Das gefaltete Quadrat

Eine Aufgabe aus der *Japanischen Tempelgeometrie*

21. September 2004

Gegeben sei das Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a. Entlang der Linie $\overline{EF}$ wird das Quadrat gefaltet, so das der Punkt $A = A'$ auf Seite $\overline{BC}$ liegt. Ein Kreis k tangiert die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ des Quadrats sowie die Linie $A'D'$. Zeige an dieser Figur das stets $d = r$ gilt!

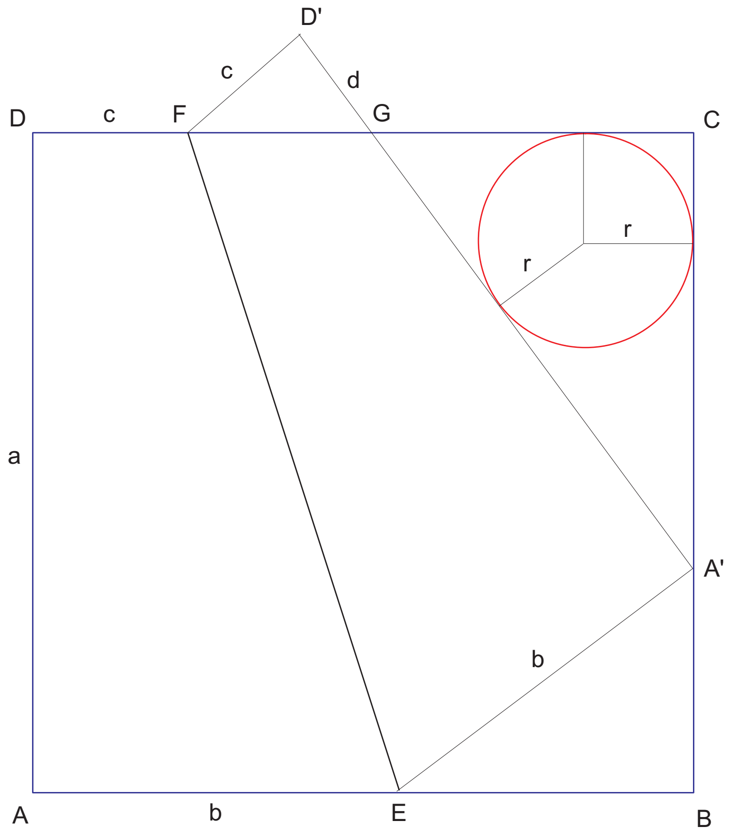

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Lösungsweg I

von Jutta Gut, Wien

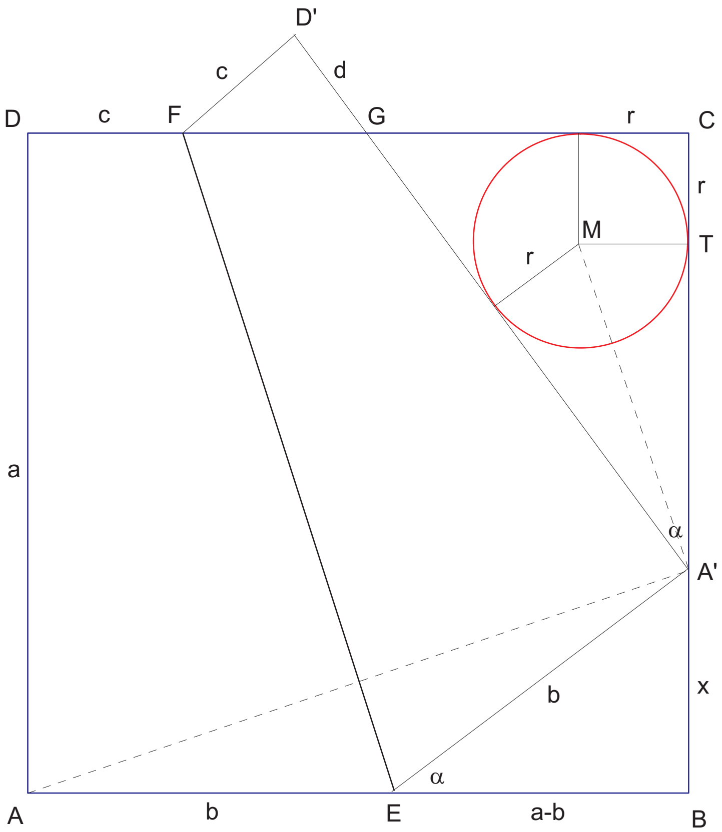

Abbildung 2: Skizze zum Lösungsweg I

Es sei $x = BA'$, M der Mittelpunkt des Kreises, T der Berührpunkt von Kreis und Seite BC und α der Winkel $\sphericalangle BEA' = \sphericalangle CA'G$.

