Drei Kreise im Dreieck

Ein Problem von G.F.Malfatti, 1731-1807

Mathematikzeitschrift *MONOID*, Heft 74/ Juni 2003

Gegeben sei das Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = 8$, $b = 10$, $c = 10$. Im Inneren von $\triangle ABC$ sind drei Kreise k_1, k_2, k_3 einbeschrieben, von denen jeder zwei Dreieckseiten und mindestens einen der übrigen Kreise berühert (Abbildung 1). Bezeichne u, v, w die Radien der der Kreise k_1, k_2, k_3.

1. Berechne die Kreisradien v und w bei Vorgabe von u als Lösung einer algebraischen Gleichung.

2. Die Summe der Kreisumfänge besitzt ein Extremum. Ermittle die Radien u, v, w für das Extremum als algebraische Zahl.

3. Die Summe der drei Kreisflächeninhalte besitzt ein Extremum. Ermittle die Radien u, v, w für die Extremstelle als numerische Lösung.

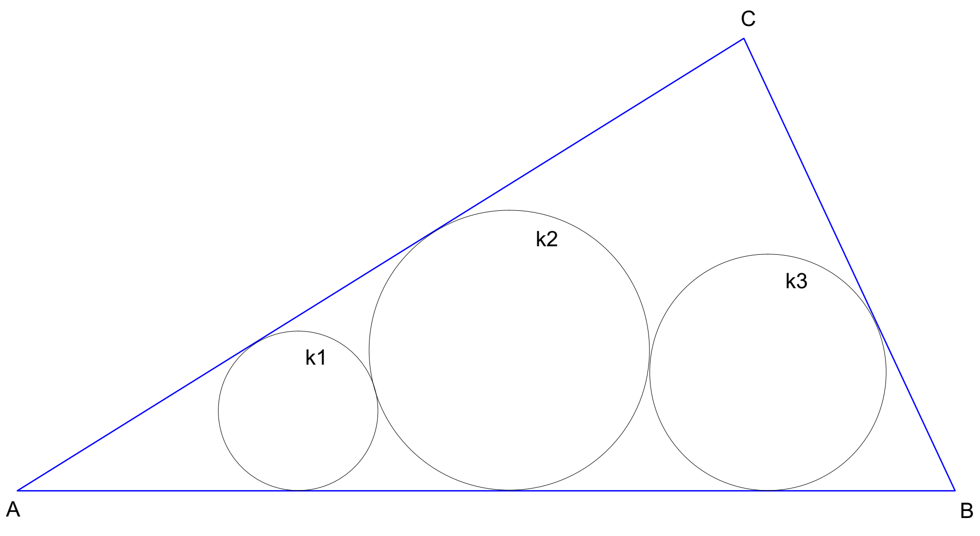

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Punktezahl=8

Lösung der Aufgabe

Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

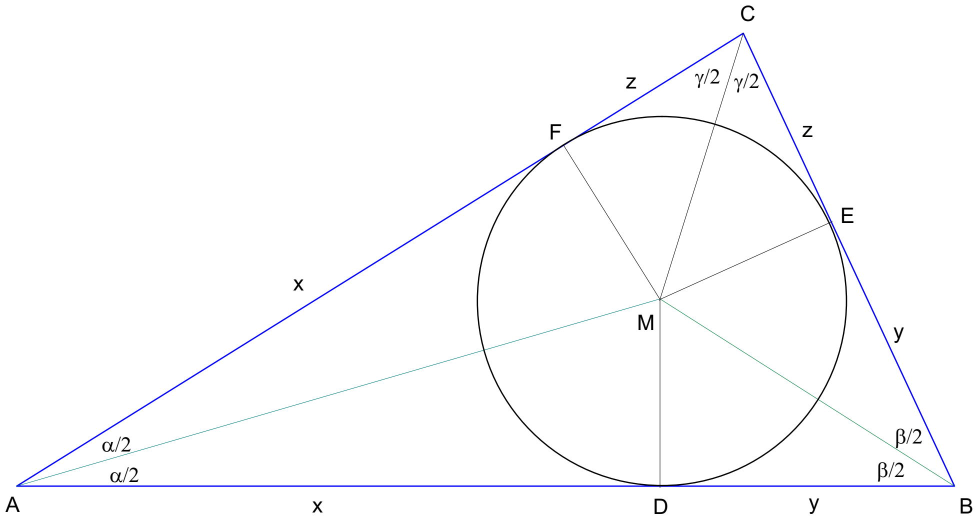

Abbildung 2: Winkelhalbierende und Inkreis im Dreieck ABC

Für die Lösung der Aufgabe ist es nützlich die drei Winkelhalbierenden im Dreieck ABC zu konstruieren. Sie schneiden sich im Inkreismittelpunkt M. Von M fällen wir die Lote auf die Dreieckseiten und erhalten die Schnittpunkte D, E, F. Wir wollen nun die Längen der Tangentenabschnitte

