

Landvermessung

Rätselaufgabe aus *Spektrum der Wissenschaft*

20. Juli 2000

“In diesem Bild stimmt kein Maß. Wie soll ich da die Grundstückssteuer für Bauer Heins fünfeckigen Acker festlegen?“ fragt der Finanzbeamte.

“Längentreu zu zeichnen, war noch nie meine Stärke, dafür ist alles, was wie ein rechter Winkel aussieht, in Wirklichkeit auch einer, erklärt Meßgehilfe Schluri, “und schließlich hat mir Hein versichert, daß er für den roten Teil immer 100 Mark bezahlt. Für den blauen Anteil muß er 200 Mark und für den gelben Anteil 300 Mark bezahlen.“

Die Steuer ist der Fläche proportional. Wieviel muß Hein bezahlen ?

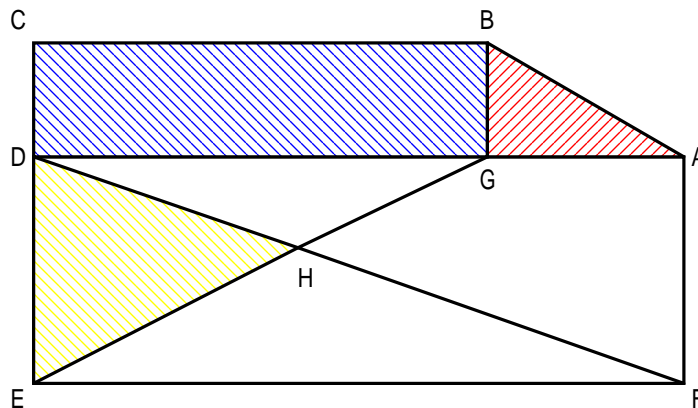


Abbildung 1: Bild zur Aufgabenstellung

Lösung

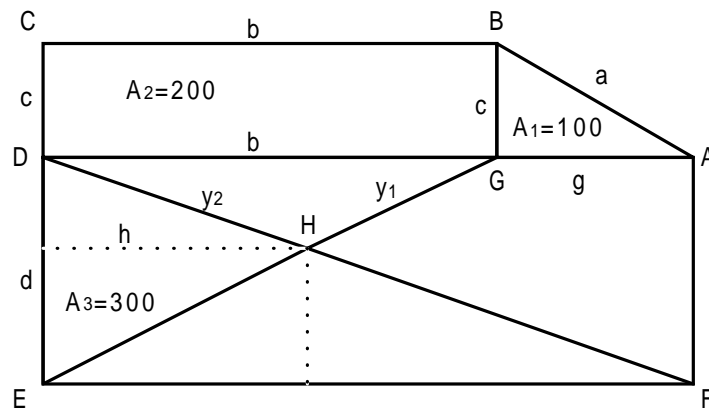


Abbildung 2: Lösungsskizze

Wir bezeichnen die Seiten in der Figur wie Abbildung 2 zeigt. Der Flächeninhalt für A_1 und A_2 berechnet sich nach :

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot g; \quad A_2 = c \cdot b \quad (1)$$

Mit $A_2 = 2 \cdot A_1$ folgt:

$$c \cdot b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot c \cdot g \quad \rightarrow \quad b = g \quad (2)$$

Geradengleichung für y_1 und y_2

$$y_1 = \frac{d}{b} \cdot x \quad y_2 = -\frac{d}{2b} \cdot x + d \quad (3)$$

Die Schnittpunktkoordinaten für den Punkt H ergeben sich aus :

$$y_1 = y_2, \quad \frac{d}{b} \cdot x = -\frac{d}{2b} \cdot x + d \quad \rightarrow \quad x = h = \frac{2}{3} \cdot b, \quad y = \frac{2}{3} \cdot d \quad (4)$$

Die Fläche A_3 berechnet sich aus:

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot b \cdot d = 3A_1 = \frac{3}{2}bc \quad \rightarrow \quad d = \frac{9}{2} \cdot c \quad (5)$$

Nachdem das Verhältniss zwischen den Seitenlängen c und d bekannt ist, kann der gesamte Flächeninhalt berechnet werden. Um ein Flächenmaß zu erhalten wird $c = 10 \text{ cm}$ definiert.

$$A_2 = 200 \text{ cm}^2 = b \cdot c \quad \rightarrow \quad b = 20 \text{ cm}, \quad d = \frac{9}{2} \cdot c = 45 \text{ cm}$$

$$A_{ges} = (c + d) \cdot (b + b) - A_1 = (10 + 45) \text{ cm} \cdot (20 + 20) \text{ cm} - 100 \text{ cm}^2 = 2100 \text{ cm}^2$$

Bauer Hein muß demnach 2100.- DM für seinen fünfeckigen Acker bezahlen.