Quadrat und Parabel

Mathematikzeitschrift *Die Wurzel*

9. Mai 2001

In einem kartesischen Koordinatensystem sei ein Quadrat $\square ABCD$ gegeben. Die Seite $\overline{AB}$ liege auf der Geraden $y = x + 8$. Die Punkte C und D befinden sich auf der Parabel $y = x^2$.

Zu berechnen ist die Seitenlänge des Quadrates.

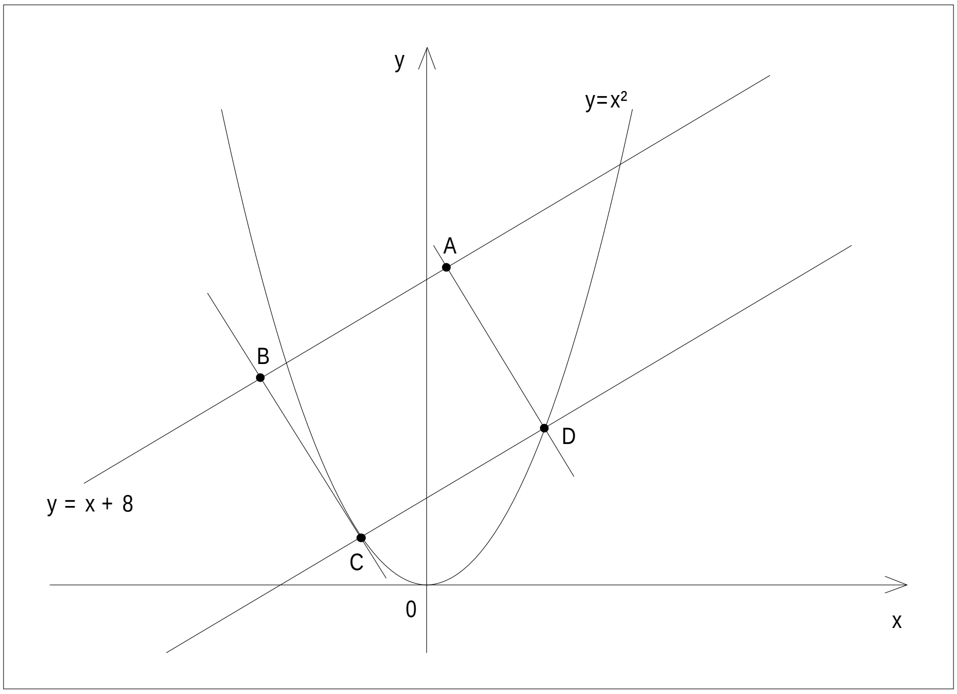

Abbildung 1: Quadrat und Parabel

Punktezahl=8

Geradengleichungen

Zunächst leiten wir eine allgemeine Abstandsformel für parallel liegende Geraden ab. Gegeben seien die Geraden g_1 und g_2 mit dem Anstieg m. Die Koordinaten u und v bezeichnen die Schnittpunkte mit der $y-$ Achse.

$$g_1: \quad y = m \cdot x + u, \qquad g_2: \quad y = m \cdot x + v \tag{1}$$

Die zu g_1 senkrecht stehende Gerade g_3 im Schnittpunkt mit der $y-$ Achse lautet:

$$g_3: \quad y = -\frac{1}{m} \cdot x + u \tag{2}$$

Wir suchen jetzt den Schnittpunkt zwischen g_2 und g_3.

$$g_2 = g_3: \quad m \cdot x + u = -\frac{1}{m} \cdot x + uv \quad \rightarrow \quad x_s = \frac{m \cdot (u - v)}{m^2 + 1} \tag{3}$$

$$y_s = m \cdot x_s + u = \frac{m^2 \cdot (u - v)}{m^2 + 1} + u \tag{4}$$

Der Abstand beider Geraden ergibt sich aus der Punktabstandsformel zwischen $P_1(0, u$ und $P_2(x_s, y_s)$:

$$d = \sqrt{(x_s - 0)^2 + (y_s - u)^2} = \sqrt{\frac{(u - v)^2}{1 + m^2}} \tag{5}$$

