Drei Kreise im Dreieck

Eine Rätselaufgabe von Peter G. Nischke, Berlin

27. Januar 2001

Gegeben sei das gleichseitige Dreieck ABC mit der Seitenlänge a. Auf der Höhenlinie h_c liegen zwei Kreise k_1 und k_2 so übereinander, das sie sich in einem Punkt berühern. Der Kreis k_1 tangiert darüberhinaus die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ des gleichseitigen Dreiecks.
Ein dritter Kreis k_3 liegt auf der Verbindungslinie $\overline{MB}$, wobei der Punkt M den Umkreismittelpunkt (=Höhenschnittpunkt im gleichseitigen Dreieck) markiert. Der Kreis k_3 tangiert die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$.

1. Gibt es einen Kreisradius für k_3 so, daß er genau die beiden anderen Kreise in je einem Punkt berühert ?

2. Wenn ja, so berechnen Sie die Kreisradien r_1, r_2 und r_3 in Abhängigkeit von a für diesen Fall !

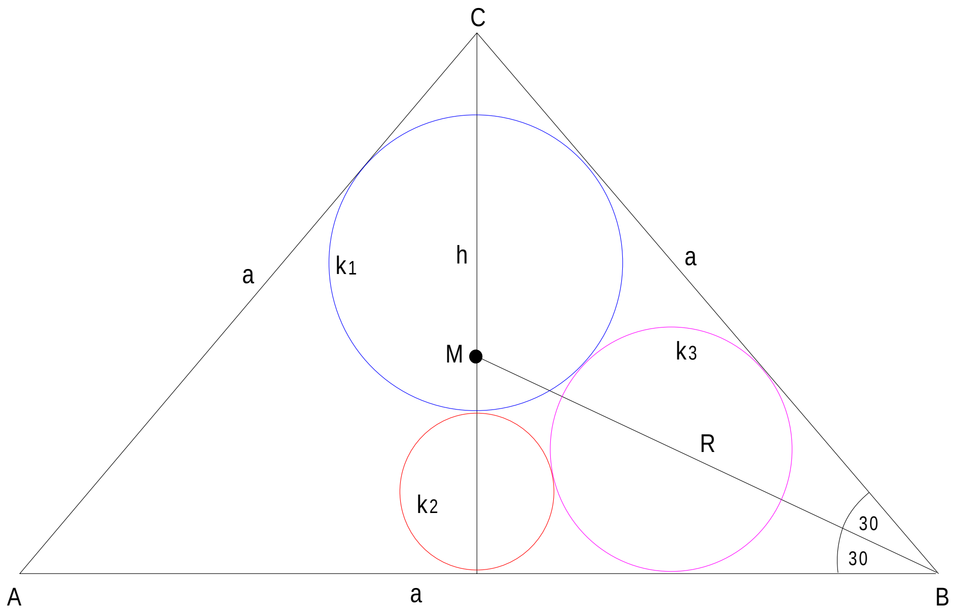

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Punktezahl=8

Lösungsweg I über den Satz des Pythagoras

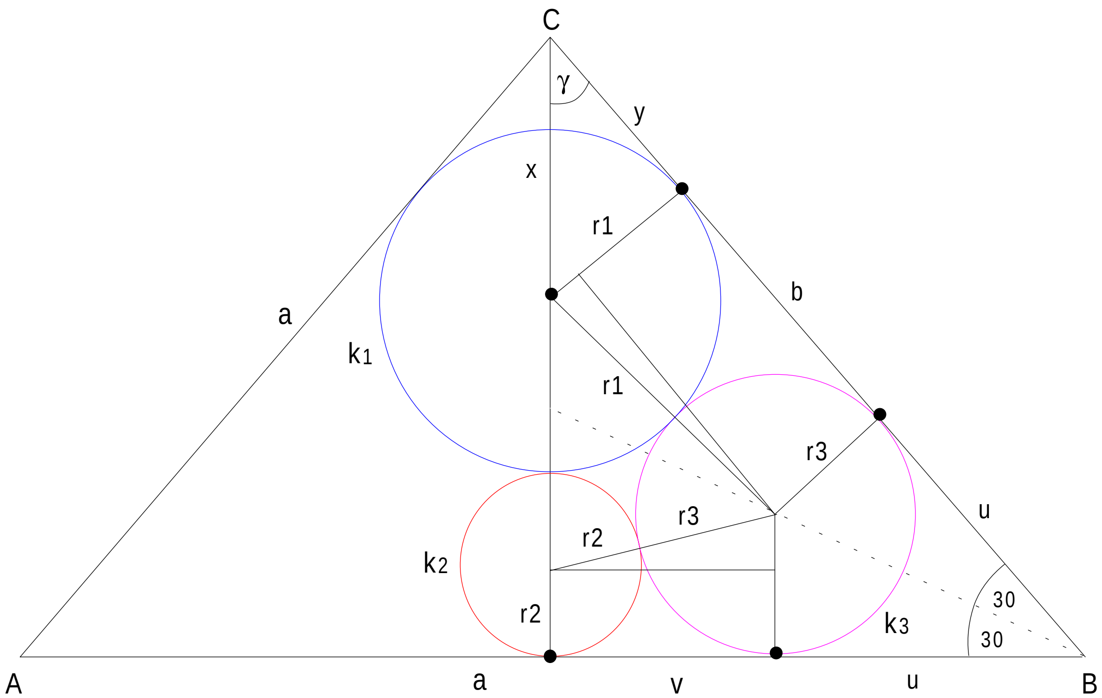

Abbildung 2: Skizze zur Aufgabenstellung

Im ersten Schritt berechnen wir die Strecken x und y am Kreis k_1:

$$\sin(\gamma) = \frac{r_1}{x} \quad \rightarrow \quad x = 2 \cdot r_1 \tag{1}$$

$$\tan(\gamma) = \frac{r_1}{y} \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{3} \cdot r_1 \tag{2}$$

