Dreiecksrätsel II

Vorgelegt sei das schiefwinkliege Dreieck ABC. Die zwei eingezeichneten Diagonalen teilen das Dreieck in vier Flächen auf, von denen Drei gegeben sind.

Berechnen Sie aus den Angaben den Flächeninhalt von X !

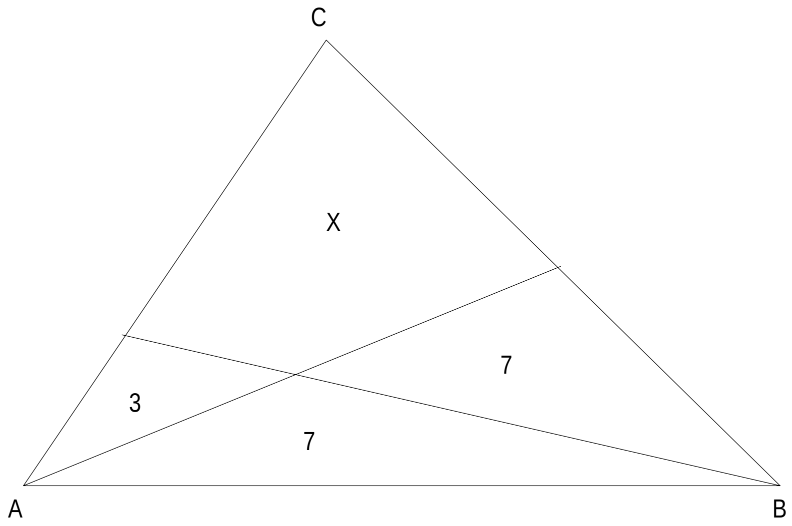

Abbildung 1: Bild zur Aufgabenstellung

Punktezahl=5

Die Lösung

Wir erweitern die Skizze aus Abbildung 1 um einige Winkel- und Streckenbezeichner.

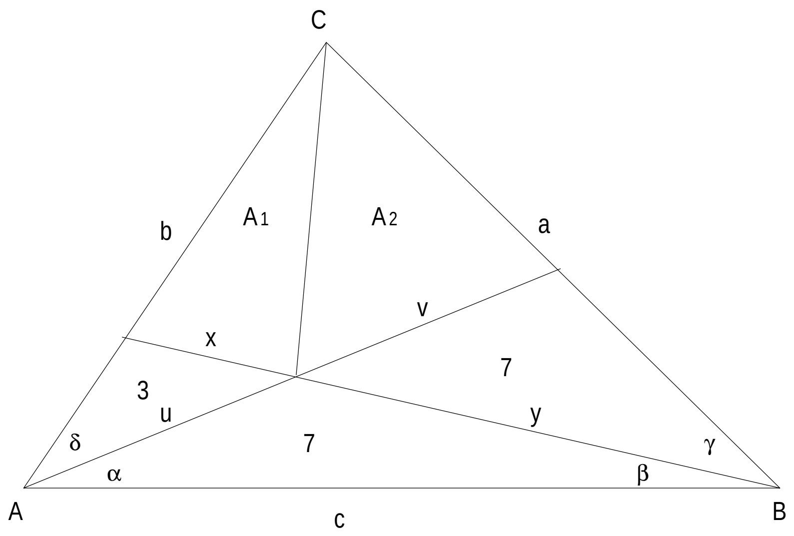

Abbildung 2: Lösungsskizze

Aus den drei gegebenen Teilflächen lassen sich Beziehungen zwischen den Strecken u, v und x, y ableiten:

$$\frac{\sin(\alpha)}{2} \cdot c \cdot u = 7, \quad \frac{\sin(\alpha)}{2} \cdot c \cdot (u+v) = 7+7 \quad \rightarrow \quad u = v \tag{1}$$

$$\frac{\sin(\beta)}{2} \cdot c \cdot y = 7, \quad \frac{\sin(\beta)}{2} \cdot c \cdot (x+y) = 7+3 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3}{7} \cdot y \tag{2}$$

Analog kann für die beiden gesuchten Flächeninhalte A_1 und A_2 notiert werden:

$$\frac{\sin(\gamma)}{2} \cdot a \cdot y = 7 + A_2, \quad \frac{\sin(\gamma)}{2} \cdot a \cdot (x+y) = 7 + A_1 + A_2 \tag{3}$$

$$\frac{\sin(\delta)}{2} \cdot b \cdot u = 3 + A_1, \quad \frac{\sin(\delta)}{2} \cdot b \cdot (u+v) = 3 + A_1 + A_2 \tag{4}$$

Die Gleichungen (1) bis (4) können nach A_1 und A_2 aufgelöst werden. Als Lösung folgt:

$$A_1 = \frac{15}{2}, \quad A_2 = \frac{21}{2}, \qquad X = A_1 + A_2 = 18 \tag{5}$$