Malfatti Problem I

G.F. Malfatti 1731-1807

aus Zeitschrift *MONOID*

Der italienische Mathematiker G.F.Malfatti stellte 1803 die folgende, wegen ihres Schwierigkeitsgrades bis heute berühmte Aufgabe:
Konstruiere drei Kreise so in ein gegebenes Dreieck, dass die Gesamtfläche der Kreise maximal ist.
Für das gleichseitige Dreieck fand Malfatti die Lösung aus Abbildung 1. Erst 1929 wurde von den Mathematikern *Lob* und *Richmond* gezeigt, dass Malfatti sich hier geirrt hatte.

1. Zeigen Sie, dass es im gleichseitigen Dreieck eine optimalere Lösung gibt.
2. Untersuchen Sie das inverse Problem, d.h. bestimmen Sie die Kreisradien für den Fall das die Summe der Kreisflächen minimal wird !

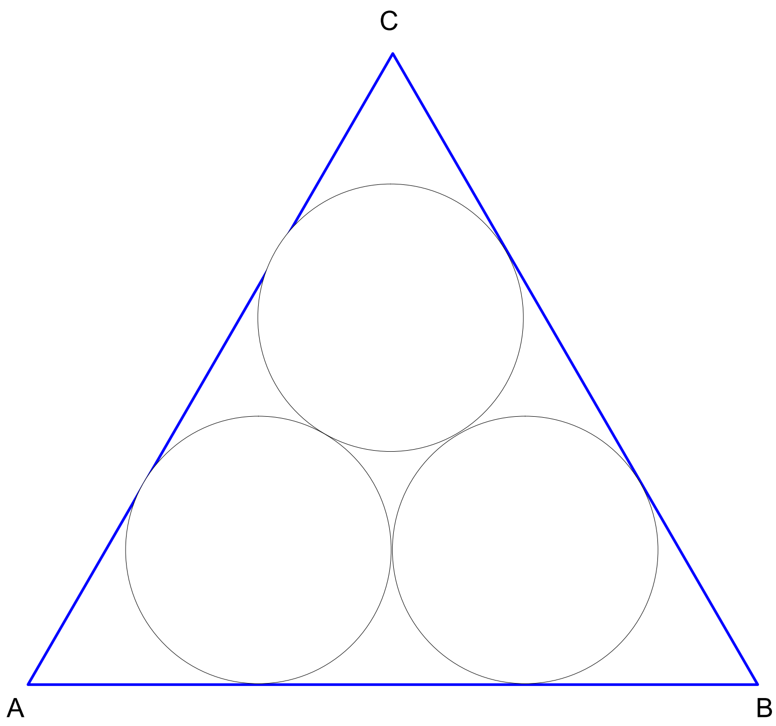

Abbildung 1: Malfatti's Maximallösung

Punktezahl=10

Lösungsansatz

Wir untersuchen alle symmetrischen Lösungen bei denen

- jeder Kreismittelpunkt auf einer Winkelhalbierenden liegt und
- je zwei Kreise sich berühern.

