Maschendrahtzaun II

oder die Suche nach dem versteckten Osterei

Ingmar Rubin, Berlin

Wir haben genau 100m Maschendrahtzaun zur Verfügung, um eine Weide einzuzäunen. Unser Zaun muss an der großen Eiche E anfangen und enden. Wir denken uns eine Nord-Süd Achse die durch die Eiche verluft.

1. Alles Land, das westlich der gedachten Achse liegt, ist keinen Cent wert, d.h. $= 0$.

2. Alles Land, das östlich von der Eiche liegt, wird kontinuierlich teurer je weiter es von der Nord-Süd-Achse entfernt liegt. Der Grundstückswert verlaufe nach der Funktion $y = k \cdot x$, wobei y den Quadratmeterpreis und x die Entfernung in m zur Nord-Sdachse darstellt. k ist ein Proportionalitätsfaktor, der für die Aufgabenstellung $k = 1 Euro/m^3$ betrage.

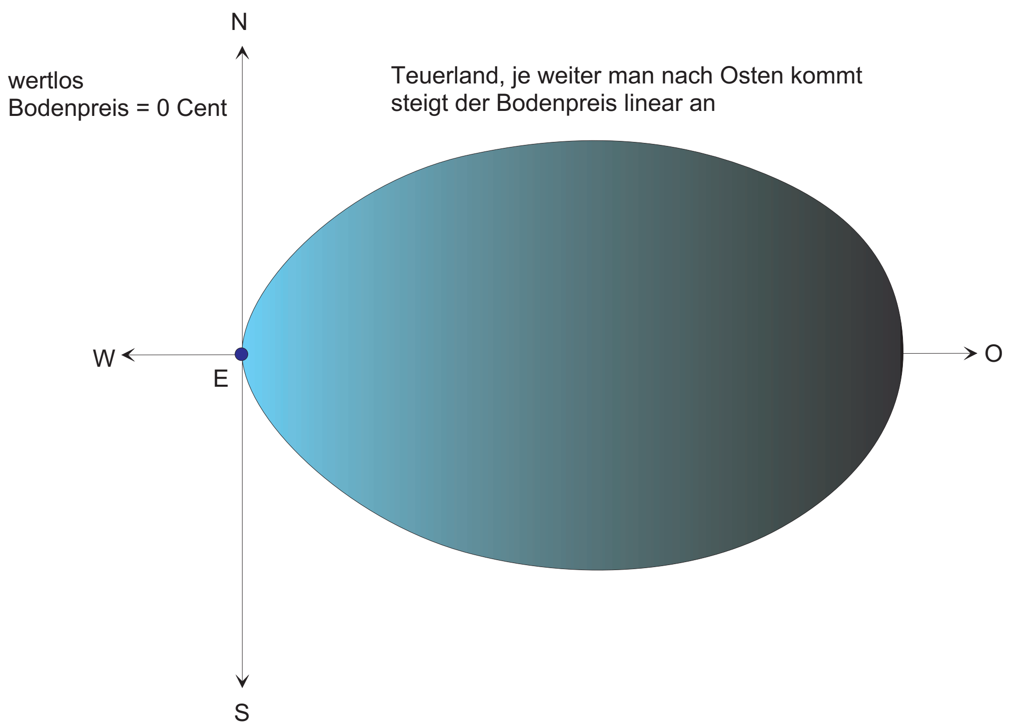

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Auf welcher Kurve c muss der Zaun verlaufen, so dass die eingeschlossene Weidefläche den größtmöglichen Wert hat?

Anmerkung zum Ursprung der Aufgabe

Das englische Original wurde von *Vladimir Sedach* als Monatsrätesl März 2003 auf der IBM-Challenge Seite gestellt:

We have 100 meters of fencing, which we use to enclose a pasture. Our fence must begin and end at the oak tree. Ground south of the oak tree, or less than 20 meters north of the oak tree, is worth $100 per square meter; but ground more than 20 meters north of the oak tree is worth $200 per square meter.

What shape maximizes the total value of the enclosed pasture, and what is this value?

Clarifications:
The 'oak tree' is a single point. '20 meters north' refers to an east-west line passing 20 meters north of the tree. 'Begin and end at the oak tree' means that both ends of the fence touch this point. All of this takes place on a flat Earth.

