Die Weidenhalbierung

Pierre Tougne

Spektrum der Wissenschaft, Heft 03/2004

Jans Weide ist ein Dreieck, das durch die Bäume A, B und C begrenzt ist. Von dem Baum M irgendwo auf der Strecke BC bis zu einem Baum N, der auf den Rand des Dreiecks zu pflanzen ist, will er einen geraden Zaun ziehen, der die Weide in flächengleiche Hälften zerlegt. Wie konstruiert Jan den Standpunkt des Baumes N?

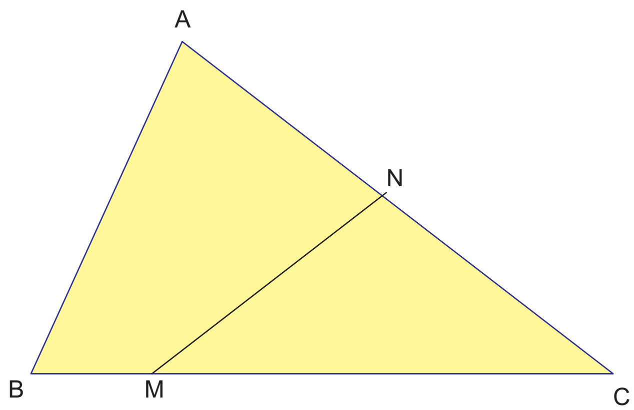

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Lösungsvorschlag I

von Jutta Gut, Wien

Ziehe durch H (den Halbierungspunkt von BC) eine Parallele zu AM. Der

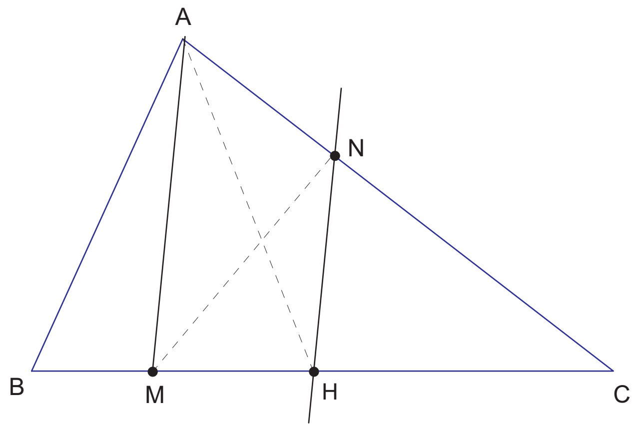

Abbildung 2: Strecke AH halbiert das Dreieck ABC

Schnittpunkt mit AC ist der gesuchte Punkt N.

Beweis: Die Strecke AH halbiert das Dreieck, und die Dreiecke AMH und AMN haben denselben Flächeninhalt.

Lösungsvorschlag II

von Reinhold Möbs, Karlsruhe

Man berechne die y - Koordinate des Punktes $N = (N_x, N_y)$ Nomenklatur der anderen Punkte entsprechend als:

$$N_y = \frac{\left(\frac{A_y}{2}\right) \cdot C_x}{C_x - M_x} \tag{1}$$

woraus sich die folgende Verhältnisgleichung ergibt:

$$\frac{C_x}{C_x - M_x} = \frac{N_y}{\left(\frac{A_y}{2}\right)} \tag{2}$$

Und diese stellt man einfach geometrisch nach:

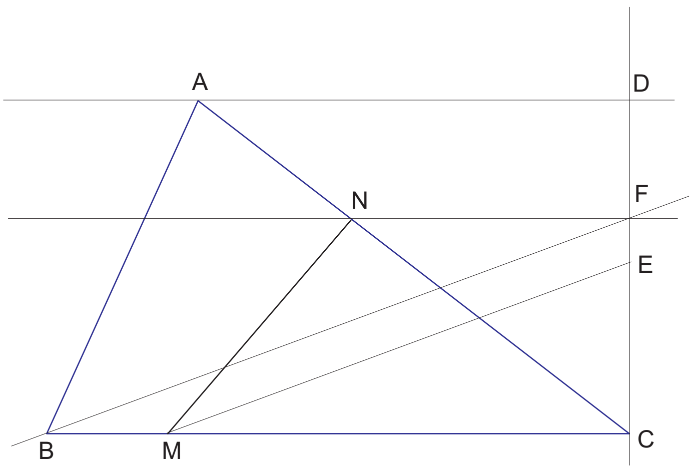

Abbildung 3: Konstruktion der Verhältnissgleichung

Konstruktionsanweisung zu Abbildung 3:

```
- sei A,B,C ein Dreieck und liege M auf BC
- der Punkt D liegt
       1.) auf der Parallelen zu BC durch A
       2.) auf der Senkrechten zu BC durch C
- der Punkt E ist der Mittelpunkt der Strecke CD
- der Punkt F liegt
       1.) auf CD
       2.) auf der Parallelen zu ME durch A
- der Punkt N liegt
       1.) auf CA
       2.) auf der Parallelen zu BC durch F
```