Betrachten wir nun die Höhe h im gleichseitigen Dreieck. Nachdem die Strecke x bekannt ist können wir eine Gleichung zwischen den Radien r_1, r_2 und h notieren:

$$gl1: \qquad h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = x + r_1 + 2r_2 = 3r_1 + 2r_2 \tag{3}$$

Ähnlich können die Teilstrecken u, v auf der Seite $\overline{AB}$ berechnet werden.

$$\tan(\beta) = \frac{r_3}{u} \quad \rightarrow \quad u = \sqrt{3} \cdot r_3 \tag{4}$$

$$u + v = \frac{a}{2} \quad \rightarrow \quad v = \frac{a}{2} - \sqrt{3} \cdot r_3 \tag{5}$$

Schließlich folgt für die Teilstrecke b auf der Seite $\overline{BC}$:

$$b = a - u - y = a - \sqrt{3} \cdot r_3 - \sqrt{3} \cdot r_1 \tag{6}$$

Nun fällen wir das Lot vom Mittelpunkt des Kreises k_3 auf den jeweils gegenüberliegenden Radius r_2 bzw. r_3. Mit dem Satz des Pythagoras folgt :

$$gl2: \qquad b^2 + (r_1 - r_3)^2 = (r_1 + r_3)^2 \tag{7}$$

$$gl3: \qquad v^2 + (r_3 - r_2)^2 = (r_2 + r_3)^2 \tag{8}$$

Die Größen b, v werden durch Gleichung (5) und (6) ersetzt. Mit der Beziehung (3) haben wir eine dritte unabhängige Beziehung zwischen den gesuchten Kreisradien. Mit Hilfe eines Computeralgbraprogramms wie *Mathematica* lösen wir die Gleichungen (3), (7) und (8) nach den Radien auf:

