Dreiecksrätsel III

aus Mathe-Treff

18. November 2001

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Seiten $b = \overline{AC} = 7\,cm$, $a = \overline{BC} = 8\,cm$ und dem Winkel $\gamma = \sphericalangle BCA = 60°$. Die Seitenhalbierende von a schneide die Strecke $\overline{BC}$ im Punkt D. Die Winkelhalbierende von γ schneide die Seite $s = \overline{AD}$ in F.

Berechne die Strecke $e = \overline{CF}$ als Lösung einer Polynomgleichung (algebraische Zahl) !

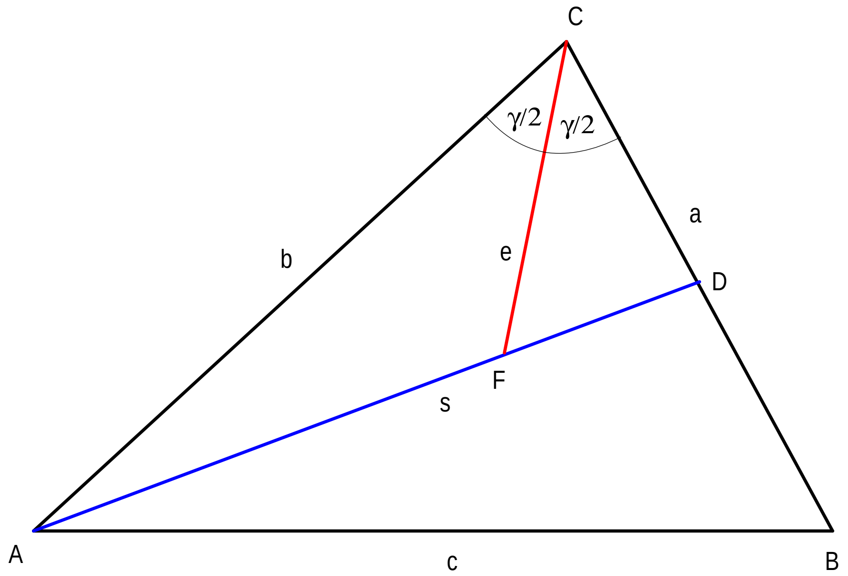

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Punktezahl=6

Lösungsweg I von Peter G.Nischke, Berlin

Wir verlängern Seite $\overline{AC}$ um $1\,cm$ über A hinaus und erhalten das gleichseitige Dreieck EBC mit der Seitenlänge $a = 8\,cm$ (Abbildung 2).