Berechnung von r

Es ist:

$$\sphericalangle BAA' = \sphericalangle CA'M = \frac{\alpha}{2} \tag{1}$$

Daher ist:

$$\frac{AB}{BA'} = \frac{A'T}{TM} \quad \rightarrow \quad \frac{a}{x} = \frac{(a-x-r)}{r} \quad \rightarrow \quad r = \frac{x \cdot (a-x)}{a+x} \tag{2}$$

Berechnung von d

Aus dem rechtwinkligen Dreieck EBA' erhält man

$$b^2 = (a-b)^2 + x^2 \quad \rightarrow \quad b = \frac{a^2 + x^2}{2\,a}, \quad a - b = \frac{a^2 - x^2}{2\,a} \tag{3}$$

Die Dreiecke $A'CG$ und EBA' sind ähnlich:

$$\frac{GC}{a-x} = \frac{x}{a-b} \quad \rightarrow \quad GC = \frac{2\,a\,x\,(a-x)}{a^2-x^2} \tag{4}$$

Auch die Dreiecke $FD'G$ und EBA' sind ähnlich:

$$\frac{FG}{c} = \frac{b}{a-b} = \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2} \quad \rightarrow \quad FG = \frac{c \cdot (a^2+x^2)}{a^2-x^2} \tag{5}$$

Die Seite $\overline{CD}$ setzt sich zusammen aus:

$$\overline{CD} = c + FG + GC = a \tag{6}$$

also

$$c + \frac{c \cdot (a^2+x^2)}{a^2-x^2} + \frac{2\,a\,x \cdot (a-x)}{a^2-x^2} = a \quad \rightarrow \quad c = \frac{(a-x)^2}{2\,a} \tag{7}$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $FD'G$ und EBA' ergibt sich weiter:

$$\frac{d}{c} = \frac{x}{a-b} \quad \rightarrow \quad d = \frac{x\,c}{a-b} = \frac{x \cdot (a-x)^2}{2\,a} \cdot \frac{2\,a}{a^2-x^2} \tag{8}$$

$$d = \frac{x \cdot (a-x)}{a+x} \tag{9}$$

d.h. $d = r$, qed.