$$\text{FullSimplify}[\text{Solve}[\{gl1, gl2, gl3\}, \{r_1, r_2, r_3\}]]$$

$$\begin{aligned}
\{\{r_2 &\to -\tfrac{1}{44}\Big(-20 + 7\sqrt{3} + \sqrt{-113 + 72\sqrt{3}}\Big)a,\\
r_1 &\to \tfrac{1}{66}\Big(-20 + 18\sqrt{3} + \sqrt{-113 + 72\sqrt{3}}\Big)a,\\
r_3 &\to \tfrac{1}{66}\left(18 + 8\sqrt{3} - 3\sqrt{\tfrac{73}{3} + \tfrac{52}{\sqrt{3}}}\right)a\},\\
\{r_2 &\to -\tfrac{1}{44}\Big(-20 + 7\sqrt{3} - \sqrt{-113 + 72\sqrt{3}}\Big)a,\\
r_1 &\to \tfrac{1}{66}\Big(-20 + 18\sqrt{3} - \sqrt{-113 + 72\sqrt{3}}\Big)a,\\
r_3 &\to \tfrac{1}{66}\left(18 + 8\sqrt{3} + 3\sqrt{\tfrac{73}{3} + \tfrac{52}{\sqrt{3}}}\right)a\},\\
\{r_2 &\to \tfrac{1}{44}\left(-(20 + 7\sqrt{3})a - (1 + 2\sqrt{3})\sqrt{(-5 - 4\sqrt{3})a^2}\right),\\
r_1 &\to \tfrac{1}{66}\left((20 + 18\sqrt{3})a + (1 + 2\sqrt{3})\sqrt{(-5 - 4\sqrt{3})a^2}\right),\\
r_3 &\to \tfrac{a^2}{-4a - 2\sqrt{-5a^2 - 4\sqrt{3}a^2}}\},\\
\{r_2 &\to \tfrac{1}{44}\left(-(20 + 7\sqrt{3})a + (1 + 2\sqrt{3})\sqrt{(-5 - 4\sqrt{3})a^2}\right),\\
r_1 &\to \tfrac{1}{66}\left((20 + 18\sqrt{3})a - (1 + 2\sqrt{3})\sqrt{(-5 - 4\sqrt{3})a^2}\right),\\
r_3 &\to \tfrac{a^2}{-4a + 2\sqrt{5 + 4\sqrt{3}}\sqrt{-a^2}}\}\}
\end{aligned}$$

Aus der Lösungsmenge ist für uns das Tripel von Interesse, welches für $a > 0$ drei positive Werte für r_1, r_2 und r_3 liefert.

$$r_1 = \frac{a}{66}\left(-20 + 18\sqrt{3} + \sqrt{-113 + 72\sqrt{3}}\right) \tag{9}$$

$$r_2 = -\frac{a}{44}\left(-20 + 7\sqrt{3} + \sqrt{-113 + 72\sqrt{3}}\right) \tag{10}$$

$$r_3 = \frac{a}{66}\left(18 + 8\sqrt{3} - 3\sqrt{\frac{73}{3} + \frac{52}{\sqrt{3}}}\right) \tag{11}$$

Das Verhältnis der Radien r_1 zu r_2 beträgt:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{6} \cdot \left(1 + 4\sqrt{3} + \sqrt{13 + 8\sqrt{3}}\right) \tag{12}$$

Um das Ergebnis praktisch zu überprüfen sei $a = 10\,cm$ vorgegeben:

$$r_1 = 2.2119\,cm, \qquad r_2 = 1.01227\,cm, \qquad r_3 = 1.47554\,cm \tag{13}$$