In der Originalaufgabe springt der Bodenpreis an einer gedachten Grenzlinie von $100 auf $200. Die Lösungswege zu dieser Aufgabe wurden in der Newsgroup *de.rec.denksport* im Zeitraum 7.März bis 18.März 2003 intensiv diskutiert. Anteil daran hatten die Mathematikfreunde:

- Rainer Rosenthal
- Alfred Flaßhaar
- Thomas Luehmann
- Kari Bonanza
- Konrad Schultz und
- Werner Baer

Rainer Rosental hat drei wesentliche Prinzipien herausgearbeitet:
Prinzip 0: *Kreisbögen sind die Linien, die die maximale Fläche über einer gegebenen Strecke einschliessen.*
Nach diesem sehr allgemeinen Prinzip, das direkt aus der bekannten isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises hergeleitet ist, habe ich noch zwei Prinzipien, die mit der konkreten Aufgabe direkt zusammenhängen.
Prinzip 1: *Die Kreisbögen stossen an der Grenze mit gleicher Tangente zusammen, d.h. Grenzpunkt G und Krümmungskreiszentren Z und M liegen auf einer Geraden. Oder anders formuliert: die Figur, die vom Zaun berandet wird, ist konvex und hat keine Ecke bei G.*
Dies Prinzip ist nicht selbstverständlich (für die Eiche E stimmt es ja auch nicht, wie aus der Begründung auch klar wird.) Für die Rechnung ist es natürlich sehr sehr hilfreich.
Prinzip 2: *Die Krümmungsradien verhalten sich umgekehrt proportional zu*

den Preisen, d.h. die Krümmung selbst ist den Preisen im jeweiligen Land proportional.

Die Vermutung aus Prinzip 2 werden wir nun für einen stetigen Kostenanstieg mittels Variationsrechnung beweisen.

Lösungsansatz mittels Variationsrechnung

Wir denken uns die Eiche im Ursprung eines rechtwinkliegen Koordinatensystems. Der Aufgabenstellung angepasst benutzen wir Zylinderkoordinaten :

$$x = r\,\cos(t), \quad y = r\,\sin(t), \quad z = f(r,t) \tag{1}$$

Durch den Ursprung verlaufe der Mantel eines geraden Zylinders mit der Grundlinie $r = r(t)$. Diesen Zylinder bringen wir mit der Ebene $z = x = r\,\cos(t)$ zum Schnitt. Als Beispiel wählen wir den Kreiszylinder mit der Grundlinie:

$$c: \qquad r(t) = 2\,R\cos t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

Wir müssen c nun so variieren, daß das Volumen des Schnittkörpers maximal

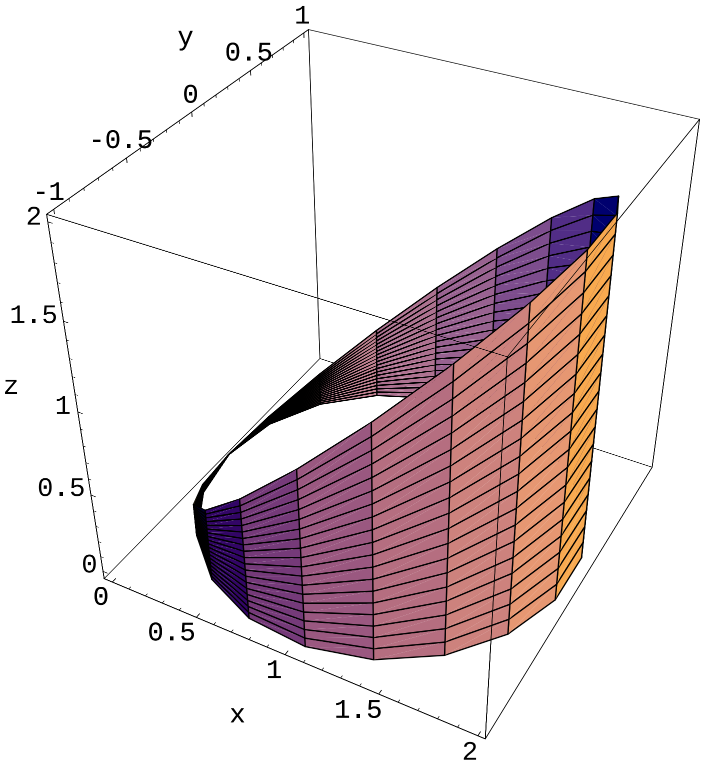

Abbildung 2: Schnitt zwischen dem Kreiszylinder $r = 2\cos(t)$ und der Ebene $z = x$