Lösungsweg II

von Ingmar Rubin, Berlin

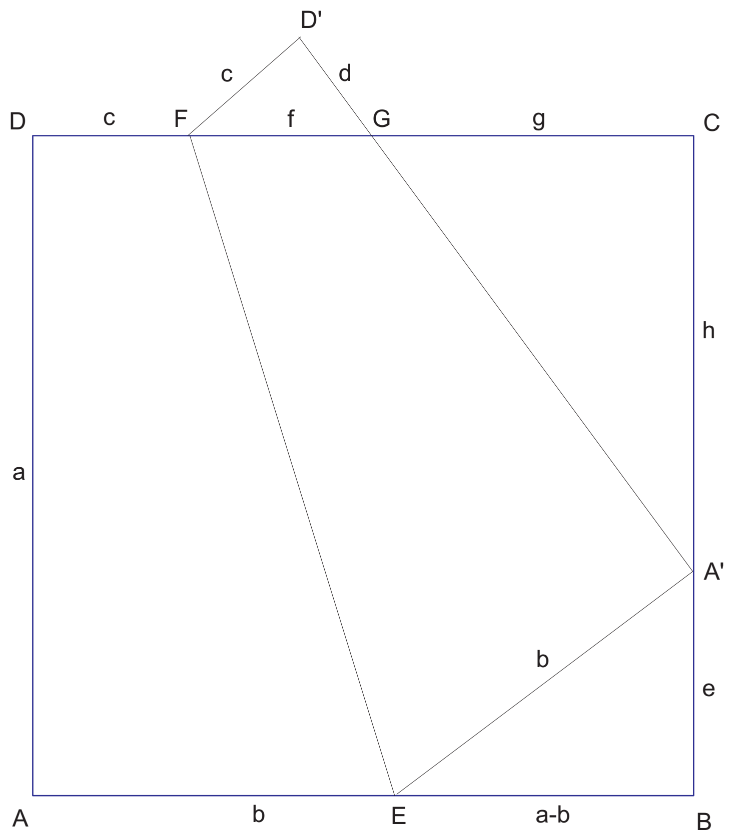

Abbildung 3: Skizze zum Lösungsweg Teil a

Die Strecken und Punktebezeichner seien entsprechend Abbildung 3 gewählt. Wir beginnen damit die Streckenabschnitte c, e, f, g und h auf der Peripherie des Quadrats zu berechnen. Strecke b wird dabei als freier Parameter betrachtet. Die Seite $e = \overline{BA'}$ folgt aus dem *Satz des Pythagoras*:

$$\triangle EBA' : \qquad e^2 = b^2 - (a-b)^2 \quad \rightarrow \quad e = \sqrt{2\,a\,b - a^2} \tag{1}$$

Der Streckenabschnitt $h = \overline{A'C}$ ist die Differenz aus $a - e$:

$$h = a - e = a - \sqrt{2\,a\,b - a^2} \tag{2}$$

Die Dreiecke EBA' und $A'CG$ sind einander ähnlich. Aus dem Seitenverhältnis folgt die Strecke $g = \overline{CG}$ zu:

$$\frac{e}{a-b} = \frac{g}{h} \quad \rightarrow \quad g = \frac{(a - \sqrt{2\,a\,b - a^2})\,\sqrt{2\,a\,b - a^2}}{a-b} \tag{3}$$

Weiterhin ist Dreieck FGD' ähnlich zum Dreieck EBA' :

$$\frac{c}{f} = \frac{a-b}{b} \quad \rightarrow \quad f = \frac{c\,b}{a-b} \tag{4}$$

Die Summe der Abschnitte $g + f + c$ entspricht der Seitenlänge $a = \overline{CD}$ vom Quadrat :

$$\overline{CD} = a = g + f + c = \frac{(a - \sqrt{2\,a\,b - a^2})\,\sqrt{2\,a\,b - a^2}}{a - b} + \frac{c\,b}{a - b} + c \tag{5}$$

Diese Gleichung wird nach c aufgelöst:

$$c = b - \sqrt{a\,(2\;b - a)} \quad \rightarrow \quad c = b - e \tag{6}$$

Aus der Ähnlichkeit zwischen den Dreiecken $\triangle FD'G \sim \triangle EBA'$ berechnen wir die Strecke d:

$$\frac{c}{d} = \frac{a - b}{e} \quad \rightarrow \quad d = \frac{c\,e}{a - b} = \frac{(b - e)\,e}{a - b} = \frac{a^2 - 2\,a\,b + b\,\sqrt{a\,(2\,b - a)}}{a - b} \tag{7}$$

Lenken wir nun unsere Aufmerksamkeit auf den Berührungskreis k mit Radius dem r. Die