Lösungsweg II, Satz von Stewart

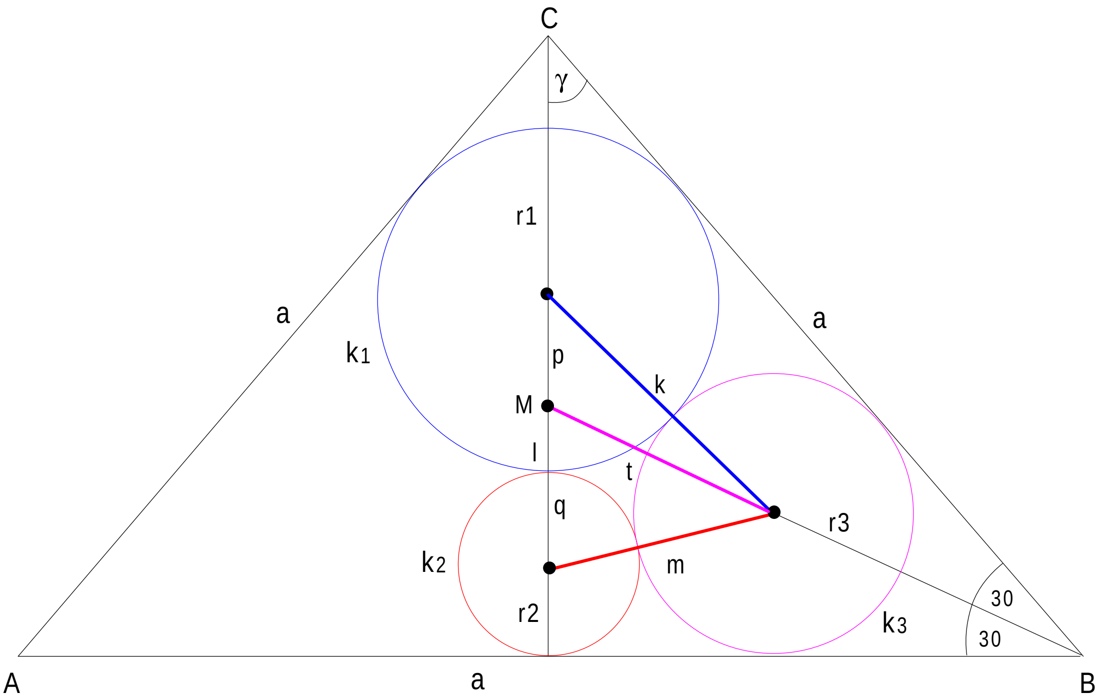

Abbildung 3: Skizze zum Satz von Stewart

Die Seitenlängen k, l, m entsprechen der jeweiligen Summe aus zwei Radien.

$$k = r_1 + r_3, \qquad l = r_1 + r_2, \qquad m = r_2 + r_3 \tag{14}$$

Die Strecke l wird vom Umkreismittelpunkt M in die Teilstrecken p und q geteilt.

$$p = R - 2 \cdot r_1, \qquad q = l - p = 3 \cdot r_1 + r_2 - R, \qquad R = \frac{a}{\sqrt{3}} \tag{15}$$

Die Strecke zwischen dem Mittelpunkt von k_3 und Umkreismittelpunkt M bezeichen wir mit t:

$$t = R - 2 \cdot r_3 \tag{16}$$

Es kann jetzt der *Satz von Stewart* zur Anwendung kommen. Mit ihm berechnet man die Länge der Transversalen t, welche die gegenüberliegende Dreiecksseite im Verhältnis $p \div q$ teilt.

$$l \cdot (t^2 + p \cdot q) = p \cdot m^2 + q \cdot k^2 \tag{17}$$

Nach dem Ersetzen der Größen durch ihre oben abgeleiteten Darstellung erhalten wir:

$$gl_4 : \; 3(2R - 3r_1)r_1(r_1 + r_2) - 2(r_1(3r_1 - r_2) + R(r_1 + 3r_2))r_3 + 3(r_1 + r_2){r_3}^2 = 0 \tag{18}$$

Als weitere Beziehung nutzen wir die Gleichungen gl_1 und gl_3 aus dem vorherigen Kapitel:

$$gl_1: \qquad \frac{a\sqrt{3}}{2} = 3r_1 + 2r_2 \tag{19}$$

$$gl_3 = (-r_2 + r_3)^2 + (\frac{a}{2} - \sqrt{3}r_3)^2 = (r_2 + r_3)^2 \tag{20}$$

Die Lösungsmenge der Gleichungen gl_1, gl_3 und gl_4 präsentiert sich in *Mathematica* wie folgt :

$$\begin{aligned}
&\{\{r2 \to \tfrac{a}{2\sqrt{3}}, r3 \to \tfrac{a}{6\sqrt{3}}, r1 \to \tfrac{a}{6\sqrt{3}}\},\\
&\{r2 \to \tfrac{a}{2\sqrt{3}}, r3 \to \tfrac{\sqrt{3}a}{2}, r1 \to \tfrac{a}{6\sqrt{3}}\},\\
&\{r2 \to -\tfrac{1}{44}\Big(-20 + 7\sqrt{3} + \sqrt{-113 + 72\sqrt{3}}\Big)a,\\
&\quad r3 \to \tfrac{1}{66}\left(18 + 8\sqrt{3} - 3\sqrt{\tfrac{73}{3} + \tfrac{52}{\sqrt{3}}}\right)a,\\
&\quad r1 \to \tfrac{1}{66}\Big(-20 + 18\sqrt{3} + \sqrt{-113 + 72\sqrt{3}}\Big)a\},\\
&\{r2 \to -\tfrac{1}{44}\Big(-20 + 7\sqrt{3} - \sqrt{-113 + 72\sqrt{3}}\Big)a,\\
&\quad r3 \to \tfrac{1}{66}\left(18 + 8\sqrt{3} + 3\sqrt{\tfrac{73}{3} + \tfrac{52}{\sqrt{3}}}\right)a,\\
&\quad r1 \to \tfrac{1}{66}\Big(-20 + 18\sqrt{3} - \sqrt{-113 + 72\sqrt{3}}\Big)a\},\\
&\{r2 \to \frac{3a^2}{\left(-12+5\sqrt{3}\right)a+\sqrt{3}\sqrt{\left(13-8\sqrt{3}\right)a^2}},\\
&\quad r3 \to \frac{1}{-\frac{4}{a}-\frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{\left(13-8\sqrt{3}\right)a}}{a^{3/2}}},\\
&\quad r1 \to \frac{9a^2}{4\left(-6+5\sqrt{3}\right)a-2\sqrt{3}\sqrt{\left(13-8\sqrt{3}\right)a^2}}\},\\
&\{r2 \to \frac{3a^2}{\left(-12+5\sqrt{3}\right)a-\sqrt{3}\sqrt{\left(13-8\sqrt{3}\right)a^2}},\\
&\quad r3 \to \frac{1}{-\frac{4}{a}+\frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{\left(13-8\sqrt{3}\right)a}}{a^{3/2}}},\\
&\quad r1 \to \tfrac{1}{66}\left((20 + 18\sqrt{3})a - (8 + 5\sqrt{3})\sqrt{(13 - 8\sqrt{3})a^2}\right)\}\}
\end{aligned}$$

