Aufgaben rund um den Arbelos

von Jutta Gut, Wien

30. Juli 2005

Ich möchte hier ein paar historische Geometrieprobleme vorstellen. Für den Anfang was Leichtes: der *Arbelos* von Archimedes.

Die Strecke AB wird durch den Punkt C in zwei ungleiche Teile geteilt. Wir zeichnen nach derselben Seite den Halbkreise über AB, AC und BC. Die Fläche zwischen den Halbkreisen nennt Archimedes *Arbelos* (Schustermesser). Wir zeichnen noch in C die Normale auf AB; sie schneidet den Kreisumfang in D.

1. Zeige, dass die Fläche des Arbelos genauso groß ist, wie die Fläche des Kreises mit Durchmesser CD.

2. CD teilt den Arbelos in zwei Teile. Die Kreise, die man diesen beiden Teilen einschreiben kann, sind gleich groß.

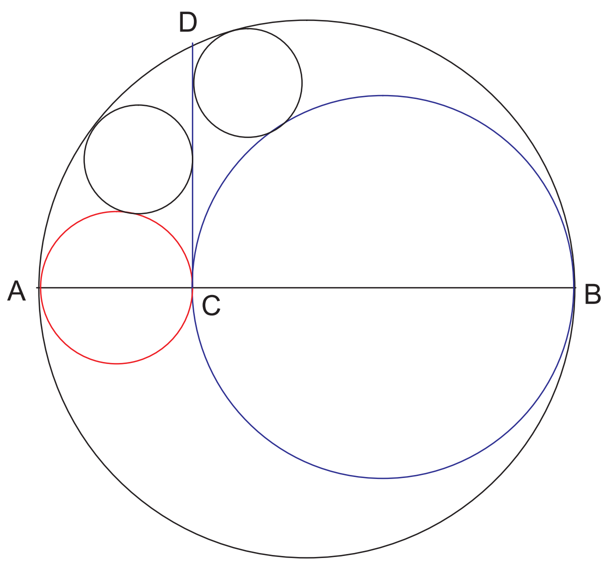

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Lösungsvorschlag zum Aufgabenteil a)

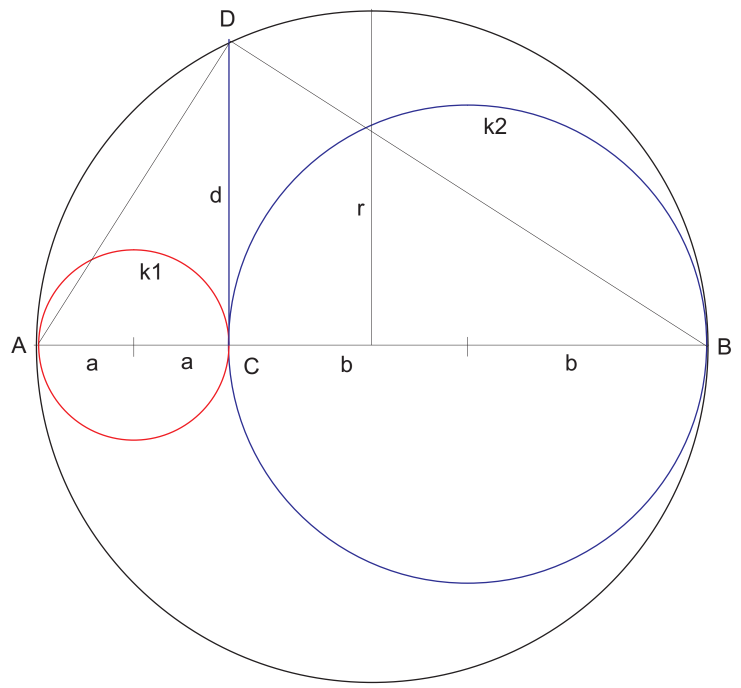

Abbildung 2: Skizze zum Lösungsweg Teil a

Die Fläche vom Arbelos berechnet sich aus der Differenz der Halbkreisflächen:

$$A = \frac{\pi\, r^2}{2} - \frac{\pi\, a^2}{2} - \frac{\pi\, b^2}{2} \tag{1}$$

Für den Durchmesser $CD = 2\, r$ gilt:

$$2\, r = 2\, a + 2\, b \quad \rightarrow \quad r = a + b \tag{2}$$

Das Ergebnis setzen wir in (1) ein und erhalten:

$$A = \frac{\pi\, (a+b)^2}{2} - \frac{\pi\, a^2}{2} - \frac{\pi\, b^2}{2} = \pi\, a\, b \tag{3}$$

