Das Dreieck im Dreieck

Eine Extremwertaufgabe aus dem *Hamburger Schülerzirkel*

9. Mai 2001

Im Dreieck ABC liege bei C ein rechter Winkel. Zu jedem Punkt P auf der Kathete $\overline{BC}$ wähle man auf der Hypotenuse $\overline{AB}$ den Punkt Q so, daß in dem $\triangle APQ$ ein rechter Winkel bei P entsteht.

Für welchen Lage von P hat Q minimale Entfernung zu A ?

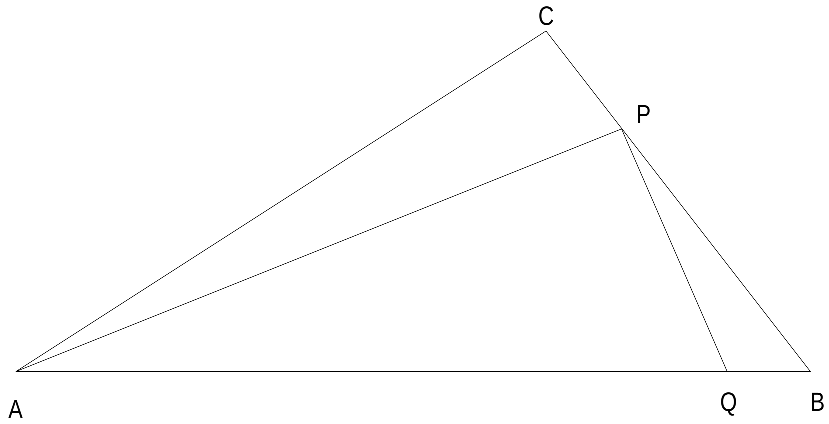

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Punktezahl=8

Lösung

Wir ergänzen die Aufgabenskizze um einige Streckenbezeichner und den Winkel β. Die Strecke $x = \overline{AQ}$ soll minimiert werden. Als veränderliche Paramter wählen wir die Strecke $t = \overline{CP}$ auf der Kathete $\overline{BC}$ aus.

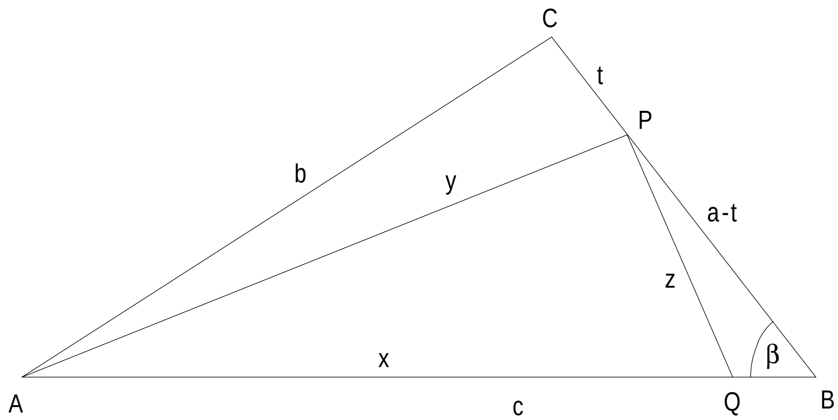

Abbildung 2: Lösungsskizze

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$y^2 = b^2 + t^2, \quad x^2 = y^2 + z^2, \quad \to \quad x^2 = b^2 + t^2 + z^2 \tag{1}$$

Die fehlende Strecke z erhalten wir aus dem Cosinussatz im $\triangle BPQ$:

$$z^2 = (a-t)^2 + (c-x)^2 - 2 \cdot (a-t) \cdot (c-x) \cdot \cos(\beta), \quad \cos(\beta) = \frac{a}{c} \tag{2}$$

Das Einsetzen von (2) in (1) wird nach x aufgelöst:

$$x(t) = \frac{c(a^2 - b^2 - c^2 - 2t^2)}{2(a^2 - c^2 - at)} = \frac{c(b^2 + t^2)}{b^2 + at} \tag{3}$$

Für die Extremwertbestimmung bilden wir die erste und zweite Ableitung nach t:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c(2b^2 t + a(-b^2 + t^2))}{(b^2 + at)^2} \tag{4}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2b^2 \cdot c^3}{(b^2 + at)^3} \tag{5}$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung lauten:

$$t_1 = \frac{-b^2 - b \cdot c}{a}, \qquad t_2 = \frac{-b^2 + b \cdot c}{a} \tag{6}$$

Die Ergebnisse setzen wir in die zweite Ableitung ein und überprüfen das Vorzeichen:

$$x''(t_1) = -\frac{2}{b}, \qquad x''(t_2) = \frac{2}{b} \tag{7}$$

Damit liefert t_2 das gesuchte Minimum.

$$t_2 = \frac{-b^2 + b \cdot c}{a}, \qquad x_{min}(t_2) = \frac{b(a^2 + (b-c)^2)}{a^2} \tag{8}$$

Der Punkt P muß sich in der Entfernung $t = t_2$ von C befinden, damit $x = \overline{AQ}$ minimal wird.