$$x = \overline{AD} = \overline{AF}, \qquad y = \overline{BD} = \overline{BE}, \qquad z = \overline{CE} = \overline{CF} \tag{1}$$

an den Inkreis bestimmen. Aus Abbildung 2 entnehmen wir:

$$c = x + y, \qquad a = y + z, \qquad b = z + x \tag{2}$$

Die Auflösung der drei Gleichungen nach x, y, z ergibt :

$$x = s - a, \qquad y = \overline{BE} = s - b, \qquad z = \overline{CF} = s - c \tag{3}$$

wobei s den halben Umfang vom Dreieck ABC bezeichnet:

$$\triangle ABC : \qquad s = \frac{a + b + c}{2} \tag{4}$$

Aus dem Flächeninhalt von $\triangle ABC$ kann der Inkreisradius r berechnet werden:

$$A = r \cdot s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \tag{5}$$

Lage der Kreismittelpunkte

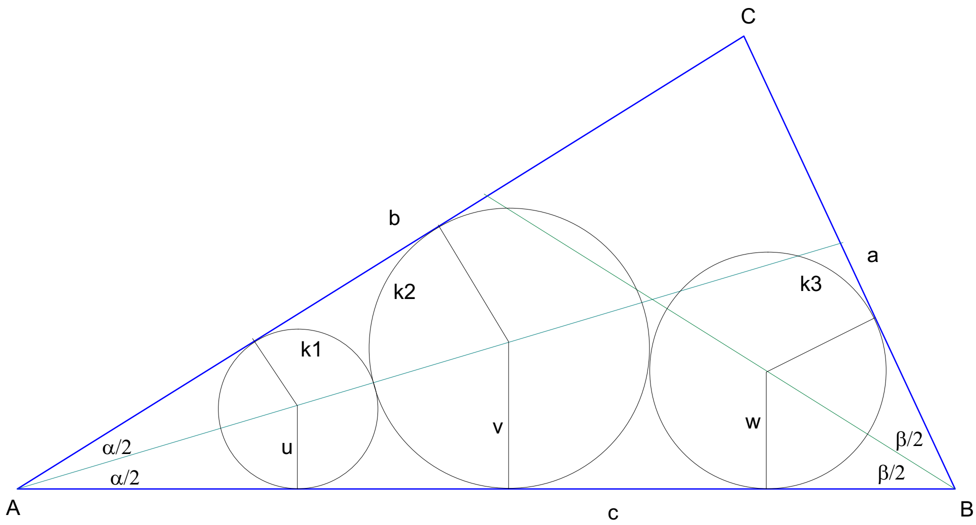

Abbildung 3: Lage der Kreismittelpunkte

Die Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2 liegen auf der Winkelhalbierenden vom Winkel $\sphericalangle BAC = \alpha$. Der Mittelpunkt von k_3 befindet sich auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle ABC = \beta$ (Abbildung 3). Die Kreisradien sind voneinander abhängig. Gibt man sich u vor, so folgen daraus v und w. Es gibt demnach unendlich viele Tripel u, v, w, welche das Berüherungsproblem von *Malfatti* erfüllen. Im folgenden sei die Berechnung der Radien v, w aus der Vorgabe von u hergeleitet.