Alle Lösungen, die den Term $\sqrt{(13 - 8\sqrt{3})a^2}$ bzw. $\sqrt{(13 - 8\sqrt{3})a}$ enthalten sind imaginär und entfallen für die Aufgabenstellung.

Untersuchen wir nun die (vermeintliche) Lösung

$$r_1 = \frac{a}{6\sqrt{3}}, \quad r_2 = \frac{a}{2\sqrt{3}}, \quad r_3 = \frac{a}{6\sqrt{3}} \tag{21}$$

Der Mittelpunkt von r_2 fällt mit dem Höhenschnittpunkt M zusammen. Im gleichschenkligen Dreieck ist das identisch mit dem Innkreismittelpunkt. Die Radien r_1 und r_3 sind gleich groß. Wir erhalten das Bild 4. Im Sinne der Aufgabenstellung muß diese Lösung entfallen, da k_3 nur den Kreis k_2 berühert.

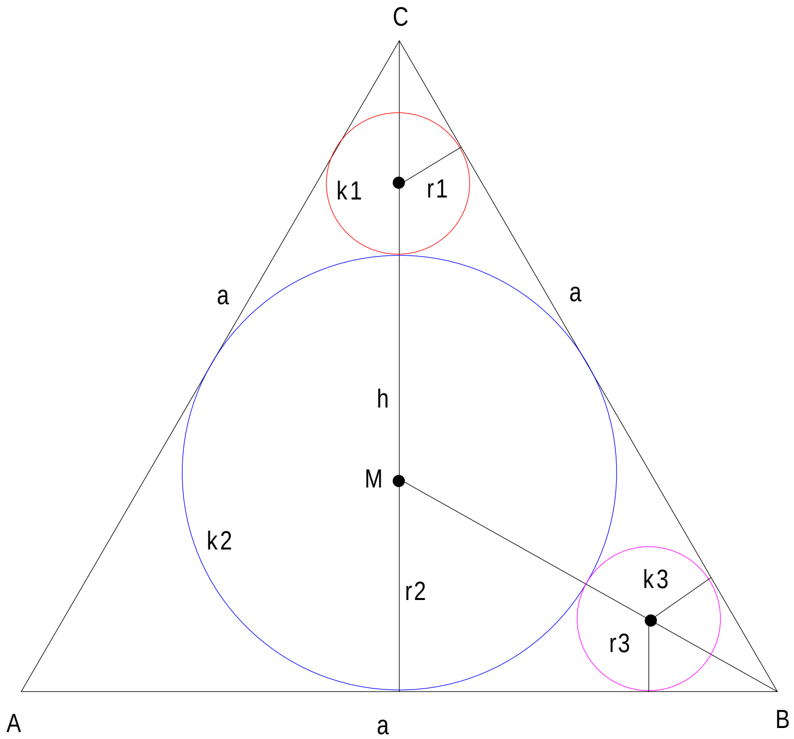

Abbildung 4: Zweite *Lösung* beim Satz von Stewart

Der andere Lösungsanteil ist mit dem aus Lösungsweg 1 identisch.

$$r_1 = \frac{a}{66}\left(-20 + 18\sqrt{3} + \sqrt{-113 + 72\sqrt{3}}\right) \tag{22}$$

$$r_2 = -\frac{a}{44}\left(-20 + 7\sqrt{3} + \sqrt{-113 + 72\sqrt{3}}\right) \tag{23}$$

$$r_3 = \frac{a}{66}\left(18 + 8\sqrt{3} - 3\sqrt{\frac{73}{3} + \frac{52}{\sqrt{3}}}\right) \tag{24}$$