wird. Der Umfang der Kurve c ist dabei auf $u = 100\,m$ limiert. Das Bogendifferential in Polarkoordinaten lautet:

$$ds = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,dt \tag{3}$$

und der Umfang der Kurve berechnet sich aus dem Integral:

$$u = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,dt \tag{4}$$

Das Volumen des abgeschnittenen Zylinders berechnet sich aus:

$$V = \int_{t_1}^{t_2} \int_{0}^{r} \int_{0}^{r\cos t} r\, dr\, dt\, dz = \int_{t_1}^{t_2} \int_{0}^{r} r^2 \, \cos(t)\, dt\, dr = \frac{1}{3} \int_{t_1}^{t_2} r^3 \, \cos t\, dt \quad \rightarrow \quad max. \tag{5}$$

Bei der Maximierung des Volumen V muß das Bogenintegral als Nebenbedingung berücksichtigt werden. In der Variationsrechnung werden Nebenbedingungen über einen freien Parameter λ in das Funktional eingebunden. Das zu optimierende Funktional lautet damit:

$$F = \frac{1}{3}\, r^3 \, \cos t + \lambda \, \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} \tag{6}$$

Die zugehörige *Euler-Lagrangsche* Differentialgleichungg erhalten wir aus:

$$\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{d}{dt}\, \frac{\partial F}{\partial \dot{r}} = 0 \tag{7}$$

Wer ein Computeralgebrasystem besitzt, kann sich die weitere Arbeit vereinfachen. Am Beispiel von *Mathematica* sieht das so aus:

```
<< Calculus‘VariationalMethods‘

f = r[t]^3 Cos[t]/3 + \[Lambda] Sqrt[r[t]^2 + r’[t]^2]

DGL = FullSimplify[EulerEquations[f , r[t], t]]
```

$$DGL: \quad r \left(r\, \cos t + \frac{\lambda\, (r^2 + 2\, \dot{r}^2 - r\, \ddot{r})}{\sqrt{(r^2 + \dot{r}^2)^3}} \right) = 0 \tag{8}$$

Eine erste Lösung der DGL (8) ist $r(t) = 0$. Für unseren Anwendungsfall suchen wir aber alle nichtrivialen Lösungen mit $r(t) > 0$. Wenn $r(t) \neq 0$ ist, muß der Klammerausdruck identisch verschwinden :

$$r\, \cos t = -\lambda\, \frac{(r^2 + 2\, \dot{r}^2 - r\, \ddot{r})}{\sqrt{(r^2 + \dot{r}^2)^3}} \tag{9}$$

Für Kurven in Polarkoordinatendarstellung berechnet sich die Krümmung k in Abhängigkeit vom Winkel t zu:

$$k = \frac{(r^2 + 2\, \dot{r}^2 - r\, \ddot{r})}{\sqrt{(r^2 + \dot{r}^2)^3}} \tag{10}$$

Genau dieser Term steht nun auf der rechten Seite von (9) verknüpft mit dem Proportionalitätsfaktor λ. Auf der linken Seite steht der Kostenanstieg $x = r\cos t$. Bei der optimalen Kurve muß also die Krümmung proportional zu x steigen, womit die Vermutung aus Prinzip 2 bestätigt ist. Eine Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung (9) ist mit herkömmlichen Methoden nicht möglich. Aus den bekannten Kurven in Polardarstellung versuchen wir nun etwas 'Passendes' zu finden.

Fall 1: Kreis $r = 2\,R \cos t$

Als untere Referenz wählen wir die einfach zu behandelnde Kreiskurve. Sie besitzt die konstante Krümmung $k = \frac{1}{R}$, d.h. sie kann aus Sicht der Variationsrechnung nicht das Maximum darstellen.