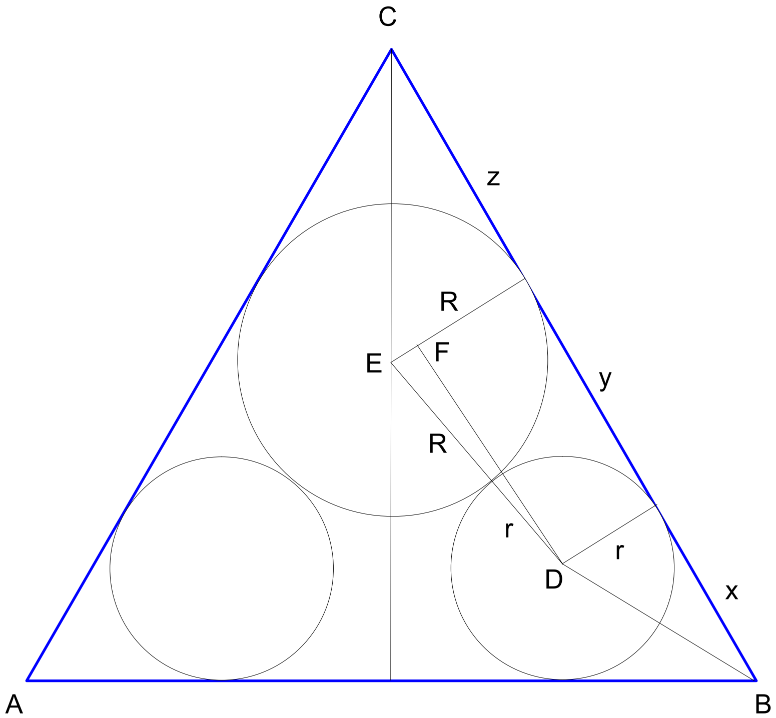

Abbildung 2: Lösungsanstz zur Extremwertaufgabe von Malfatti

Die Strecken x und z berechnen wir mit dem Tangenssatz im rechtwinkligen Dreieck:

$$\tan\alpha = \frac{r}{x}, \quad \alpha = 30^\circ, \quad x = r\sqrt{3} \tag{1}$$

$$\tan\gamma = \frac{R}{z}, \quad \gamma = 30^\circ, \quad z = R\sqrt{3} \tag{2}$$

Aus der Berüherung der Kreise folgt das rechtwinklige Dreieck DEF mit der Seite $y = \overline{DF}$.

$$(R+r)^2 = (R-r)^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad y = 2\sqrt{R\,r} \tag{3}$$

Die Summe der Abschnitte x, y, z ergibt die Länge der Dreieckseite $\overline{BC}$.

$$\overline{BC}: \qquad a = x + y + z = r\sqrt{3} + 2\sqrt{R\,r} + R\sqrt{3} \tag{4}$$

Fall I: Drei gleich große Kreise

Wir wollen nun den von Malfatti favorisierte Lösung mit $r = R$ untersuchen.

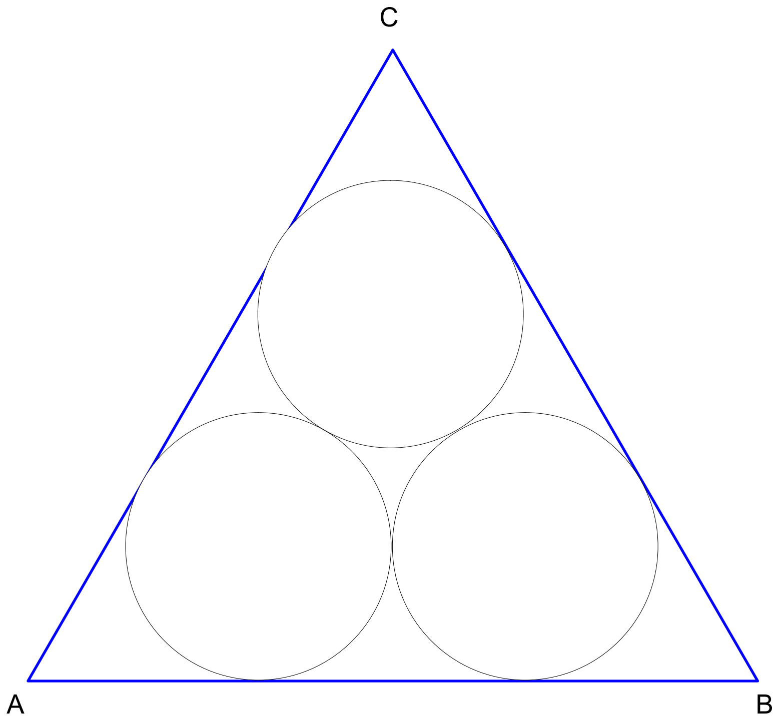

Abbildung 3: Malfatti's Maximallösung

Aus Gleichnug (4) folgt:

$$r = R: \quad a = R\sqrt{3} + 2\sqrt{R\,R} + R\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad R = \frac{a}{2\,(1+\sqrt{3})} \tag{5}$$

Der Flächeninhalt der drei Kreisflächen beträgt dann:

$$A_1 = 3\,\pi\,R^2 = \frac{3\,\pi\,a^2}{4\,(1+\sqrt{3})^2} \tag{6}$$

Als numerisches Beispiel wählen wir $a = 10$:

$$R = \frac{10}{2\,(1+\sqrt{3})} \approx 1.8301, \qquad A = \frac{3\,\pi\,100}{4\,(1+\sqrt{3})^2} \approx 31.567 \tag{7}$$

Fall II: $R =$ **Inkreisradius**

Als zweiten Grenzfall betrachten wir, das der Radius R gleich dem Inkreisradius des gleichseitigen Dreiecks ist.

