Kreis und Würfel

aus *Jagt auf Zahlen und Figuren*

Oktober 2005

Gegeben ist ein Würfel der Kantenlänge $2\,a$. Einer Seitenfläche ist der Kreis k_1 umbeschrieben, einer benachbarten Seitenfläche ist der Kreis k_2 einbeschrieben (Abbildung 1). Je ein Punkt bewegt sich auf k_1 und k_2. Was ist der geringstmögliche Abstand dieser beiden Punkte und was sind die Koordinaten dieser Punkte.

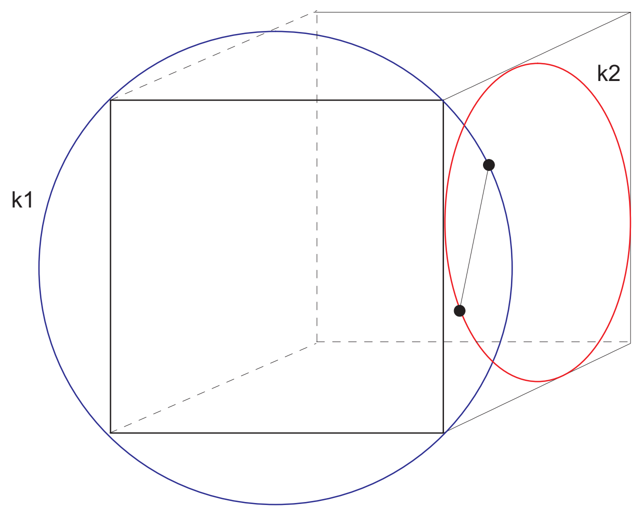

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Lösungsvorschlag

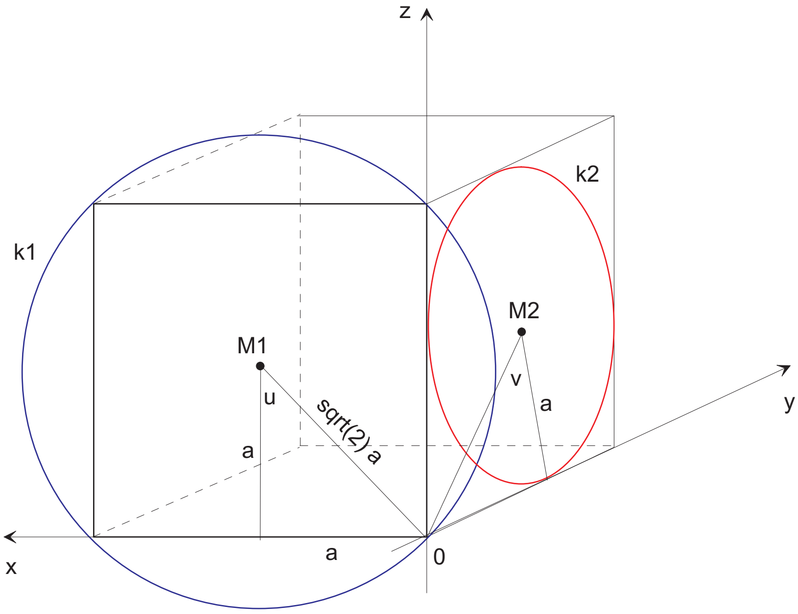

Abbildung 2: Skizze zum Lösungsweg

Wir legen den Ursprung eines dreimdimensionalen, kartesischen Koordiantensystems in den rechten, unteren Eckpunkt des Würfels. Der Kreis k_1 liegt in der $x - z$ Ebene und sein Radius beträgt $r_1 = \sqrt{2} \cdot a$. Die Parametergleichung lautet:

$$k_1: \quad x_1 = a + \sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(u), \quad y_1 = 0, \quad z_1 = a + \sqrt{2} \cdot a \cdot \sin(u) \tag{1}$$

Der Kreis k_2 befindet sich in der $y - z$ Ebene und sein Radius ist $r_2 = a$. Die zugehörige Parametergleichung lautet:

$$k_2: \quad x_2 = 0, \quad y_2 = a + a \cdot \cos(v), \quad z_2 = a + a \cdot \sin(v) \tag{2}$$

Der Abstand zwischen einem Punkt auf k_1 und einem Punkt auf k_2 berechnet sich aus der Punktabstndsformel:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{3}$$

Für die Suche nach dem minimalen Abstand genügt es das Quadrat von d zu betrachten:

$$f(u, v) = (a + \sqrt{2} \cdot a \cdot \cos(u))^2 + (a + a \cdot \cos(v))^2 + (\sqrt{2} \cdot a \cdot \sin(u) - a \cdot \sin(v))^2 \tag{4}$$

Zunächst betrachten wir einen 3D-Plot der Funktion f über die Parameter u, v:

