Der Kreisgel im Zylinder

40. Mathematikolympiade

Magdeburg, 13. - 16. Mai 2000

Einem Zylinder ist ein gerader Kreiskegel so einbeschieben, dass Zylinder und Kegel eine gemeinsame Grundfläche haben. Die Spitze des Kegels berühert die Deckfläche des Zylinders im Mittelpunkt.
Weiterhin sei bekannt, dass von sechs gleichgroßen Kugeln jede den Kegel von außen, die Mantelfläche und Deckfläche des Zylinders und genau zwei andere Kugeln berühert.

Man berechne den Radius der Inkugel des Kegels in Abhängigkeit vom Radius R des Zylinders ! Punktezahl=6

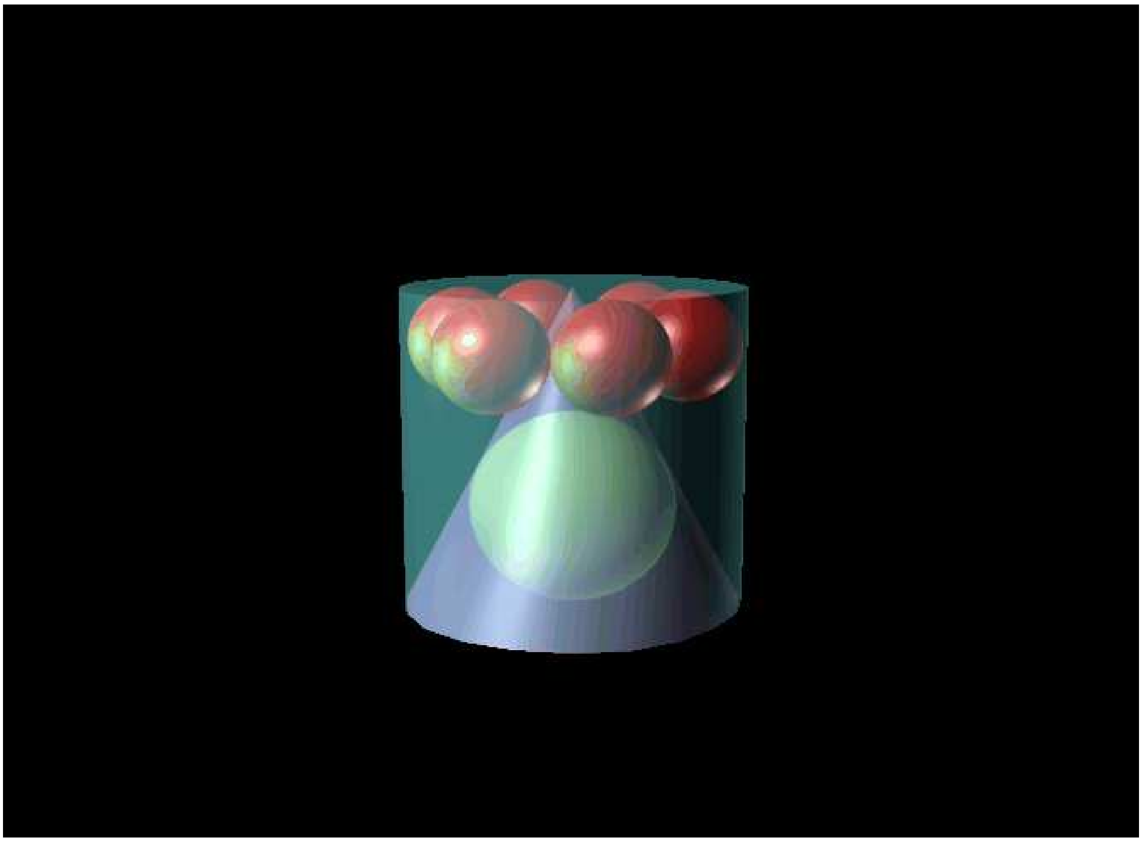

Abbildung 1: 3D-Ansicht vom Kegel im Zylinder mit den 6 Kugeln

Lösungsweg, Teil I

Im ersten Teil der Lösung bestimmen wir das Verhältnis zwischen dem Zylinderradius R und dem Radius der sechs, innen liegenden Kugeln r.