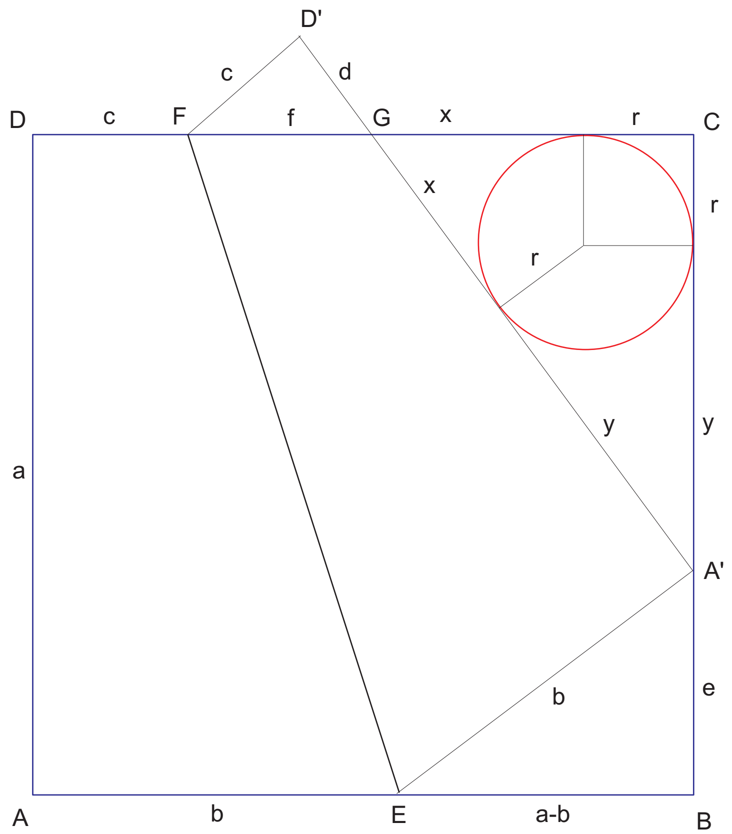

Abbildung 4: Skizze zum Lösungsweg Teil b

Tangentenabschnitte x, y von den Punkten G, B an den Kreis k sind gleich lang.

$$\overline{A'C}: \qquad h = a - \sqrt{2\,a\,b - a^2} = y + r \tag{8}$$

$$\overline{CG}: \qquad g = \frac{(a - \sqrt{2\,a\,b - a^2})\,\sqrt{2\,a\,b - a^2}}{a - b} = x + r \tag{9}$$

Die gespiegelte Quadratseite $\overline{A'D'}$ besteht aus den Teilstrecken:

$$\overline{A'D'}: \qquad a = x + y + d = x + y + \frac{a^2 - 2\,a\,b + b\,\sqrt{a\,(2\,b - a)}}{a - b} \tag{10}$$

Die Gleichungen (8),(9) bis (10) werden mit einem Computeralgebrasystem (z.B. Mathematica) nach r, x, y aufgelöst.

$$\begin{aligned}\{\{r \to \frac{a^2 - 2\,a\,b + \sqrt{-a\,(a - 2\,b)}\,b}{a - b},\\ x \to \sqrt{-a\,(a - 2\,b)},\\ y \to \frac{a\left(-\sqrt{-a\,(a - 2\,b)} + b\right)}{a - b}\}\}\end{aligned}$$

Der Vergleich mit den vorangegangenen Gleichungen, insbesondere (7) zeigt:

$$r = d, \qquad x = e, \qquad y = \frac{a\,c}{a - b} \tag{11}$$

Lösungsweg III

von Swen Lünig, Petershagen bei Berlin

Die Abb. 5 zeigt die geometrische Figur zur Lösung der Aufgabe. Das Quadrat habe die Seitenlänge 1.

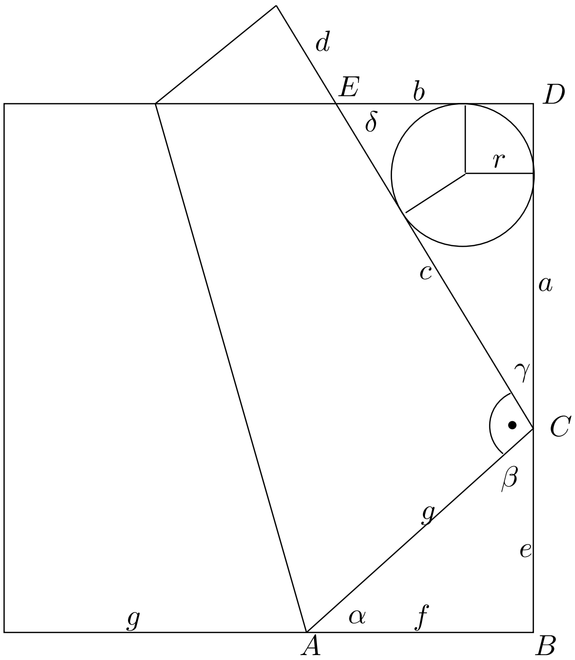

Abbildung 5: Skizze zur Lösung

Die Länge g wird aus dem offenen Intervall $(\frac{1}{2}, 1)$ vorgegeben. Dies ist gleichzeitig die Länge der Hypotenuse des Dreiecks ABC. Mit mit $f = 1 - g$ ergibt sich somit die Länge

