Die geteilte Kreissehne

Al-Biruni (um 1000)

Jutta Gut, Wien

Die folgende Aufgabe ist vielleicht nicht so bekannt, aber auch ziemlich einfach. Sie stammt vom arabischen Mathematiker Al-Biruni (um 1000).

'Wenn in einen beliebigen Kreisbogen eine gerade Linie ungleich gebrochen gelegt wird, und von der Mitte des Bogens eine Senkrechte auf sie gefällt wird, so wird sie dadurch halbiert.'
Mit anderen Worten: Die Punkte A, B und C liegen auf einem Kreis. Wir nehmen an, dass $AB > BC$. D Sei der Halbierungspunkt des Bogens AC. Wir fällen von D aus eine Normale auf AB, sie schneidet AB in E. Es ist zu zeigen, dass $AE = (AB + BC)/2$ gilt.

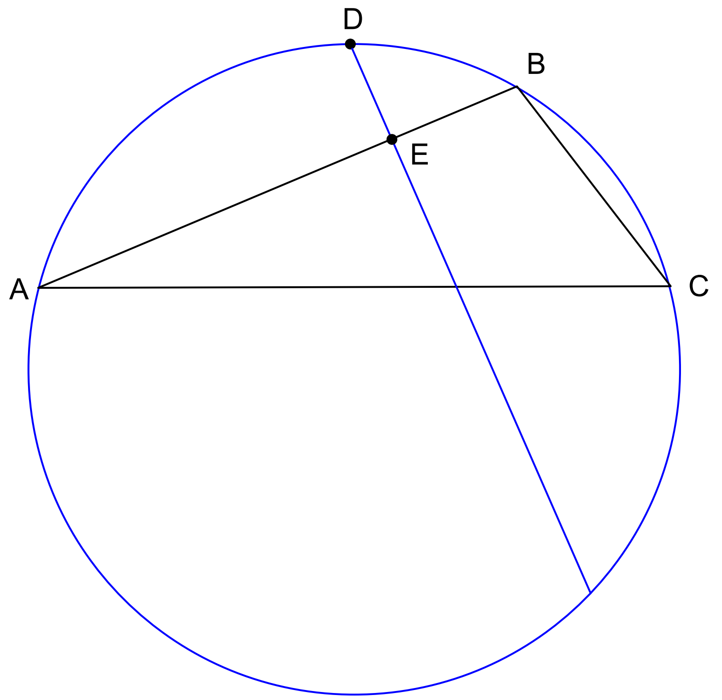

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Lösungsvorschlag

von Rainer Rosenthal, Ürdingen

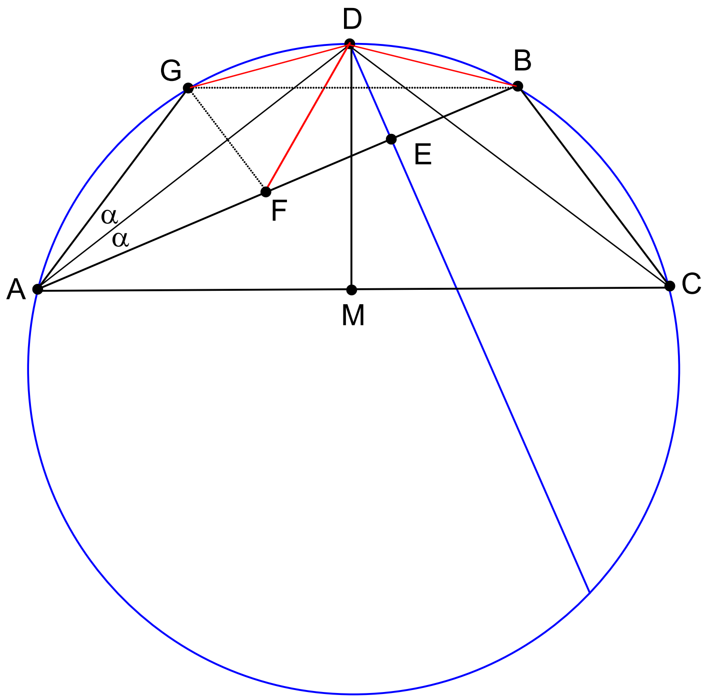

Abbildung 2: Skizze zum Lösungsweg

Wir zeichnen einen Kreis durch die Punkte A, B und C und benennen den Mittelpunkt mit M. Wenn wir B an der Strecke MD spiegeln, erhalten wir den Kreispunkt G. Die Punkte A und C liegen spiegelbildlich zu MD.
Nach dem SATZ VOM PERIPHERIEWINKEL erscheinen die gleichlangen Sehnen GD und DB vom Punkt A aus unter gleichen Winkeln α. Spiegeln wir G also an AD, so liegt der Spiegelpunkt F auf AB.
Der Punkt E halbiert FB, weil $|DF| = |DB|$ ist und E der Fusspunkt des Lots von D auf AB ist.
Und weil Dreieck AFD kongruent ist zu AGD und also auch zu $\triangle CBD$, ist $|AF| = |BC|$. Jetzt brauchen wir nur noch $|AB| + |BC|$ aus den Stuecken zusammenzusetzen und haben wegen $|EF| = |EB|$ und $|AF| = |BC|$ das gewuenschte Resultat:

$$2 \cdot |AE| = |AE| + |EF| + |AF| = |AE| + |EB| + |BC| = |AB| + |BC| \quad (1)$$

d.h.

$$|AE| = \frac{|AB| + |BC|}{2} \quad (2)$$