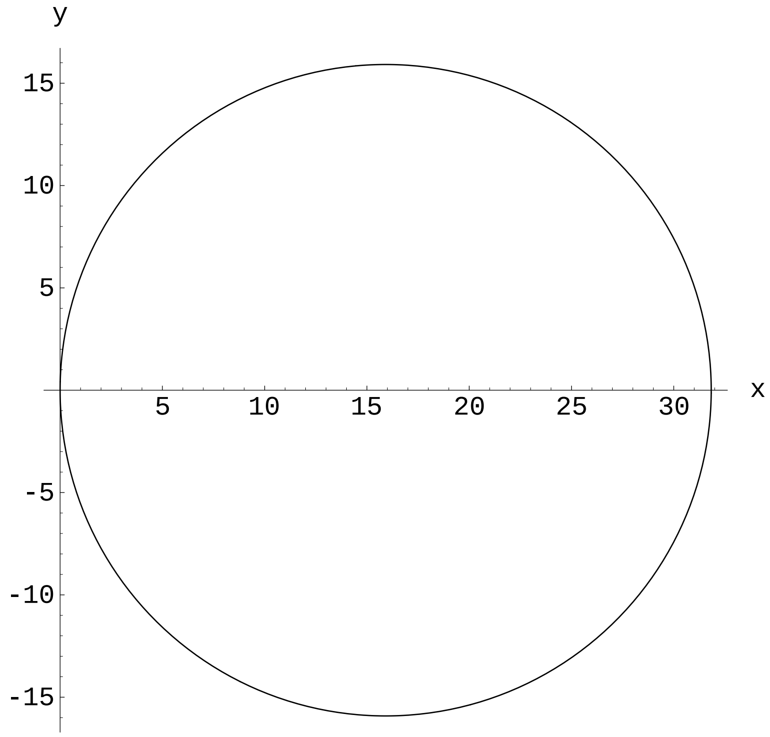

Abbildung 3: Kreiskurve $r = 2R\,\cos(t)$ durch den Ursprung

$$r = 2\,R\,\cos(t), \quad \dot{r} = -2\,R\,\sin t \tag{11}$$

Aus dem Umfang bestimmen wir den Radius R:

$$u = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,dt = 2\,\pi\,R \quad \rightarrow \quad R = \frac{u}{2\,\pi} \approx 15.9155\,m \tag{12}$$

Das bewertete Volumen beträgt:

$$V = \frac{1}{3} \int_{t_1}^{t_2} r^3\,\cos t\,dt = \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [2\,R\,\cos(t)]^3\,\cos(t)\,dt = \frac{8\,R^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\cos(t)]^4\,dt \tag{13}$$

$$V = \pi\,R^3 = \frac{u^3}{8\,\pi^2} = 12665.1 \tag{14}$$

Fall 2: Strophoide $r = a\,\frac{\cos 2t}{\cos t}$

Wir benutzen als Grundkurve für den Zylinder die rechts der $y-$ Achse liegende Schleife der *Strophoide*. Im ersten Schritt muß den Parametr a so bestimmt

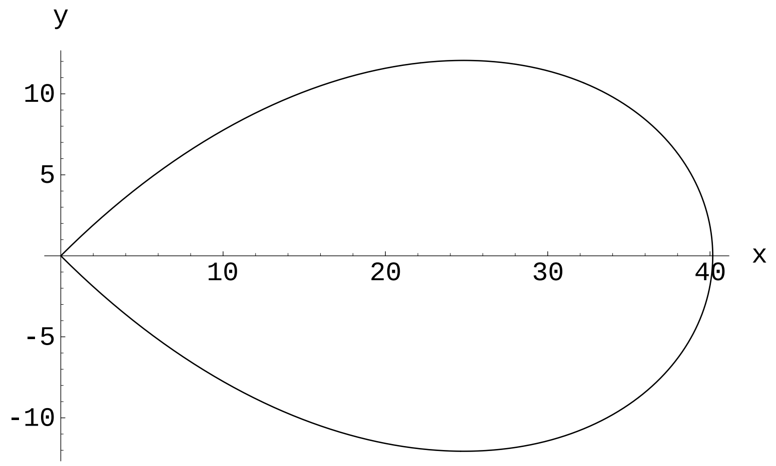

Abbildung 4: Strophoide $r = a\,\frac{\cos 2t}{\cos t}$ im Intervall $-\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}$

werden, daß der Umfang der Schleife genau $100\,m$ beträgt. Bei der Berechnung der Ableitungen und Integrale wird das Computeralgebrasystem *Mathematica* benutzt.