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{g^2 - (1-g)^2} && (1) \\ &= \sqrt{2g - 1} && (2) \end{aligned}$$

Die Länge a ergibt sich wieder aus der Seitenlänge des Quadrats

$$\begin{aligned} a &= (1 - e) && (3) \\ &= 1 - \sqrt{2g - 1} && (4) \end{aligned}$$

Der Winkel BAC und der Winkel DCE sind gleich, weil ihre Schenkel jeweils senkrecht aufeinander stehen. Außerdem kann diese Eigenschaft mit den zwei Beziehungen $\alpha + \beta = 180° - 90°$ und $\beta + \gamma = 180° - 90°$ gezeigt werden. Aus der Gleichheit der Winkel ergibt sich entsprechend der Strahlensätze die Beziehung

$$\frac{e}{f} = \frac{b}{a} \qquad (5)$$

und somit die neue Größe b.

Schließlich ergibt sich die Länge der Hypotenuse c zu

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2+b^2} && (6)\\ &= \sqrt{a^2+\left(a\frac{e}{f}\right)^2} && (7)\\ &= a\sqrt{1+\left(\frac{e}{f}\right)^2} && (8)\\ &= a\sqrt{1+\frac{2g-1}{(1-g)^2}} && (9)\\ &= a\sqrt{\frac{g^2}{(1-g)^2}} && (10)\\ &= a\frac{g}{(1-g)} && (11)\end{aligned}$$

Der Radius r des Inkreis eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen a, b und der Hypotenusenlänge c ergibt sich zu

$$r = \frac{a+b-c}{2} \qquad (12)$$

Dies wird anhand der Abb. 6 und den darin geltenden Gleichungen deutlich:

$$\begin{aligned} x^2 &= (a-r)^2+r^2 && (13)\\ x^2 &= c_x^2+r^2 && (14)\\ y^2 &= (b-r)^2+r^2 && (15)\\ y^2 &= b_x^2+r^2 && (16)\\ c &= c_x+c_y && (17)\end{aligned}$$

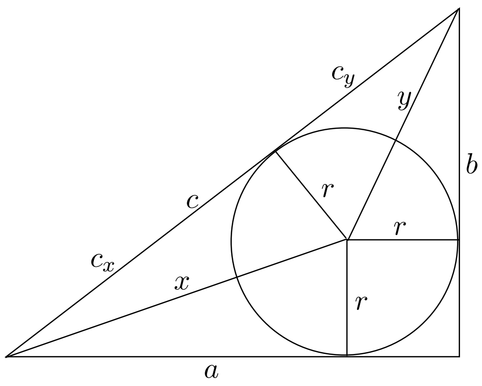

Abbildung 6: Skizze zum Inkreis

Laut Behauptung der Aufgabe soll der Radius gleich der Länge d sein. Diese wiederum ergibt sich zu $d = 1 - c$. Es muß also folgende Gleichung untersucht werden:

$$\begin{aligned}
d &= r && (18)\\
1 - c &= \frac{a+b-c}{2} && (19)\\
1 &= \frac{a+b+c}{2} && (20)\\
2 &= a+b+c && (21)\\
2 &= a\left(1+\frac{e}{f}\right)+c && (22)\\
2 &= a\left(1+\frac{\sqrt{2g-1}}{1-g}\right)+c && (23)\\
2 &= a\left(\frac{1-g+\sqrt{2g-1}}{1-g}\right)+c && (24)\\
2 &= a\left(\frac{1-g+\sqrt{2g-1}}{1-g}+\frac{g}{1-g}\right) && (25)\\
2 &= a\frac{1+\sqrt{2g-1}}{1-g} && (26)\\
2 &= \left(1-\sqrt{2g-1}\right)\frac{1+\sqrt{2g-1}}{1-g} && (27)\\
2 &= \frac{1-(2g-1)}{1-g} && (28)\\
2 &= 2\frac{1-g}{1-g} && (29)\\
2 &= 2 && (30)
\end{aligned}$$

In umgekehrter Richtung könnte nun aus $2 = 2$ die Behauptung der Aufgabe $d = r$ abgeleitet werden. Die Behauptung stimmt also.