},\right.$$

$$\left.\left\{w \to \frac{a\left(a^2+4r^2\right)\left(\sqrt{3}a^2-4ar-4\sqrt{3}r^2\right)}{6a^4-32a^2r^2+32r^4}, R \to \frac{a\left(\sqrt{3}a^2-4ar-4\sqrt{3}r^2\right)}{6a^2-8r^2}, t \to \frac{4ar^2}{a^2-4r^2}\right\}\right\}$$

Die erste Lösung ist aus geometrischer Sicht nicht sinnvoll da $t = 0$ ist. Die zweite Lösung liefert die gewünschte Formel, aus der wir den Radius R bei gegebenen r bestimmen können.

$$R = \frac{a\left(\sqrt{3}a^2 - 4ar - 4\sqrt{3}r^2\right)}{6a^2 - 8r^2} \tag{12}$$

Lösungsvorschlag III

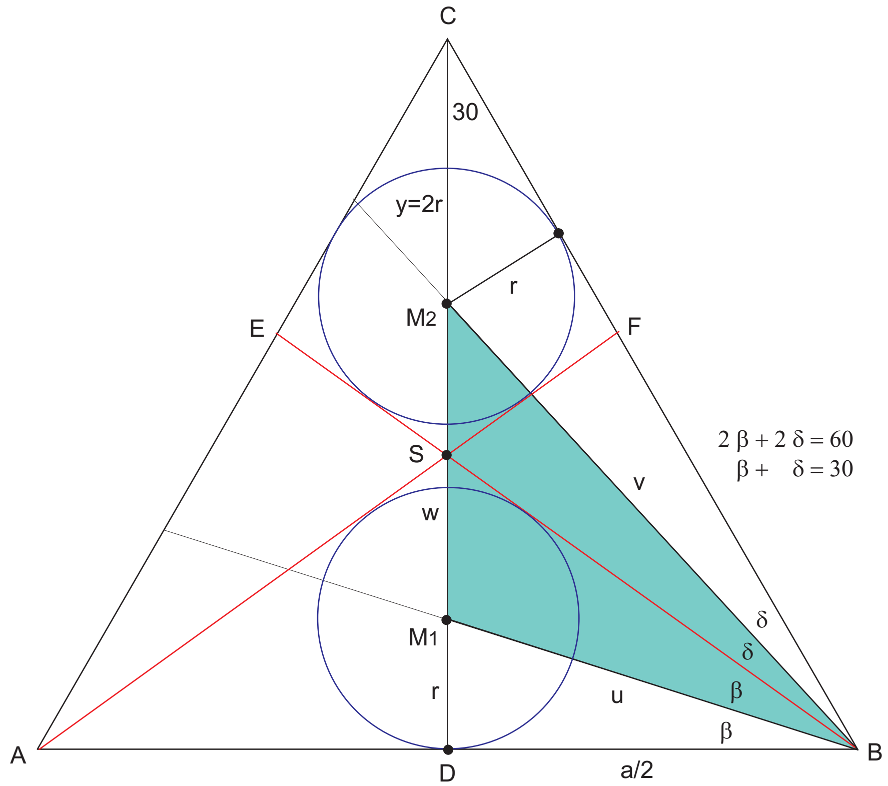

Abbildung 5: Skizze zum Lösungsvorschlag III, Berechnung für $r = R$

Der Mittelpunkt M_1 von k_1 befindet sich auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle DBS = 2\,\beta$. Ebenso muss der Mittelpunkt M_2 von k_2 auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle CBS = 2\,\delta$ liegen (siehe Abbildung 5). Die Summe der Winkel $2\,\beta + 2\,\delta$ ist konstant und beträgt 60°:

$$2\,\beta + 2\,\delta = 60^\circ \quad \rightarrow \quad \beta + \delta = \sphericalangle M_1BM_2 = 30^\circ = const. \tag{1}$$

Die Strecke $w = \overline{M_1M_2}$ können wir aus der Differenz der Höhe $h_c = \overline{CD}$ und den Kreisradien berechnen:

$$w = \overline{M_1M_2} = h_c - r - y = h - 3\,r, \qquad h_c = \frac{a\sqrt{3}}{2} \tag{2}$$

Die Länge der Strecken $u = \overline{BM_1}$ und $v = \overline{BM_2}$ folgt aus dem Pythagoras:

$$u^2 = r^2 + \frac{a^2}{4}, \qquad v^2 = (h - 2\,r)^2 + \frac{a^2}{4} \tag{3}$$

Mit dem Kosinussatz im Dreieck M_1BM_2 erhalten wir eine Beziehung zur Berechnung von r:

$$\triangle M_1BM_2: \quad w^2 = u^2 + v^2 - 2\,u\,v\,\cos(\beta + \delta) \tag{4}$$

Nach einsetzen der Resultate aus (1) .. (3) erhalten wir:

$$8\,r^2 + \sqrt{3\,(a^2+4\,r^2)}\,\sqrt{a^2 - 2\sqrt{3}\,a\,r + 4\,r^2} = a\,(a + 2\sqrt{3}\,r) \tag{5}$$

Die Lösung der Gleichung (5) ergibt:

$$r_1 = \frac{a}{2}\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right), \qquad r_2 = \frac{a}{4}\left(-\sqrt{3}+\sqrt{11}\right) \tag{6}$$

Für uns kommt nur die erste Lösung in betracht, da die Kreise innerhalb vom Dreieck liegen müssen. Die Konstruktion der Strecke r_1 mit *Zirkel und Lineal* ist einfach möglich. Die Höhe im gleichseitigen Dreieck ABC mit der Seitenlänge a beträgt $h = a\sqrt{3}/2$. Von dieser Höhe subtrahiert man die Hälfte der Diagonalen eines Quadrates mit der Seitenlänge a.