Berechnung der Kreisradien v, w aus u

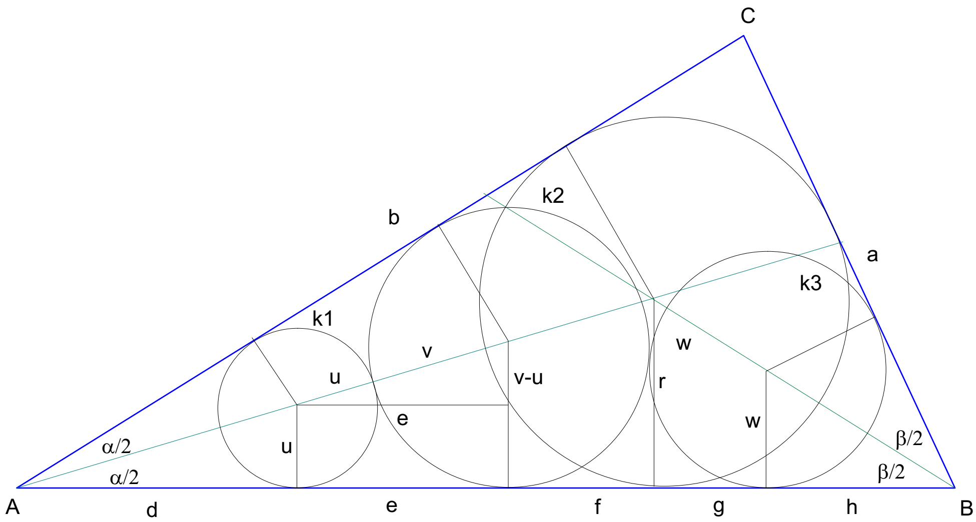

Abbildung 4: Berechnung vom Radius v aus u

Ausgangspunkt der Berechnung sei Abbildung 4. Von den Mittelpunkten der Kreise k_1, k_2 und k_3 wird das Lot auf Seite $\overline{AB}$ gefällt. Wir erhalten die Abschnitte d, e, f, g, h.

$$\overline{AB} = c = d + e + f + g + h \tag{6}$$

Aus Gleichung (3) wissen wir :

$$x = d + e + f = s - a, \qquad y = g + h = s - b \tag{7}$$

Der Mittelpunkt von k_1 und k_2 liegt auf der Winkelhalbierenden von α. Es gelten die Verhältnisgleichungen

$$\frac{u}{d} = \frac{r}{s-a}, \qquad \frac{v}{d+e} = \frac{r}{s-a} \tag{8}$$

Aus dem Berüherungsdreieck zwischen den Kreisen k_1 und k_2 folgt mit dem *Pythagoras*

$$(u+v)^2 = (v-u)^2 + e^2 \quad \rightarrow \quad e = 2\sqrt{u\,v} \tag{9}$$

Die Auflösung nach d, e, f und v ergibt in *Mathematica*:

$$f \rightarrow s - \frac{s\,u}{r} + \frac{2\left(r + \sqrt{a^2 + r^2 - 2\,a\,s + s^2}\right)u}{a-s} + a\left(-1 + \frac{u}{r}\right),$$

$$v \rightarrow \left(1 + \frac{2\,r^2}{(a-s)^2} + \frac{2\,r\sqrt{a^2 + r^2 - 2\,a\,s + s^2}}{(a-s)^2}\right)u,$$

$$e \rightarrow -\frac{2\left(r + \sqrt{a^2 + r^2 - 2\,a\,s + s^2}\right)u}{a-s}, \quad d \rightarrow \frac{(-a+s)\,u}{r}$$