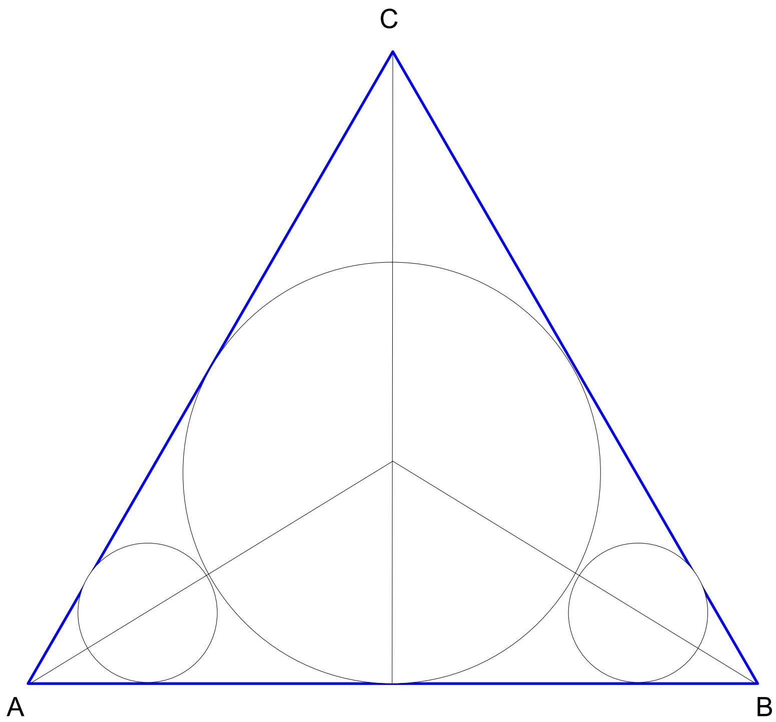

Abbildung 4: Fall II: Einer der drei Kreise ist der Inkreis

Der Inkreisradius im gleichseitigen Dreieck berechnet sich zu :

$$R_i = \frac{a}{2\sqrt{3}} \tag{8}$$

Aus (4) berechnen wir den zugehörigen Radius r :

$$a = r\sqrt{3} + 2\sqrt{R_i\, r} + R_i\sqrt{3} = r\sqrt{3} + 2\sqrt{\frac{a\, r}{2\sqrt{3}}} + \frac{a}{2} \quad \rightarrow \quad r = \frac{a}{6\sqrt{3}} \tag{9}$$

Der Flächeninhalt beträgt für $a = 10$:

$$A_2 = \pi\, {R_i}^2 + 2\,\pi\, r^2 = \pi\, a^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{54}\right) = \frac{\pi\; 11\, a^2}{108} \approx 31.9977 \tag{10}$$

Im Vergleich zur Lösung mit drei gleich großen Radien ist A_2 größer. Bis hierher ist nicht eindeutig geklärt ob es nicht weitere Extremwerte des Flächeninhaltes gibt. Im folgenden Kapitel werden wir eine Funktion $A = f(R)$ herleiten und diese mit den bekannten Methoden der Differentialrechnung untersuchen.

