Dreiecksrätsel I

aus *Nutts and other Crackers*

von Dr. Karl Scherer

Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck. Dem Dreieck sind drei Seiten mit bekannter Länge einbeschrieben. Bestimme die Seitenlänge a des Dreiecks!

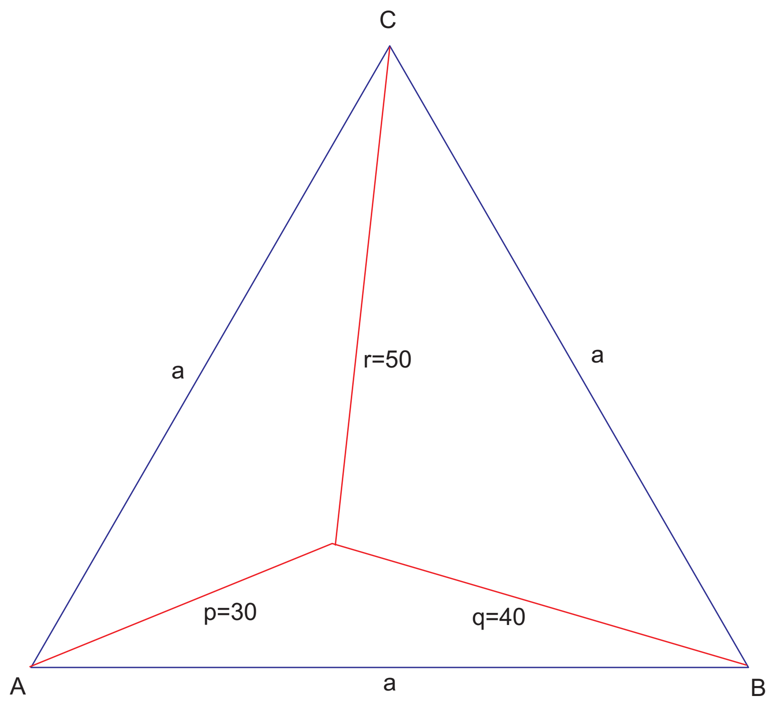

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Lösungsweg I: Heronische Flächenformel

Als Lösungsidee benutzen wir das Flächenäquivalent der drei Teildreicke zum Gesamtdreieck. Im gleichseitigen Dreick beträgt der Flächeninhalt:

$$A = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \tag{1}$$

Den Flächeninhalt der Teildrecke bestimmen wir mit der Heronischen Flächenformel:

$$A_1 = \sqrt{s_1(s_1-40)(s_1-50)(s_1-a)} \quad s_1 = \frac{a+40+50}{2} \tag{2}$$

$$A_1 = \sqrt{-50625 + \frac{1025a^2}{2} - \frac{a^4}{16}} \tag{3}$$

$$A_2 = \sqrt{s_2(s_2-30)(s_2-50)(s_2-a)} \quad s_2 = \frac{a+30+50}{2} \tag{4}$$

$$A_2 = \sqrt{-160000 + 425a^2 - \frac{a^4}{16}} \tag{5}$$

$$A_3 = \sqrt{s_3(s_3-40)(s_3-30)(s_3-a)} \quad s_3 = \frac{a+40+30}{2} \tag{6}$$

$$A_3 = \sqrt{-30625 + \frac{625a^2}{2} - \frac{a^4}{16}} \tag{7}$$

Wir vergleichen die Summe der Teilflächeninhalte A_1, A_2, A_3 mit der vom Gesamtdreick:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \tag{8}$$

und lösen die Gleichung nach a auf. In *Mathematica* erhalten wir als Lösungsmenge:

$$\left\{\left\{a \to -10\sqrt{25+12\sqrt{3}}\right\}, \left\{a \to 10\sqrt{25+12\sqrt{3}}\right\}\right\} \tag{9}$$

Die Seitenlänge des Dreiecks beträgt damit

$$a = 10 \cdot \sqrt{25+12\sqrt{3}} \approx 67.6643 \tag{10}$$

Lösungsweg II: Formel von Tartaglia

Abbildung 2: Niccolo Fontana Tartaglia

Der italienische Mathematiker *Niccolo Fontana Tartaglia* ($\star$ 1499 in Brescia, Italien; † 13. Dezember 1557 in Venedig) erlangte mit seiner Lösungsformel für kubische Gleichungen große Aufmerksamkeit. Tartaglia beschäftigte sich viel mit Geometrie und gab seinen Schülern Vorlesungen zu den *Elementen* des Euklid. Er entwickelte eine Formel zu Berechnung des Volumens einer dreieckigen Pyramide (Tetraeder).