Lösungsvorschalg III

von Ingmar Rubin, Berlin

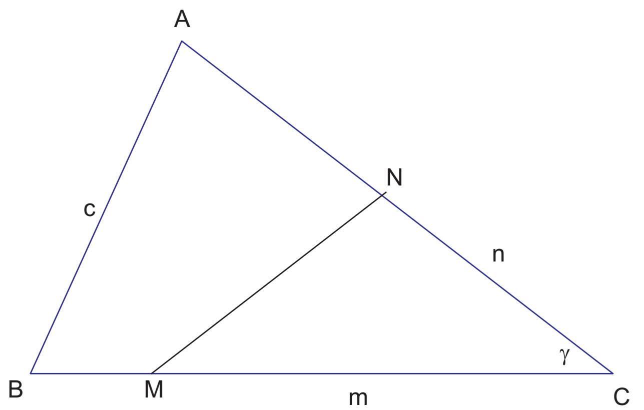

Abbildung 4: Flächenteilung entlang der Strecke MN

Bezeichne $a = BC$ und $b = AC$ so berechnet sich der Flächeninhalt vom Dreieck ABC aus

$$\triangle ABC: \qquad F_1 = \frac{a\,b\,\sin\gamma}{2} \tag{3}$$

Bezeichne $m = MC$ und $n = NC$ so beträgt der Flächeninhalt des unteren Dreiecks MCN:

$$\triangle MCN: \qquad F_2 = \frac{m\,n\,\sin\gamma}{2} \tag{4}$$

Nach Aufgabenstellung soll nun F_2 gerade der Hälfte von F_1 entsprechen:

$$\frac{a\,b\,\sin\gamma}{4} = \frac{m\,n\,\sin\gamma}{2} \quad \rightarrow \quad a\,b = 2\,m\,n \tag{5}$$

Die letzte Gleichung wird nun als Verhältnisgleichung notiert:

$$a\,b = 2\,m\,n \quad \rightarrow \quad \frac{a}{2\,m} = \frac{n}{b} \tag{6}$$

Die Größen a, b, m sind gegeben und n ist gesucht. Für die geometrische Konstruktion der Verhältnisgleichung gibt es verschiedene Lösungswege. Im folgenden werden drei Varianten aufgeführt.

Konstruktion I: Ähnlichkeitssatz

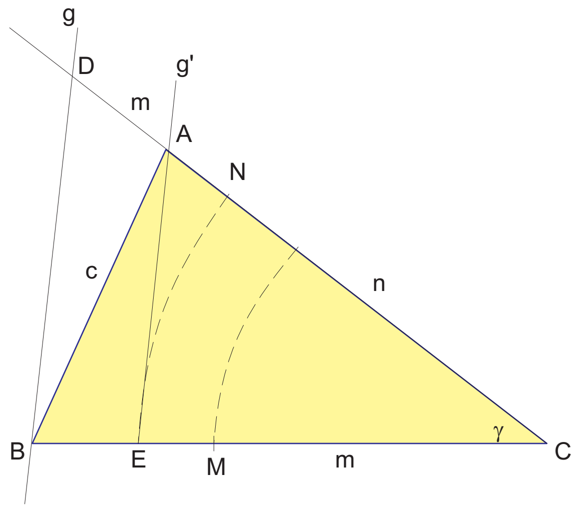

Abbildung 5: Konstruktion des ähnlichen Dreiecks DBC

Zwei Dreiecke sind einander ähnlich, wenn sie in allen drei Innenwinkeln übereinstimmen. Wir konstruieren zum gegebenen Dreieck ABC ein weiteres Dreieck DBC, dass dem ersten Dreieck ähnlich ist (Abbildung 5).

```
- zeichne das Dreieck ABC
- verlaengere Seite CA ueber A hinaus
- trage von C aus zweimal hintereinader die
  Strecke m = MC auf der Strecke CA ab
- bezeichen den Enpunkt mit D
- zeichne durch die Punkte D, B eine Gerade g
- fuehre mit g eine Parallelverschiebung aus, so dass g' durch A geht
- bezeichne den Schnittpunkt zwischen g' und Seite BC mit E
- die Strecke EC entspricht nun der gesuchten Strecke n=CN
```

Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke folgt:

$$\triangle ABC \sim \triangle DBC: \qquad \frac{BC}{DC} = \frac{EC}{AC} \quad \rightarrow \quad \frac{a}{2\,m} = \frac{n}{b} \tag{7}$$