$$r = a\,\frac{\cos 2t}{\cos t}, \qquad \dot{r} = -a\left(2\,\sin t + \frac{\sin t}{(\cos t)^2}\right) \tag{15}$$

$$ds = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,dt = a\,\frac{\sqrt{3-\cos 4t}}{\sqrt{2}\,(\cos t)^2} \tag{16}$$

$$u = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} ds\,dt = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} a\,\frac{\sqrt{3-\cos 4t}}{\sqrt{2}\,(\cos t)^2}\,dt \tag{17}$$

$$u = 2\,a\,\left(\sqrt{2} - ArcCoth(\sqrt{2}) - EllipticE(-1) + 2EllipticK(-1)\right) \tag{18}$$

$$a = \frac{u}{2\,a\,\left(\sqrt{2} - ArcCoth(\sqrt{2}) - EllipticE(-1) + 2EllipticK(-1)\right)} \approx 40.1671\,m \tag{19}$$

Die bewertete Schleifenfläche beträgt:

$$V = \frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} r^3\,\cos t\,dt = \frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(a\,\frac{\cos 2t}{\cos t}\right)^3\cos t\,dt \tag{20}$$

$$V = \frac{(3\pi - 8)\,u^3}{48\,\left(\sqrt{2} - ArcCoth(\sqrt{2}) - EllipticE(-1) + 2EllipticK(-1)\right)^3} \approx 15388.9 \tag{21}$$

Zum Abschluß betrachten wir den Verlauf der Krümmung k über der $x-$ *Achse*

$$k(t) = \frac{(r^2 + 2\,\dot{r}^2 - r\,\ddot{r})}{\sqrt{(r^2 + \dot{r}^2)^3}} = \frac{8\,\sqrt{2}\,(\cos t)^4\,(2 - \cos 2t)}{a\,\sqrt{(3 - \cos 4\,t)^3}} \tag{22}$$

Die Krümmung der Kurve steigt monoton mit zunehmenden $x-$ Werten. Am

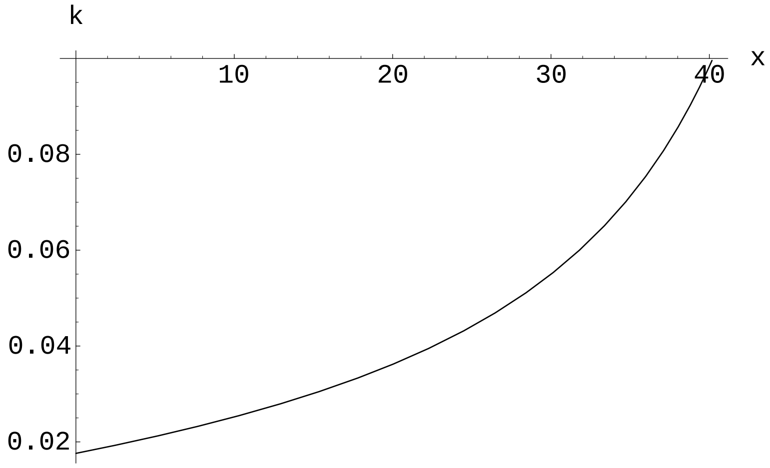

Abbildung 5: Verlauf der Krümmung k bei der Strophoidenschleife

Kurvenverlauf ist zu erkennen, daß die Zunahme nicht proportional erfolgt und deshalb auch nicht exakt Gleichung (9) erfüllt. In jedem Fall ist es aber ein besseres Ergebnis als die Kreiskurve.

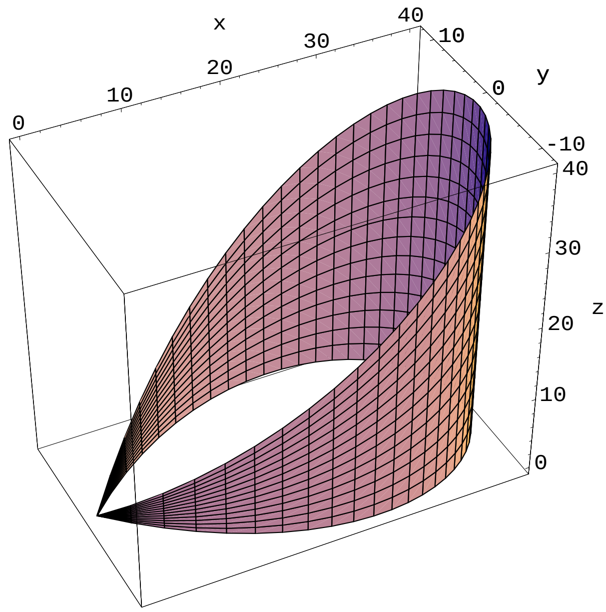

Abbildung 6: Darstellung des *Strophoiden-Zylinders*

Fall 3: Lemniskate $r = a\sqrt{2\,\cos 2t}$

Als Speziallfall der *Cassinischen Kurevn* soll nun die *Lemniskate* als Grundkurve c untersucht werden. Im ersten Schritt wird der Parameter a so bestimmt, daß