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{12}\sqrt{a^2p^2(b^2+c^2-a^2-q^2+r^2-p^2)+b^2q^2(c^2+a^2-b^2+r^2-p^2-q^2)} \\ &+ \sqrt{c^2r^2(a^2+b^2-c^2+p^2+q^2-r^2)-a^2q^2r^2-b^2r^2p^2-c^2p^2q^2-a^2b^2c^2} \end{aligned}$$

Die Buchstaben a, b, c stehen für die Grundseiten der Pyramide und p, q, r bezeichnen die Seitenlinien der Pyramide. Wir können Abbildung 3 als Draufsicht auf eine solche Pyramide auffassen. Die Seiten p, q, r sind in der Aufgabenstellung gegeben. Die Grundfläche bildet ein gleichseitiges Dreick und es muß $a = b = c$

gelten. Unsere Pyramide hat die Höhe Null, d.h. als weitere Bedingung gilt $V = 0$. Es ergibt sich die folgende Bestimmungsgleichung für a:

$$0 = a^4p^2 + a^2p^2r^2 - a^2p^4 + a^4q^2 + a^2p^2q^2 - a^2q^4 + a^4r^2 + a^2r^2q^2 - a^2r^4 - a^6$$

Mit $a > 0$ kann das Polynom durch a^2 geteilt werden:

$$0 = a^2p^2 + p^2r^2 - p^4 + a^2q^2 + p^2q^2 - q^4 + a^2r^2 + r^2q^2 - r^4 - a^4$$

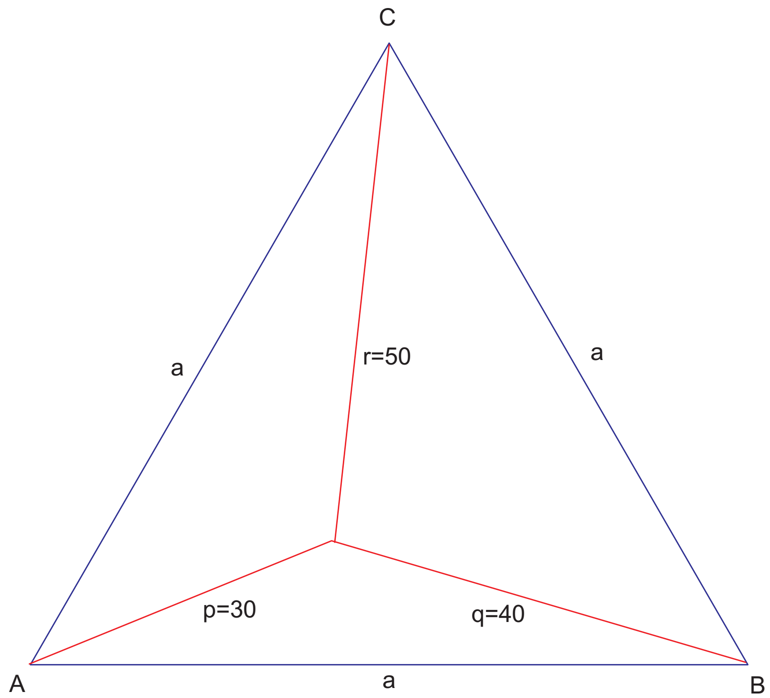

Abbildung 3: Draufsicht auf die Pyramide mit $h = 0$

Nach dem Einsetzen der numerischen Werte für p, q und r folgt als positive, reelle Lösung $a = 10\sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$