Ein besonderer Schnittpunkt im Dreieck

Nationale Wettbewerbe, Republik Irland 1999

6. Januar 2001

Seien D, E, F Punkte auf den Seiten $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$, eines Dreiecks $\triangle ABC$ derart, daß $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $\overline{BE}$ die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ABC$ und F der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist.

Beweise , daß sich $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ dann und nur dann in einem Punkt P schneiden, wenn folgende Gleichung gilt:

$$a^2(a-c) = (b^2-c^2)(a+c) \tag{1}$$

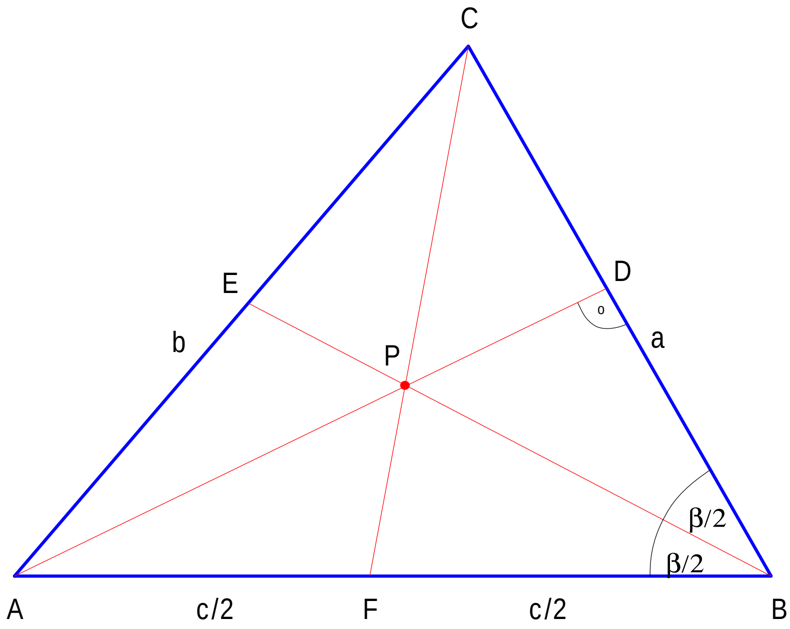

Abbildung 1: Bild zur Aufgabenstellung

Punktezahl=6

Der Satz von Ceva

Die drei Ecktransversalen eines Dreiecks schneiden sich genau dann in einem gemeinsamen Punkt P wenn der *Satz von Ceva* erfüllt ist:

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2} = 1 \tag{2}$$

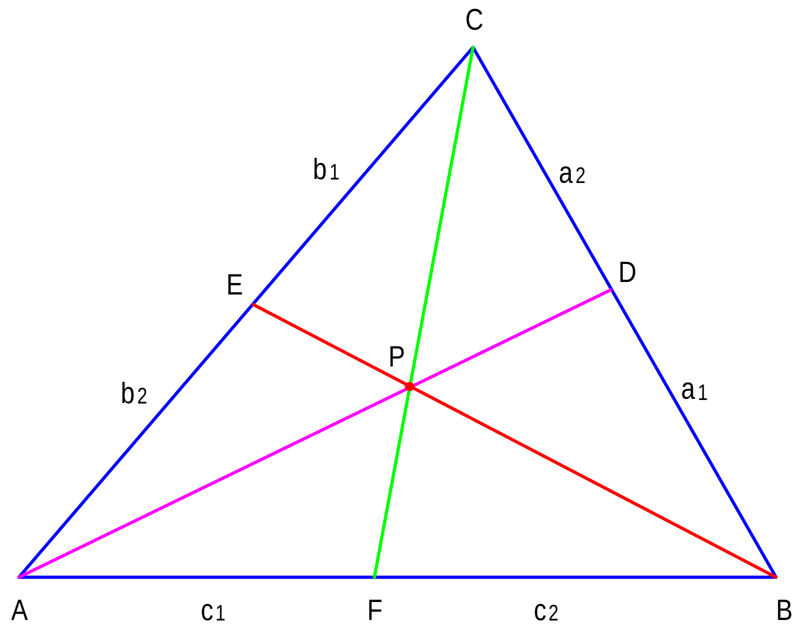

Abbildung 2: Skizze zum Satz von Ceva

In dem Dreieck $\triangle ABC$ erfüllen die Teilungsverhältnisse laut Aufgabenstellung nun ganz bestimmte Eigenschaften. Der Punkt F ist Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$:

$$c_1 = c_2 = \frac{c}{2}, \quad \rightarrow \quad \frac{c_1}{c_2} = 1 \tag{3}$$

Die Strecke $h = \overline{AD}$ ist eine Höhe im Dreieck $\triangle ABC$. Wir können zweimal den Satzt des Pythagoras anwenden:

$$a_1^2 + h^2 = c^2, \quad a_2^2 + h^2 = b^2, \quad a_1 + a_2 = a \tag{4}$$

Mit Hilfe eines Computeralgebraprogramms lösen wir die Gleichungen nach a_1, a_2 auf:

$$a_1 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}, \quad a_2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}, \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} \tag{5}$$

Schließlich gilt für die Strecke $\overline{BE}$ der Satz des *Appolonius*

Die Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a}{c} \tag{6}$$

Nun können wir die Gleichungen (3), (5) und (6) in den Satzt von Ceva (2) einsetzen:

$$\frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{2c}{2c} = 1 \tag{7}$$

Diese Gleichung ist nach ausmultiplizieren der Terme und erneuten Zusammenfassen identisch mit Gleichung (1):

$$a^2(a - c) = (b^2 - c^2)(a + c) \tag{8}$$