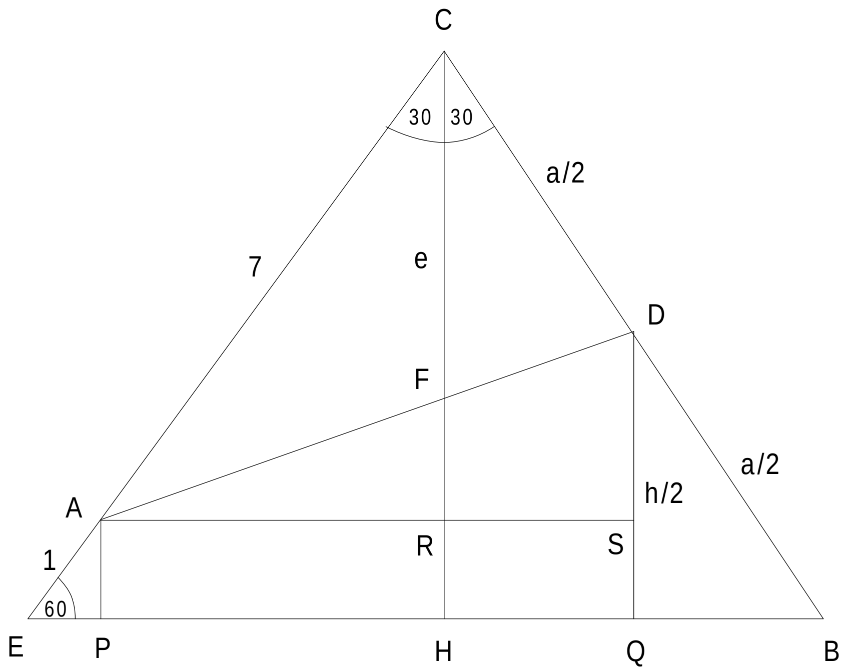

Abbildung 2: Skizze zum Lösungsweg I

Von Punkt A fällen wir das Lot auf Seite $\overline{EB}$ und benennen den Fußpunkt mit P. Vom Punkt D fällen wir das Lot auf Seite $\overline{EB}$ und bezeichnen den Fußpunkt mit Q. Die Seite $\overline{CF}$ wird bis zur Grundseite EB verlängert, so das wir die Höhe $h = \overline{CH}$ erhalten. Vom Punkt A zeichnen wir die Parallele zur Grundseite EB ein. Die Schnittpunkte der Parallelen mit $\overline{CH}$ und $\overline{DQ}$ seien mit R und S gekennzeichnet. Im gleichseitigen Dreick betragen alle drei Innenwinkel 60°. Es gilt offensichtlich:

$$\overline{EA} = 1, \qquad \overline{EP} = 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \overline{AP} = 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \overline{DQ} = \frac{h}{2} \tag{1}$$

Für die Strecken im Dreieck ASD folgt :

$$\overline{AR} = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}, \quad \overline{AS} = \frac{3\,a}{4} - \frac{1}{2}, \qquad \overline{DS} = \frac{h}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \overline{FR} = h - e - \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{2}$$

Aus dem Strahlensatz im $\triangle ASD$ läßt sich die Verhältnisgleichung (3) ableiten :

$$\frac{\overline{FR}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{DS}} \qquad \rightarrow \qquad \frac{h - e - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3\,a}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{h}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}} \tag{3}$$

Diese Gleichung wird nach der gesuchten Seite e aufgelöst:

$$e = -\frac{8\,h - 15\,a\,h}{8\,(-2 + 3\,a)} \tag{4}$$

Die Höhe h wird mit der bekannten Formel für das gleichseitige Dreieck ersetzt :

$$h = \frac{a\,\sqrt{3}}{2} = 4\,\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad e = -\frac{4\,\sqrt{3}\,a - \frac{15\,\sqrt{3}\,a^2}{2}}{8\,(-2 + 3\,a)} = \frac{28\,\sqrt{3}}{11} \tag{5}$$

Lösungsweg II von Steffen Mehlhos, Neustadt/Orla

Der kürzeste Lösungsweg führt über die Äquivalenz der Flächeninhalte.

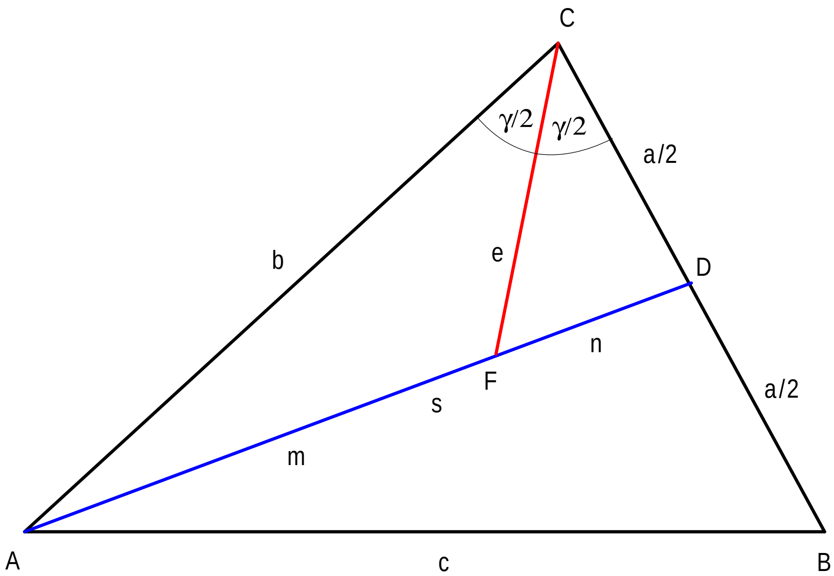

Abbildung 3: Skizze zum Lösungsweg II

In Abbildung 3 gilt für die Flächeninhalte der Dreiecke :

$$\triangle ADC = \triangle AFC + \triangle FDC \tag{6}$$

$$\frac{a\,b}{4}\,\sin\gamma = \frac{b\,e}{2}\,\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \frac{a\,e}{4}\,\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \tag{7}$$