Konstruktion II: Strahlensatz

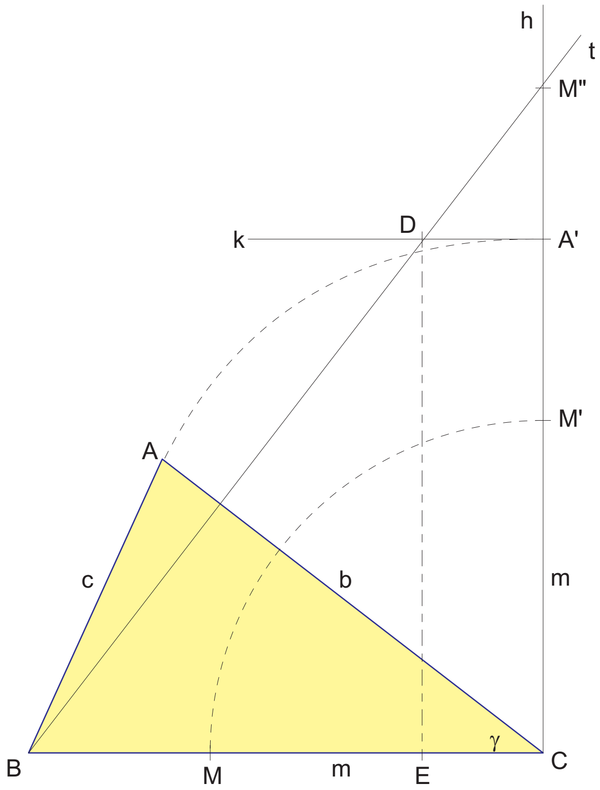

Abbildung 6: Konstruktion der Verhältnissgleichung, Teil II

```
- errichte im Punkt C die Senkrechte h zur Grundlinie BC
- trage von C aus zweimal die Strecke m = CM auf h ab
- bezeichne den Enpunkt mit M"
- verbinde die Punkte A, M" durch eine Gerade t
- trage von C aus die Strecke b = AC auf h ab
- bezeichne den Endpunkt mit A’
- errichte in A’ die Senkrechte k zur Geraden h
- bezeichne den Schnittpunkt zwischen k und t mit D
- faelle von D das Lot auf BC
- bezeichne den Lotfusspunkt mit E
```

Nach Strahlensatz gilt nun:

$$\frac{BC}{CM''} = \frac{BE}{ED} \qquad \rightarrow \qquad \overline{BE} = n \tag{8}$$

Konstruktion der Verhältnissgleichung, Teil III

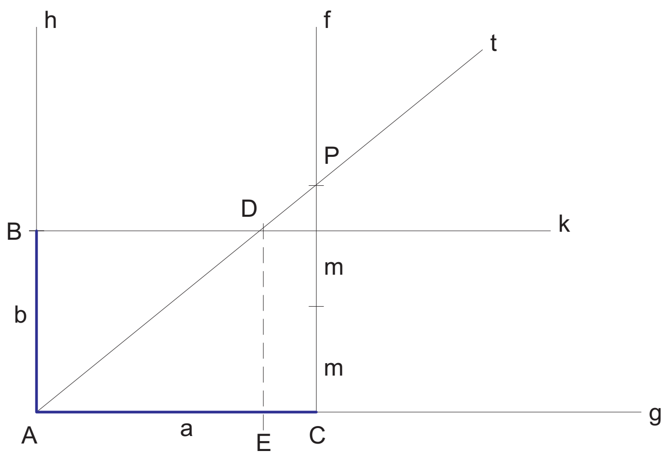

Abbildung 7: Konstruktion der Verhältnissgleichung, Teil III

```
- zeichne die Gerade g
- markiere auf g den Punkt A
- errichte in A die Senkrechte h zu g
- trage von A mit dem Zirkel auf g die Strecke a ab
- bezeichne den Endpunkt der Strecke a auf g mit C
- errichte in C die Senkrechte f
- trage von C auf der Senkrechten f
  zweimal hintereinander die Entfernung m ab
- bezeichne den Endpunkt auf f mit P
- zeichne durch die Punkte A, P die Gerade t
- trage von A auf der Senkrechten h die Strecke b ab
- bezeichne den Endpunkt mit B
- errichte in B die Senkrechte k zur Geraden h
- bezeichne den Schnittpunkt zwischen k und t mit D
- faelle von D das Lot auf g
- bezeichne den Lotfusspunkt auf g mit E
- nach Strahlensatz gilt nun AE = n
```

Jan wird bei der praktischen Durchführung der Konstruktion an Stelle des Zirkels eine Schnur benutzen. Bei den Entfernungen a, b, m macht er je einen Knoten in die Schnur. Mit ein paar Holzpflöcken markiert er die Endpunkte entsprechend der Abbildung 7 auf dem Erdboden. Das Lot fällt er nach der bekannten *Zirkel und Lineal* Konstruktion.