Das Dreieck ADB liegt über dem Durchmesser und ist nach dem Satz Thales rechtwinklig. Für seine Höhe $d = CD$ gilt der *Höhensatz*:

$$d^2 = 4\, a\, b \tag{4}$$

Die Kreisfläche beträgt damit:

$$K = \frac{\pi\, d^2}{4} = \pi\, a\, b \tag{5}$$

Der Vergleich von (3) und (5) zeigt, dass die Fläche vom Arbelos tatsächlich identisch ist mit dem Kreis über CD.

Lösungsvorschlag zum Aufgabenteil b)

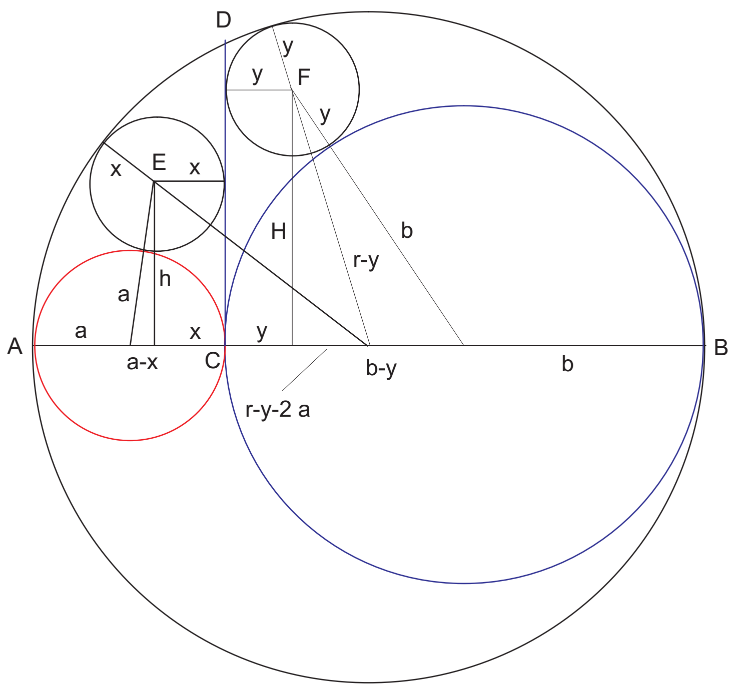

Abbildung 3: Skizze zum Lösungsweg Teil b

Aus den Berüherungsdreiecken zwischen den Kreisen folgen die Gleichungen

$$(a+x)^2 = h^2 + (a-x)^2 \quad \rightarrow \quad 4\,a\,x = h^2 \tag{6}$$

$$(r-x)^2 = h^2 + (x+r-2\,a)^2 \tag{7}$$

Die Auflösung nach x, h ergibt:

$$x = \frac{a\,r - a^2}{r}, \qquad h = \frac{2\sqrt{a^2\,r - a^3}}{\sqrt{r}} \tag{8}$$

Für den zweiten Kreis mit Radius y erhalten wir die Gleichungen:

$$(b+y)^2 = H^2 + (b-y)^2 \quad \rightarrow \quad 4\,b\,y = H^2 \tag{9}$$

$$(r-y)^2 = H^2 + (r-y-2\,a)^2 \tag{10}$$

Die Auflösung nach y, H ergibt:

$$y = \frac{a\,r - a^2}{a+b} = \frac{a\,r - a^2}{r}, \qquad H = \frac{2\sqrt{a\,b\,r - a^2\,b}}{\sqrt{a+b}} \tag{11}$$

Der Vergleich von (8) mit (11) zeigt, dass die Radien x und y identisch sind.