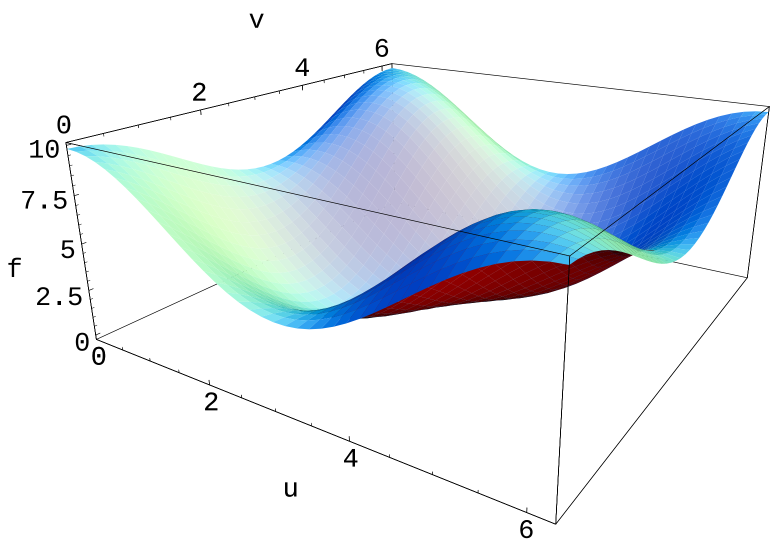

Abbildung 3: 3D-Plot von $f(u, v)$, $\quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$

Das notwendige Kriterium für ein lokales Minimum der Funktion $f(u, v)$ lautet:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \tag{5}$$

Es muß das Gleichungssystem (6),(7) simultan gelöst werden:

$$f_u = -2\sqrt{2}\,a^2\,(\sin[u] + \cos[u]\,\sin[v]) = 0 \tag{6}$$

$$f_v = -2\,a^2\left(\sqrt{2}\,\cos[v]\,\sin[u] + \sin[v]\right) = 0 \tag{7}$$

Als Lösungsmenge erhalten wir in *Mathematica*

$$\{\{v \to 0, u \to 0\}, \{v \to 0, u \to -\pi\}, \{v \to 0, u \to \pi\}, \{v \to -\pi, u \to 0\}, \{v \to -\pi, u \to -\pi\},$$

$$\{v \to -\pi, u \to \pi\}, \{v \to \pi, u \to 0\}, \{v \to \pi, u \to -\pi\}, \{v \to \pi, u \to \pi\},$$

$$\{v \to -\arccos\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}\right], u \to -\frac{5\,\pi}{6}\}, \{v \to \arccos\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}\right], u \to \frac{5\,\pi}{6}\},$$

$$\{v \to -\arccos\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\right], u \to \frac{\pi}{6}\}, \{v \to \arccos\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\right], u \to -\frac{\pi}{6}\}\}$$

Zur Überprüfung auf Maximum oder Minimum müssen die zweiten, partiellen Ableitungen herangezogen werden:

$$f_{uu} = -2\sqrt{2}\,a^2\,(\cos[u] - \sin[u]\,\sin[v]) \tag{8}$$

$$f_{vv} = -2\,a^2\,\big(\cos[v] - \sqrt{2}\,\sin[u]\,\sin[v]\big) \tag{9}$$

$$f_{uv} = -2\sqrt{2}\,a^2\,\cos[u]\,\cos[v] \tag{10}$$

$$\Delta = f_{uu} \cdot f_{vv} - f_{uv}^2 \tag{11}$$

$$\Delta = 4\,a^4\,\big(-2\cos[u]^2\cos[v]^2 + \sqrt{2}\,(\cos[u] - \sin[u]\,\sin[v])\,\big(\cos[v] - \sqrt{2}\,\sin[u]\,\sin[v]\big)\big) \tag{12}$$

Ein Minimum liegt genau dann vor, wenn für das Wertepaar u, v gilt:

$$\Delta(u,v) > 0, \qquad f_{uu} > 0 \tag{13}$$

u	v	$\Delta(u,v)$	$f_{uu}(u,v)$	$f(u,v)$	Extremum
0	0	-2.34315	-2.82843	9.82843	-
$-\pi$	$0i$	-13.6569	2.82843	4.17157	-
π	0	-13.6569	2.82843	4.17157	-
0	$-\pi$	-13.6569	2.82843	5.82843	-
0	π	-13.6569	2.82843	5.82843	-
$-\frac{5\,\pi}{6}$	$-\arccos\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$	4.0	3.266	0.101021	Min.
$\frac{5\,\pi}{6}$	$\arccos\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$	4.0	3.266	0.101021	Min.
$-\frac{\pi}{6}$	$\arccos\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$	4.0	-3.266	9.89898	Max.
$\frac{\pi}{6}$	$-\arccos\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$	4.0	-3.266	9.89898	Max.

Setzt man die Werte u_{min}, v_{min} in die Gleichungen (1) und (2) ein erhlt man für die Koordinaten der Punkte auf k_1 und k_2:

$$x_1 = 1 - \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad z_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad z_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{14}$$