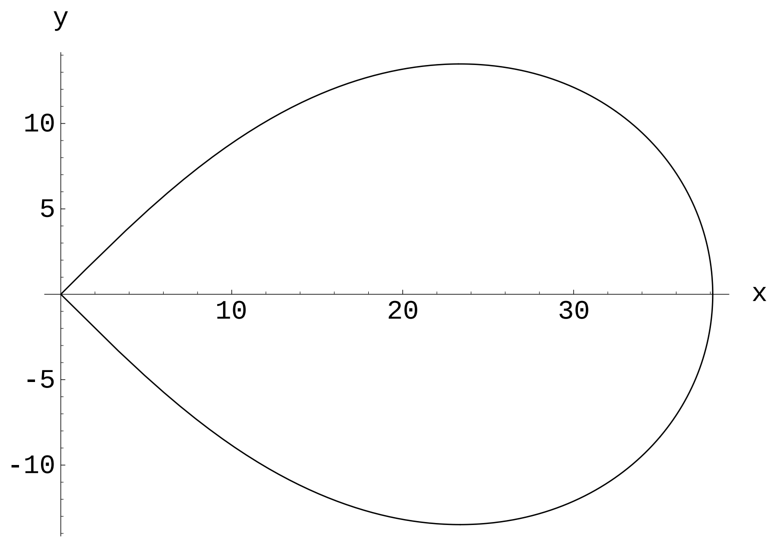

Abbildung 7: Lemniskate $r = a\,\sqrt{2\,\cos 2t}$ im Intervall $-\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}$

der Umfang der Schleife genau $100\,m$ beträgt.

$$r = a\,\sqrt{2\,\cos 2t}, \qquad \dot{r} = -\frac{\sqrt{2}\,a\,\sin 2t}{\sqrt{\cos 2t}} \tag{23}$$

$$ds = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,dt = \frac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{\cos 2t}} \tag{24}$$

$$u = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} ds\,dt = \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{\cos 2t}}\,dt = \frac{2\,a\,\sqrt{2\pi}\,Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \tag{25}$$

$$a = \frac{u\,Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2\,\sqrt{2\pi}\,Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} \tag{26}$$

Die bewertete Schleifenfläche beträgt:

$$V = \frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} r^3\,\cos t\,dt = \frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(a\,\sqrt{2\,\cos 2t}\right)^3\,\cos t\,dt \tag{27}$$

$$V = \frac{u^3\,\left(Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\right)^3}{64\,\sqrt{2\pi}\,\left(Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right)^3} \approx 15403.5 \tag{28}$$

Zum Abschluß betrachten wir den Verlauf der Krümmung k über der $x-$ *Achse*

$$k(t) = \frac{(r^2 + 2\,\dot{r}^2 - r\,\ddot{r})}{\sqrt{(r^2 + \dot{r}^2)^3}} = \frac{3\,\sqrt{\cos 2t}}{a\,\sqrt{2}} = \frac{3\,r}{2\,a^2} \tag{29}$$