Mit den Werten aus der Aufgabenstellung $a = 8$, $b = 7$ und $\gamma = 60°$ ergibt sich :

$$\frac{8 \cdot 7}{4}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7 \cdot e}{4} + \frac{8 \cdot e}{8} \quad \rightarrow \quad e = \frac{56 \cdot \sqrt{3}}{22} = \frac{28 \cdot \sqrt{3}}{11} \tag{8}$$

Lösungsweg III von Ingmar Rubin, Berlin

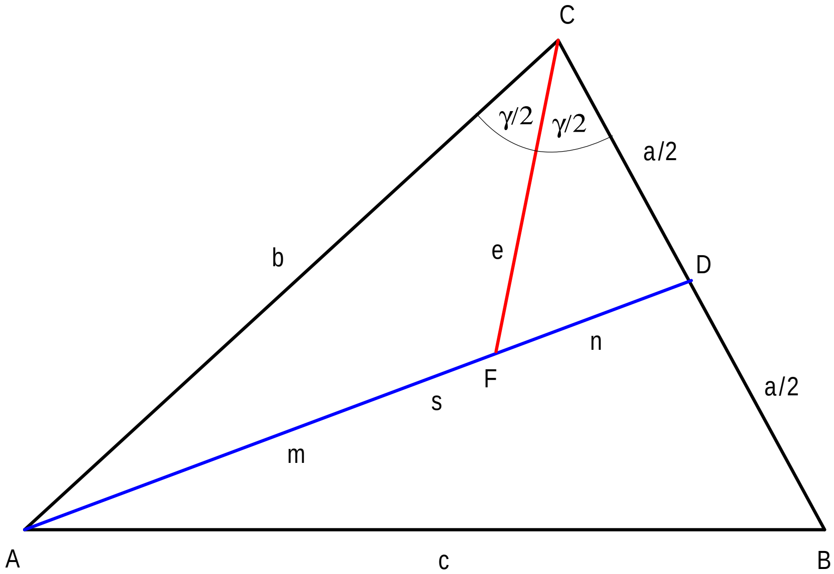

Abbildung 4: Skizze zum Lösungsweg II

Die Seitenhalbierende $s = \overline{AD}$ kann unmittelbar aus dem Cosinussatz im Dreieck ADC berechnet werden:

$$\triangle ADC : \quad s^2 = \frac{a^2}{4} + b^2 - a\,b\,\cos(60^\circ) = \frac{a^2}{4} + b^2 - \frac{a\,b}{2} \tag{9}$$

Die Winkelhalbierende von γ zerlegt s in die Streckenabschnitte m und n. Das Verhältnis $m \div n$ folgt aus dem :

Satz des Apollonius: *Die Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Dreicksseite im Verhältnis der anliegenden Seiten.*

$$\frac{b}{m} = \frac{a}{2n}, \qquad s = m + n \tag{10}$$

Die Länge der Winkelhalbierenden im Dreieck ADC ist mit den anliegenden Seiten über den *Satz von Stewart* miteinander verknüpft :

$$s\,(e^2 + m\,n) = \frac{a^2}{4}\,m + b^2\,n \tag{11}$$

Die Gleichungen (9) bis (11) werden mit Hilfe eines Computeralgebrasystems aufgelöst. In *Mathematica* erhalten wir:

$$e = \frac{\sqrt{3}\,a\,b}{a + 2\,b} = \frac{\sqrt{3}\,28}{11}, \qquad s = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 2ab + 4b^2} = \sqrt{37} \tag{12}$$

$$m = \frac{b\sqrt{a^2 - 2ab + 4b^2}}{a + 2b} = \frac{7\,\sqrt{37}}{11}, \qquad n = \frac{a\sqrt{a^2 - 2ab + 4b^2}}{2a + 4b} = \frac{4\,\sqrt{37}}{11} \tag{13}$$