Schnittpunkte zwischen Gerade und Parabel

Nach diesen vorbereitenden Arbeiten, wollen wir nun das oben gestellte Problem lösen. Die Schnittpunkte C, D zwischen der Gerden g_2 und der Parabel lauten:

$$x_c = \frac{1}{2}\left(m - \sqrt{m^2 + 4v}\right), \quad x_d = \frac{1}{2}\left(m + \sqrt{m^2 + 4v}\right) \tag{6}$$

Die zugehörigen $y-$ Koordinaten ergeben sich zu:

$$y_c = \frac{1}{4} \cdot \left(m - \sqrt{m^2 + 4v}\right)^2, \quad y_d = \frac{1}{4} \cdot \left(m + \sqrt{m^2 + 4v}\right)^2 \tag{7}$$

Die Strecke $\overline{CD}$ ist die gesuchte Quadratseite:

$$d = \sqrt{(x_d - x_c)^2 + (y_d - y_c)^2} = \sqrt{(1 + m^2)(m^2 + 4v)} \tag{8}$$

Wir haben nun eine zweite unabhängige Gleichung zur Bestimmung der Quadratseite hergeleitet. Aus der Lösung beider Gleichungen erhalten wir für v zwei Lösungen :

$$v_1 = 2 + 4m^2 + 2m^4 + u - (1 + m^2)\sqrt{4 + 9m^2 + 4m^4 + 4u} \tag{9}$$

$$v_2 = 2 + 4m^2 + 2m^4 + u + (1 + m^2)\sqrt{4 + 9m^2 + 4m^4 + 4u} \tag{10}$$

Mit den Werten aus der Aufgabenstellungen $m = 1$, $u = 8$ erhalten wir:

$$v_1 = 2, \quad d_1 = 3\sqrt{2}, \quad v_2 = 30, \quad d_2 = 11\sqrt{2} \tag{11}$$

In den Abbildungen 2 und 3 sind beide Lösungsmöglichkeiten nocheinmal dargestellt:

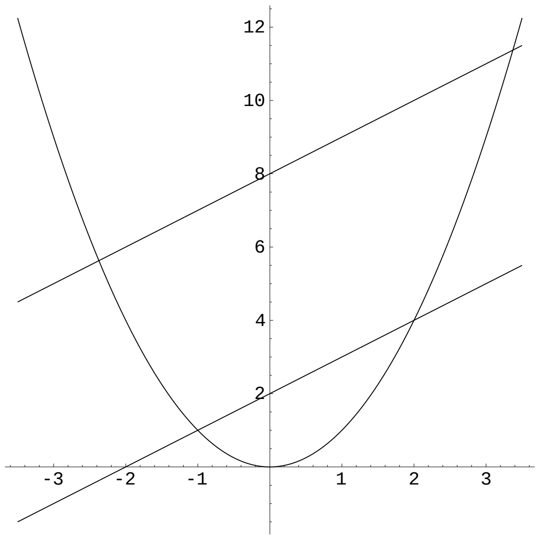

Abbildung 2: Lösung 1 mit $g_2: \quad y = x + 2$

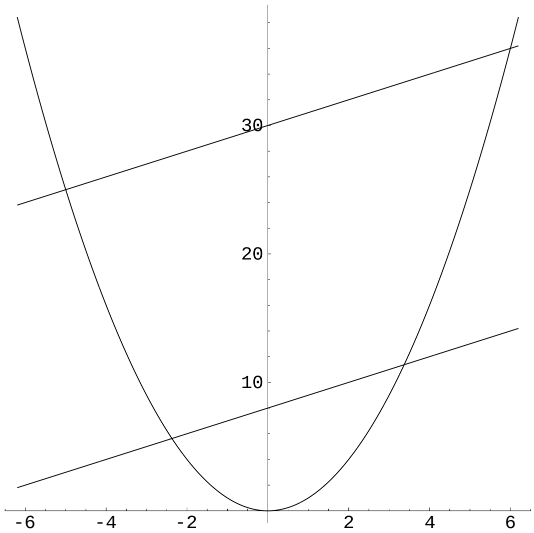

Abbildung 3: Lösung 2 mit $g_2: \quad y = x + 30$