Berechnung von R bei gegebenen r

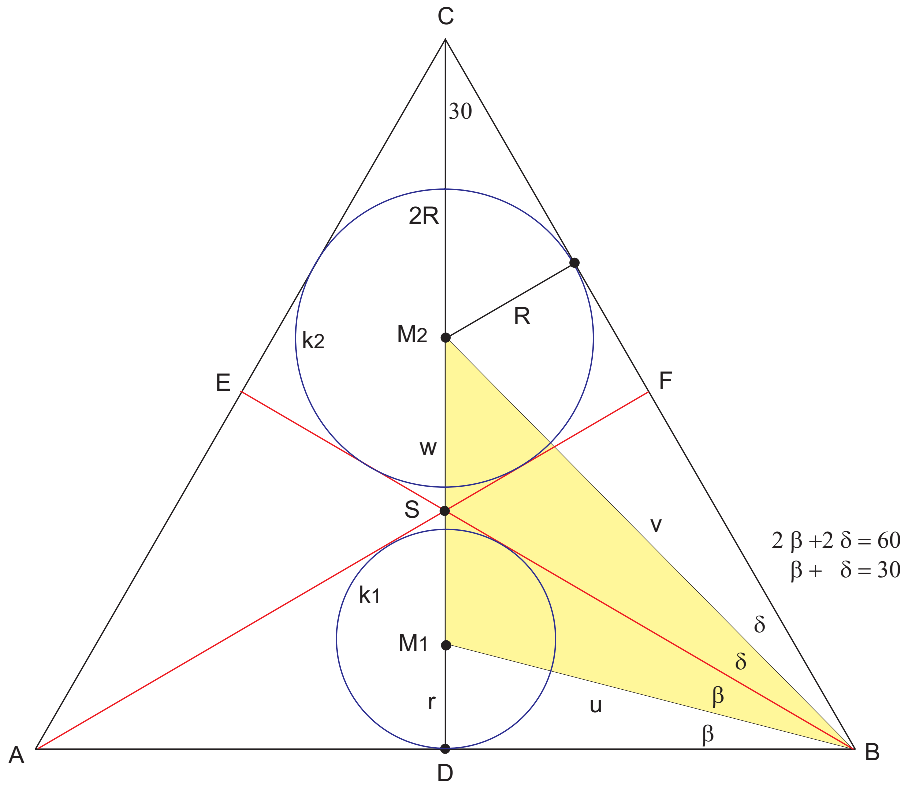

Abbildung 6: Skizze zum Lösungsweg III, Berechnung von R

Wir benutzen den Lösungsansatz wie im vorangegangenen Abschnitt. Der Winkel $\sphericalangle M_1BM_2 = 30°$ bleibt für beliebiges Verhältniss r/R konstant, d.h. die beiden Radien müssen nicht zwingend wie in Aufgabenstellung 1 gefordert, gleich groß sein. Die Strecke $w = \overline{M_1M_2}$ können wir aus der Differenz der Höhe $h_c = \overline{CD}$ und den Kreisradien r, R berechnen:

$$w = \overline{M_1M_2} = h_c - r - y = h_c - r - 2\,R, \qquad h_c = \frac{a\sqrt{3}}{2} \tag{7}$$

Die Länge der Strecken $u = \overline{BM_1}$ und $v = \overline{BM_2}$ folgt aus dem Pythagoras:

$$u^2 = r^2 + \frac{a^2}{4}, \qquad v^2 = (h - 2\,R)^2 + \frac{a^2}{4} \tag{8}$$

Mit dem Kosinussatz im Dreieck M_1BM_2 erhalten wir eine Beziehung zwischen den beiden Radien:

$$\triangle M_1BM_2 : \quad w^2 = u^2 + v^2 - 2\,u\,v\,\cos(\beta + \delta) \tag{9}$$

Nach einsetzen der Resultate aus (7) und (8) erhalten wir:

$$8\,r\,R + \sqrt{3\,(a^2 + 4\,r^2)}\,\sqrt{a^2 - 2\,\sqrt{3}\,a\,R + 4\,R^2} = a\,(a + 2\,\sqrt{3}\,r) \tag{10}$$

Gleichung (10) lösen wir nach R auf:

$$R_1 = \frac{a^2}{\sqrt{3}a + 2r}, \qquad R_2 = \frac{a^2 - 2\sqrt{3}ar}{2\left(\sqrt{3}a - 2r\right)} \tag{11}$$

Für uns kommt nur die zweite Lösung in Betracht, da der Kreis k_2 innerhalb vom Dreieck ABC liegen muß.