Die Krümmung der Kurve steigt monoton mit zunehmenden $x-$ Werten. Am

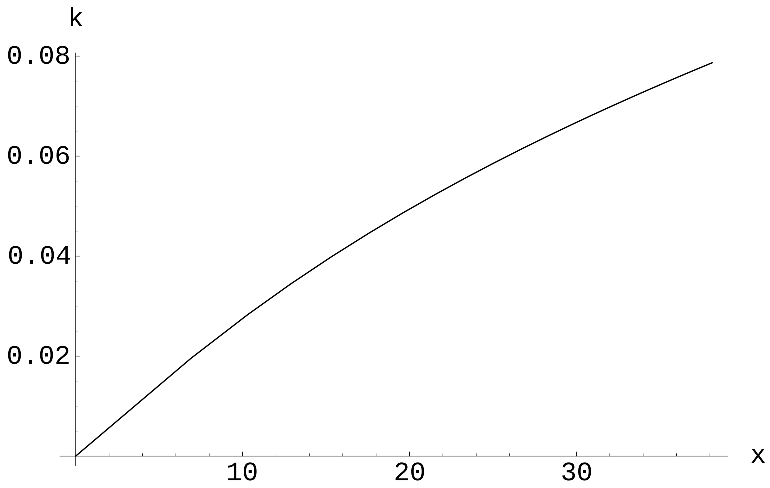

Abbildung 8: Verlauf der Krümmung k bei der Lemniskate

Kurvenverlauf ist zu erkennen, daß die Zunahme fast proportional erfolgt und deshalb der Forderung aus (9) schon recht nahe kommt.

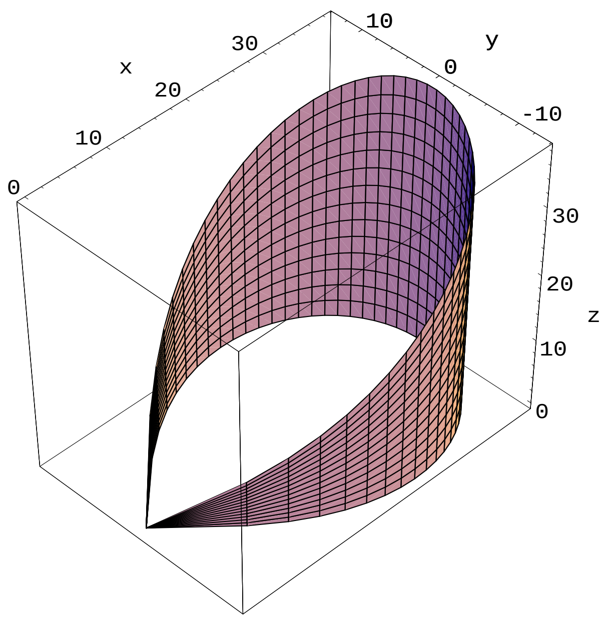

Abbildung 9: Darstellung des *Lemniskaten-Zylinders*

Fall 4: Parameterkurve $x = a\ \sin t, \quad y = b \sin 2\,t$

nach einem Vorschlag von Konrad Schultz

Auf der Suche nach der optimalen Kurve sollten selbstverständlich auch Kurven in Parameterdarstellung untersucht werden. Eine Kurve die der Lemniskate recht ähnlich ist, zeigt Abbildung 10.

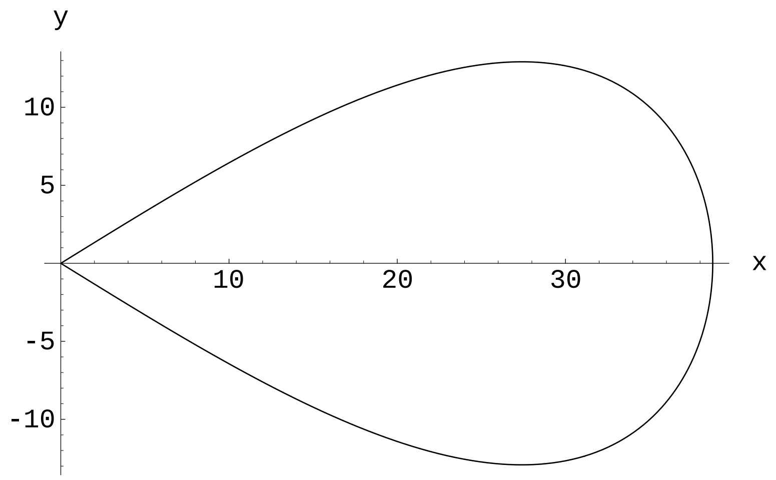

Abbildung 10: Parameterkurve $x = a\ \sin t, \quad y = b\ \sin 2t; \quad 0 \leq t \leq \pi$