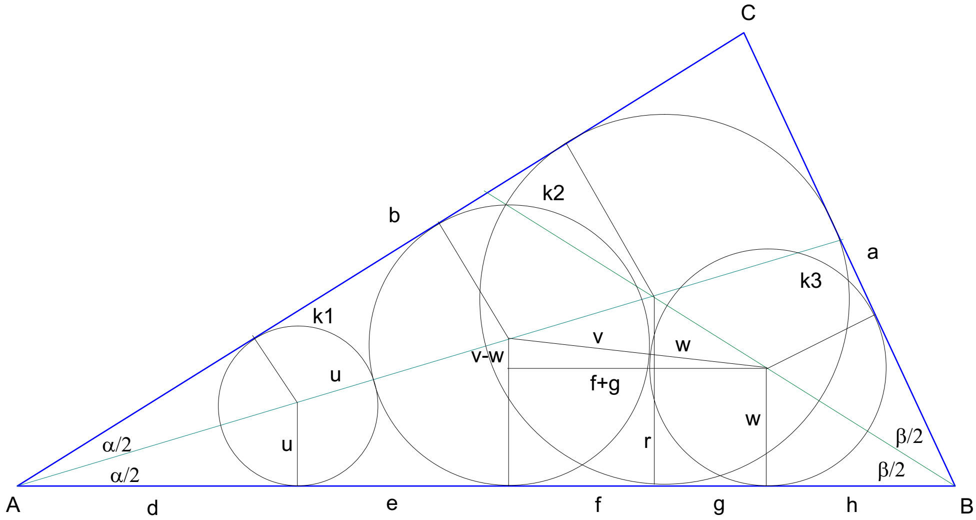

Abbildung 5: Berechnung vom Radius w aus v

Aus den Radien u, v kann nun der Radius w berechnet werden. Der Mittelpunkt von w liegt auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle\beta$ und es gilt die Verhältnisgleichung:

$$\frac{w}{h} = \frac{r}{g+h} = \frac{r}{s-b} \tag{10}$$

Aus dem Berüherungsdreieck zwischen den Kreisen k_2 und k_3 folgt mit dem *Satz des Pythagoras*

$$(v+w)^2 = (v-w)^2 + (f+g)^2 \quad \rightarrow \quad f+g = 2\sqrt{v\,w} \tag{11}$$

Aus dem bisherigen Lösunsweg wissen wir:

$$d = \frac{u\,(s-a)}{r}, \qquad e = 2\sqrt{u\,v} \tag{12}$$

$$f = (s-a) - d - e = (s-a) - \frac{u\,(s-a)}{r} - 2\sqrt{u\,v}, \tag{13}$$

Die Auflösung in *Mathematica* ergibt:

$$\begin{aligned} w = {} & \frac{1}{(b-s)^2} \\ & \big(b^2\,r - 3\,b\,r\,s + 2\,r\,s^2 + a\,(b-s)\,(r-u) + b\,s\,u - \\ & s^2\,u + 2\,r^2\,v + 2\,b\,r\sqrt{u\,v} - 2\,r\,s\sqrt{u\,v} - \\ & 2\sqrt{\big(r^2\,v\,\big(b^2\,r - 3\,b\,r\,s + 2\,r\,s^2 +} \\ & \overline{a\,(b-s)\,(r-u) + b\,s\,u - s^2\,u +} \\ & \overline{r^2\,v + 2\,b\,r\sqrt{u\,v} - 2\,r\,s\sqrt{u\,v}\big)\big)}\big) \end{aligned}$$

Summe der Kreisumfänge

In dem vorangegangen Abschnitt haben wir die Kreisradien v und w als Funktionen von u dargestellt. Die Summe der Umfänge beträgt damit:

$$U(u) = 2\,\pi\,(u + v(u) + w(u)) \tag{14}$$

Für das gegebene Dreieck $a = 8$, $b = 10$, $c = 10$ erhalten wir

$$U = 2\,\pi \left(\frac{10\,u}{3} + \frac{1}{16} \left(400\sqrt{\frac{3}{7}} - 16\sqrt{21} - 32\left(4\sqrt{\frac{3}{7}} - u\right) - 56\,u - 8\sqrt{\left(\left(400\sqrt{\frac{3}{7}} - 16\sqrt{21} - 32\left(4\sqrt{\frac{3}{7}} - u\right) - 72\,u\right)u\right)}\right)\right)$$

Diese Funktion besitz im Intervall $0 \le u \le 2$ ein Minimum wie die folgende Grafik zeigt. Über die 1.Ableitung der Funktion $U(u)$ ermitteln wir das Mini-

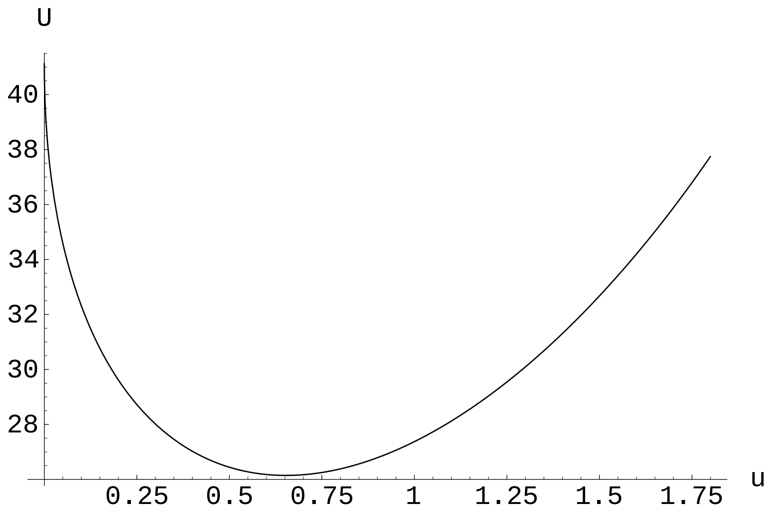

Abbildung 6: Minimum der Funktion $U(u)$ auf dem Intervall $0.3 \le u \le 2$

mum:

$$U'(u) = 2\,\pi \left(\frac{11}{6} - \frac{2\sqrt{30}}{\sqrt{\left(4\sqrt{21} - 7\,u\right)u}} + \frac{\sqrt{70}\,u}{\sqrt{\left(4\sqrt{21} - 7\,u\right)u}} \right)$$

$$U'(u) = 0 \quad \rightarrow \quad u_{min} = \frac{2\left(481\sqrt{21} - 11\sqrt{10101}\right)}{3367} \approx 0.652615 \tag{15}$$

$$v_{min} = \frac{2\left(481\sqrt{21} - 11\sqrt{10101}\right)}{1443} \approx 1.52277, \tag{16}$$

$$w_{min} = \sqrt{21} - 87\sqrt{\frac{3}{3367}} \approx 1.98566 \tag{17}$$

Summe der Kreisflächeninhalte

Die Summe der drei Kreisflächen ergibt:

$$A(u) = \pi\left(u^2 + v^2(u) + w^2(u)\right) \tag{18}$$

Für $a = 8$, $b = 10$, $c = 10$ erhalten wir :

$$A(u) = \frac{1}{2304}\left(14848\,u^2 + \frac{576}{49}\left(\left(20\sqrt{21} - 21\,u - 2\sqrt{14}\sqrt{\left(20\sqrt{21} - 35\,u\right)u}\right)^2\right)\right)$$

Die erste Ableitung nach u ergibt:

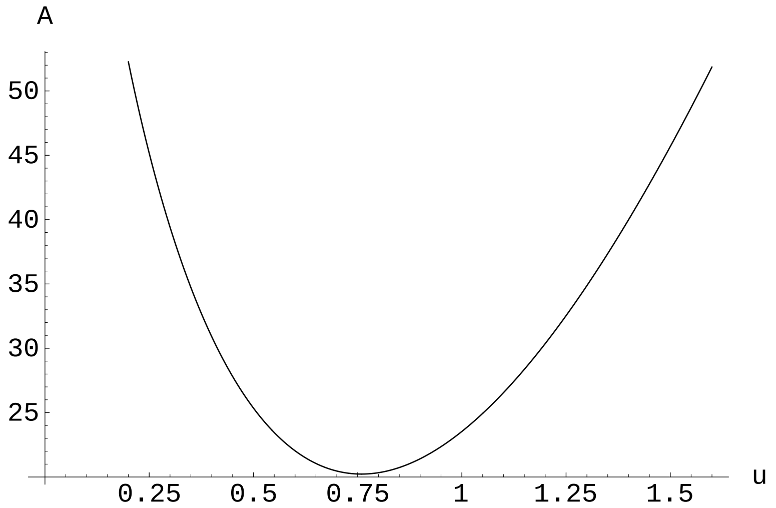

Abbildung 7: Minimum der Funktion $A(u)$ auf dem Intervall $0.3 \leq u \leq 2$

$$A'(u) = \frac{1}{882}\left(11368\,u + 9\left(-21 - \frac{2\sqrt{70}\left(2\sqrt{21} - 7\,u\right)}{\sqrt{\left(4\sqrt{21} - 7\,u\right)u}}\right)\left(20\sqrt{21} - 21\,u - 2\sqrt{70}\sqrt{\left(4\sqrt{21} - 7\,u\right)u}\right)\right)$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung sind sehr umfangreiche, algebraische Ausdrücke. Für die Lösung des Problems genügt eine numerische Näherung:

$$u_1 = 0.759187, \quad u_2 = 3.26593 - 0.0633743\,i, \quad u_3 = 3.26593 + 0.0633743\,i$$

Das Minimum liegt damit bei

$$u = 0.759187, \qquad v = 1.77144, \qquad w = 1.65056 \tag{19}$$