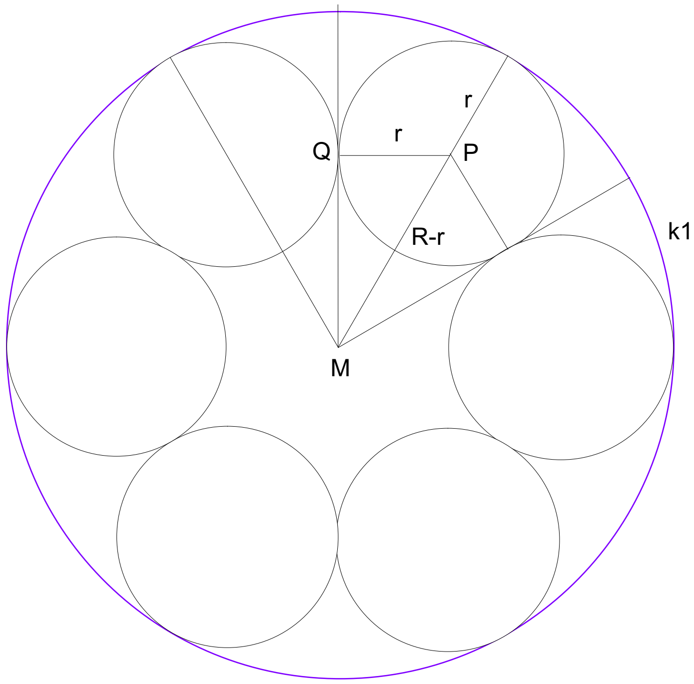

Abbildung 2: Skizze zur Lösung Teil I

Wir beginnen mit der Schnittdarstellung aus Abbildung 2. Der äußere Kreis k_1 ist der Zylindermantel mit dem Radius R. Die Schnittebene teilt die sechs gleich großen Kugeln vom Radius r genau in der Mitte. Der Innenwinkel α zwischen Kugelmittelpunkt und Berüherungspunkt zur nächsten Kugel beträgt :

$$\alpha = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ \tag{1}$$

Die Strecke $\overline{MP}$ ergibt sich aus der Differenz beider Radien zu $\overline{MP} = R - r$. Aus dem rechtwinkligen Dreieck MPQ folgt nun :

$$\sin\alpha = \frac{r}{R-r} \quad \rightarrow \quad r = \frac{R}{3} \tag{2}$$

Der Kugelradius r muß genau ein drittel vom Zylinderradius R betragen, damit sich die Kugeln in der dargestellten Weise untereinander berühern.

Lösungsweg Teil II

Abbildung 3 zeigt jetzt einen senkrechten Schnitt durch die Mitte des Zylinders.

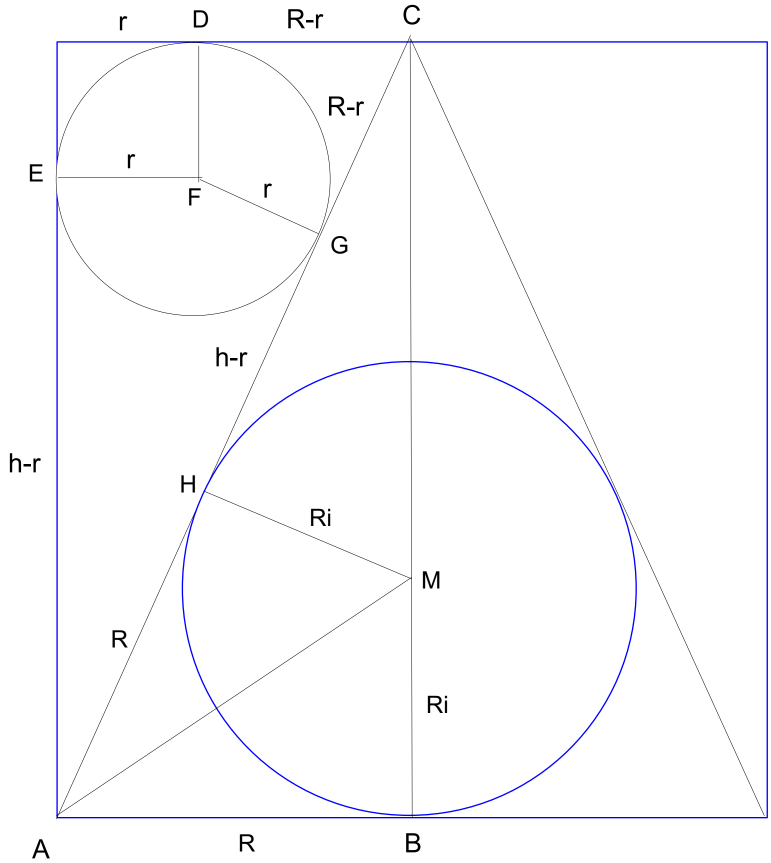

Abbildung 3: Skizze zur Lösung Teil II

Für die gemeinsamen Tangentenabschnitte an den Kreis k_2 gilt :

$$\overline{AE} = \overline{AG} = h - r, \quad \overline{CD} = \overline{CG} = R - r \tag{3}$$

Im rechtwinkligen Dreieck ABC wenden wir den *Satz des Pytagoras* an:

$$\triangle ABC: \quad R^2 + h^2 = (R - r + h - r)^2 = \left(\frac{R}{3} - h\right)^2 \rightarrow h = \frac{4R}{3} \tag{4}$$

Mit h können wir nun den gesuchten Inkreisrdius R_i berechnen. Im Dreieck MCH gilt :

$$\triangle MCH: \quad {R_i}^2 + (h - r + R - r - R)^2 = (h - R_i)^2 \tag{5}$$

Die Höhe ersetzen wir durch $h = 4R/3$ und den Radius $r = R/3$:

$${R_i}^2 + \left(\frac{2R}{3}\right)^2 = \left(\frac{4R}{3} - R_i\right)^2 \quad \rightarrow \quad R_i = \frac{R}{2} \tag{6}$$