Die Parameterdarstellung gestattet über die Variation der Größen a und b bzw. deren Verhältnis die Schleifenform zu verändern. Als optimale Kurvenform konnte $a = 3$, $b = 1$ ermittelt werden. Für die Berechnung des Bogenlänge und der Krümmung benötigen wir die erste und zweite Ableitung nach dem Parameter t :

$$x(t) = 3\,a\ \sin t, \qquad \dot{x} = 3\,a\ \cos t, \qquad \ddot{x} = -3\,a\ \sin t \tag{30}$$

$$y(t) = a\ \sin 2t, \qquad \dot{y} = 2\,a\ \cos 2\,t, \quad \ddot{y} = -4\,a\ \sin 2\,t \tag{31}$$

Das Bogendifferential lautet:

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = a\,\sqrt{9\ \cos^2 t + 4\ \cos^2 2t} \tag{32}$$

Das Integral über ds kann nur numerisch ausgewertet werden:

$$u = \int\limits_0^\pi ds\,dt = \int\limits_0^\pi a\,\sqrt{9\ \cos t^2 + 4\ \cos 2t^2} \approx 7.74133\,a \tag{33}$$

$$a = \frac{u}{7.74133} \tag{34}$$

Die Krümmung in Abhängigkeit von t beträgt :

$$k(t) = \frac{\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}} = \frac{3\ \sin t + \sin 3\,t}{a\,\sqrt{(9 \cos^2 t + 4\ \cos^2 2t)^3}} \tag{35}$$

Das Flächenelement berechnet sich nach der *Leibnizschen Sektorenformel* zu:

$$dA = \frac{1}{2}\,(x\,\dot{y} - y\,\dot{x})\,dt = 3\,a^2\,\sin^3 t\,dt \tag{36}$$

Die bewertete Schleifenfläche beträgt dann :

$$V = \frac{2}{3}\int_0^\pi x\,dA = \int_0^\pi 6\,a^3\,\sin^4 t = \frac{9\,a^3\,\pi}{4} \tag{37}$$

Nun ersetzen wir a durch den Umfang :

$$V = \frac{9\,u^3\,\pi}{4\,(7.74133)^3} \approx 15236.5 \tag{38}$$

Zum Abschluß betrachten wir den Verlauf der Krümmung k über der $x-Achse$ Die Krümmung der Kurve besitz ein Maximum. Der Verlauf entspricht nicht

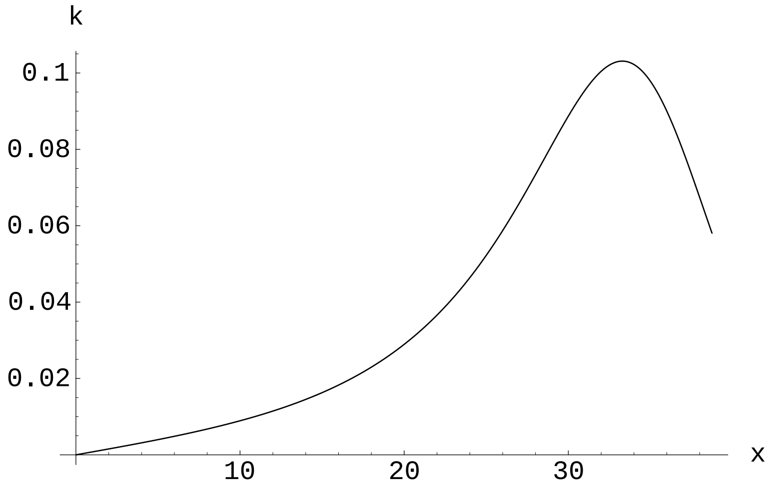

Abbildung 11: Verlauf der Kurvenkrümmung $k(t)$ über der x-Achse

der 'optimal'-Forderung nach einem linearen Anstieg. Nun stellt sich die Frage wie sieht es mit anderen Verhälnissen $a \div b$ aus. Ich betrachte die Kurve in der Form:

$$x(t) = v\,a\,\sin t, \qquad y(t) = a\,\sin 2\,t \tag{39}$$

und variiere v so dass der Volumenwert optimal wird. Das ist leichter gesagt als getan, da sich die Formeln nicht allgemein für beliebiges v herleiten lassen. Tabelle 1 zeigt für einige, ausgewählte Werte von v das Volumen. Das Maximum dürfte in der Nähe von $v = 3.0$ liegen.

v	1.0	2.0	2.8	3.0	3.1	3.2	4.0
V	7494.17	13859.7	15195.2	15236.5	15228.8	15204.8	14621.7