Untersuchung der Funktion $A = f(R)$ auf Extremstellen

Gleichung (4) wird nach r aufgelöst:

$$r = \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\,a - 2\sqrt{\sqrt{3}\,a - 2\,R}\,\sqrt{R} - R\right) \tag{11}$$

Der Flächeninhalt der drei Kreise genügt der der Funktion :

$$A(R) = \pi\,R^2 + \frac{2\,\pi}{9}\left(\sqrt{3}\,a - 2\sqrt{\sqrt{3}\,a - 2\,R}\,\sqrt{R} - R\right)^2 \tag{12}$$

Vor der Extremwertsuche, wollen wir den Funktionsverlauf $A = f(R)$ für $a = 10$ betrachten. Wir können R nicht beliebig wählen, wie die beiden vorangehenden Abschnitte zeigen. Sicherlich ist der Inkreisradius R_i die obere Intervallgrenze. Die untere Grenze ergibt sich aus dem Fall, das alle drei Radien gleich sind.

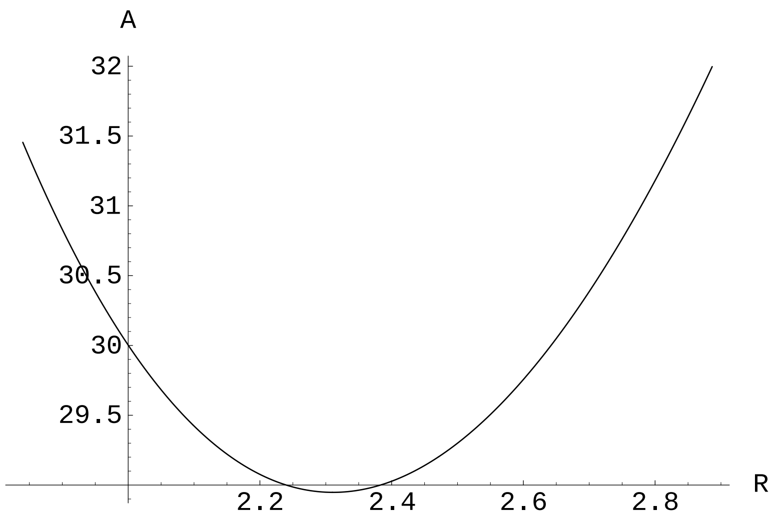

Abbildung 5: Verlauf der Funktion $A = f(R)$ im Intervall $1.83013 \leq R \leq 2.88675$

Zwischen den beiden Fällen $r = R$ und $R = R_i$ gibt es offensichtlich noch ein Minimum. Die erste Ableitung nach R ergibt:

$$\frac{dA}{dR} = \frac{2\,\pi\left(2\sqrt{3}\,a - 5\,R\right)\sqrt{\sqrt{3}\,a - 2\,R}\,\sqrt{R} - 4\,\pi\left(3\,a^2 - 7\sqrt{3}\,a\,R + 8\,R^2\right)}{9\sqrt{\sqrt{3}\,a - 2\,R}\,\sqrt{R}} \tag{13}$$

Um die Nullstellen zu bestimmen, genügt es die Zählerfunktion zu untersuchen. Das Computeralgebrasystem *Mathematica* findet zwei reelle Nullstellen und zwei komplexe Lösungen. Die eine reelle Lösung liegt ausserhalb des für R möglichen Wertebereichs. Das Minimum der Funktion $A(R)$ liegt bei :

$$R_{min} = \frac{57\sqrt{3}\,a}{136} - \frac{1}{136\sqrt{3}}\left(\sqrt{}\left(\left(3129 + 136\left(14418 - 78\sqrt{753}\right)^{1/3} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\frac{13328\,6^{2/3}}{\left(2403 - 13\sqrt{753}\right)^{1/3}}\right)a^2\right)\right) - \frac{1}{68\sqrt{6}}\left(\sqrt{}\left(a^2\left(3129 - 68\left(14418 - 78\sqrt{753}\right)^{1/3} - \right.\right.\right.$$

$$\frac{6664\,6^{2/3}}{\left(2403 - 13\sqrt{753}\right)^{1/3}} + \left(32877\left(2403 - 13\sqrt{753}\right)^{1/6} a\right)/$$

$$\left.\left.\left.\left(\sqrt{}\left(\left(13328\,6^{2/3} + 3129\left(2403 - 13\sqrt{753}\right)^{1/3} + 136\,6^{1/3}\left(2403 - 13\sqrt{753}\right)^{2/3}\right)a^2\right)\right)\right)\right)\right)$$

Für $a = 10$ erhält man $R_{min} = 2.31101$.